Äärimmäisten tapahtumien teoriaa ja mallinnusta 10.8.2004

1. Olkoot F ja G ei-degeneroituneita kertymäfunktioita sekä $a_1, a_2, \ldots$ positiivisia ja $b_1, b_2, \ldots$ mielivaltaisia reaalilukuja. Oletetaan, että $F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} G(x)$, kun $n \to \infty$. Osoita, että $a_n / a_{n+1} \to 1$, kun $n \to \infty$.

2. Olkoot Y_1 ja Y_2 riippumattomia ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Oletetaan, että Y_1 on kevythäntäinen ja että Y_2:n häntä on hitaasti vaihteleva indeksillä $\alpha \in (0, \infty)$. Määrää raja-arvo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathbf{P}(Y_1 + Y_2 > x)}{\mathbf{P}(Y_2 > x)}.$$

3) Olkoot $X, X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Olkoon c X:n kumulantit generoiva funktio ja μ odotusarvo. Oletetaan, että c on äärellinen kaikkialla.

Olkoot $a_1, a_2, \ldots$ ei-negatiivisia reaalilukuja ja $\lim_{n \to \infty} a_n = a \in (1, \infty)$. Määritellään satunnaismuuttujat $Y_1, Y_2, \ldots$ ehdosta

$$Y_n = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Osoita, että $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(Y_n / n \in B(a\mu, \varepsilon)) = 1$.

Päteekö sama tulos, jos Y_n määritellään ehdosta

$$Y_n = a_1 X_1 + \cdots + a_{n-1} X_{n-1} + X_n.$$