

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II
Erilliskoe 15.6.2016

Tämä on 3,5 tunnin erilliskoe, 5 tehtävää ja koe käsittää koko kurssin alueen. **Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin.** Tehtäväpaperin ohessa on luntti.

1. Pussissa on kolme kolikkoa: kaksi tavallista kolikkoa, jossa toisella puolella on kruunu ja toisella klaava, sekä yksi kolikko, jossa on kruunu molemmilla puolilla. Heitettävä kolikko valitaan umpimähkään pussista ja heiton tuloksena saadaan kruunu. Laske Bayesin kaavan avulla todennäköisyys, että heitetyn kolikon toinen puoli on myös kruunu.

2. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & \text{kun } 0 < 3y < x < 1 \text{ ja} \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määrä vakio c sekä laske odotusarvo $\mathbb{E}(X^2Y^3)$.

3. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia, jotka ovat tasajakautuneita välillä $(0, 1)$ ja riippumattomia. Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = 2X - 3Y, \quad V = X + 2Y$$

Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio $f_{U,V}$. Laske myös satunnaismuuttujan U reuna jakauman tiheysfunktio f_U ja ehdollinen tiheysfunktio $f_{V|U}$.

4. Olkoon X , Y ja Z satunnaismuuttujia, joiden yhteisjakauman kuvaa seuraava malli

$$\begin{cases} X | Y \sim N(0, Y^2) \\ Y = Z + 2, \\ Z \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{3}) \end{cases}$$

- a) Määrä mallin avulla ehdollinen tiheysfunktio $f_{X|Y}$. Määrä mallin avulla myös ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(X | Y)$. (2p)
- b) Laske $\mathbb{E}X$. (2p)
- c) Laske $\text{var } X$. (2p)

5. Olkoon $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ multinormaalijakautunut satunnaisvektori, $\mathbb{E}Z = (0, 1, 0)$ ja

$$\text{Cov } Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Asetetaan vielä $X = (Z_1, Z_3)$ ja $Y = (Z_1, Z_2)$.

- a) Määrä satunnaisvektorin $X + 2Y$ jakauma.
- b) Asetetaan $W = X - BY$, missä

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ovatko W ja Y riippumattomia? Perustelu vastauksesi.