

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II
2. kurssikoe 18.12.2015

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu ja MAOL taulukkokirjaa

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x,y) = c(3 + x^2y) \mathbf{1}\{0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$$

- a) Laske vakion c arvo. (2p)
b) Laske ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(Y | X = x)$, kun $0 < x < 1$. (4p)

2. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia, joiden yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x^2}{8y^2} \mathbf{1}\{0 < x < 2, y > \frac{1}{4}x^2\}$$

Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = \frac{X}{2}, \quad V = 1 - \frac{X^2}{4Y}$$

Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio (4p) ja vastaa lyhyesti perustellen seuraaviin kysymyksiin (vihje: ainakin toinen vastauksista on kyllä):

- a) Noudattaako (U, V) tasajakaumaa jossakin tasoalueessa?
b) Ovatko U ja V riippumattomia?

3. Olkoon X , Y ja W satunnaismuuttujia, joiden jakauman kuvaa hierarkinen malli

$$\begin{cases} X | Y \sim N(0, Y^2) \\ Y = W + 1, \\ W \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

- a) Kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen tiheysfunktio $f_{X|Y}$ ja kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(X | Y)$. (2p)
b) Laske $\mathbb{E}X$. (2p)
c) Laske $\text{var } X$. (2p)

4. Olkoon $X = (X_1, X_2)$ ja $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ riippumattomia standardinormaalijakautuneita satunnaisvektoreita ja olkoon $Z = (X_1 - Y_2 + 3, 3Y_1 - X_2, 2X_1 + Y_3 - 2) = (Z_1, Z_2, Z_3)$.

- a) Määrittää satunnaisvektorin Z jakauma. (4 p)
b) Selitä miksi satunnaismuuttujat Z_1^2 ja $\exp(Z_2 - 3)$ ovat riippumattomia. (2 p)