8.) $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ tasajakauma $[1,2]\times[1,2]$

$\Rightarrow$ $f_{U,V}(u,v) = c\, \mathbb{1}\{(u,v)\in[1,2]\times[1,2]\}$

$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(u,v)\,du\,dv = c \int_1^2 du \int_1^2 dv\ 1 = c\cdot 1\cdot 1$$

$\therefore$ $c = 1$. (tai $[1,2]\times[1,2]$:n pinta-ala $m(\dots)$ on $1\times 1 = 1$

$\Rightarrow c = \frac{1}{m(\dots)} = \frac{1}{1} = 1$)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U+4V \\ U^3 \end{pmatrix}$$
$$\left(= g\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right)$$

8.A) käänt. funktio h? Tai ilman (eli ratk. U ja V X:n ja Y:n funktiona)

$$\begin{cases} X = U+4V \\ Y = U^3 \end{cases} \iff \begin{cases} X = U+4V \\ U = \sqrt[3]{Y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X = \sqrt[3]{Y} + 4V \\ U = \sqrt[3]{Y} \end{cases} \iff \begin{cases} 4V = X - \sqrt[3]{Y} \\ U = \sqrt[3]{Y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} V = \frac{1}{4}(X - \sqrt[3]{Y}) \\ U = \sqrt[3]{Y} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U+4V \\ U^3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{Y} \\ \frac{1}{4}(X - \sqrt[3]{Y}) \end{pmatrix}$$

kuvausten g ja h avulla

$$g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+4v \\ u^3 \end{pmatrix}$$

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{y} \\ \frac{1}{4}(x - \sqrt[3]{y}) \end{pmatrix}$$

8.B) g jatkuvasti derivoituva $[1,2]\times[1,2] \to B$

$\uparrow$?? tällä hetkellä

$$\partial_u g\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \partial_u \begin{pmatrix}u+4v\\u^3\end{pmatrix}$$

$\partial_u = \frac{\partial}{\partial u}$

$$= \begin{pmatrix}\partial_u(u+4v)\\ \partial_u(u^3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0\\3u^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3u^2\end{pmatrix}$$

$$\partial_v g\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ mikä on jva sillä kumpikin komponenttifunktio on jva.

8.C) h jvasti derivoituva $B \to [1,2]\times[1,2]$??

$$\partial_x h = \begin{pmatrix}0\\ \partial_x\left(\frac{1}{4}(x-\sqrt[3]{y})\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

on jva (vaikka B ei tiedetä vielä)

$$\partial_y h = \begin{pmatrix}\partial_y \sqrt[3]{y}\\ \partial_y\left(\frac{1}{4}(x-\sqrt[3]{y})\right)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{3}y^{-2/3}\\ -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot y^{-2/3}\end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ on jva kunhan $y \neq 0$

(eli nyt on tied. B jotta voisi sanoa, onko h jvasti deriv.)

8.D) $B = g([1,2]\times[1,2])$ = g:n kuvajoukko

$= h^{-1}([1,2]\times[1,2])$ = h:n alkukuvajoukko

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in B \iff h\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in [1,2]\times[1,2]$$

$$\iff \begin{cases}\sqrt[3]{y} \in [1,2]\\ \frac{1}{4}(x-\sqrt[3]{y}) \in [1,2]\end{cases}$$

$\sqrt[3]{y} \in [1,2] \iff 1 \le \sqrt[3]{y} \le 2 \iff 1 \le y \le 8$

$\frac{1}{4}(x-\sqrt[3]{y}) \in [1,2] \iff 1 \le \frac{1}{4}(x-\sqrt[3]{y}) \le 2$

$\iff 4 \le x - \sqrt[3]{y} \le 8 \iff 4+\sqrt[3]{y} \le x \le 8+\sqrt[3]{y}$

$\therefore \quad B = \{ (x,y) ; \quad 1 \le y \le 8$ ja
$4 + \sqrt[3]{y} \le x \le 8 + \sqrt[3]{y} \}$

8.E) koska $y \neq 0$ aina kun $(x,y) \in B$, niin

h on jvasti derivoituva 8.E):n nojalla

$\Rightarrow$ g on diffeom. $(1,2) \times (1,2) \longrightarrow B_0$

avoin

$= \{ 1 < y < 8$ ja
$4 + \sqrt[3]{y} < x < 8 + \sqrt[3]{y} \}$

ja lisäksi

$\mathbb{P}\left(\binom{u}{v} \in (1,2) \times (1,2) \right) = 1$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{1}\{ (x,y) \in B_0 \} \cdot f_{U,V}(h_1(x,y), h_2(x,y)) \cdot | J_h(x,y) |$$

$$= \quad -\text{''}- \quad \cdot | J_h(x,y) | \cdot 1$$

$\therefore$ $f_{X,Y}(x,y)$

$$= \mathbb{1}\{ (x,y) \in B_0 \} \cdot | J_h(x,y) |$$

sillä aina kun $(x,y) \in B_0$
niin $h\binom{x}{y} \in [1,2] \times [1,2]$
ja silloin $f_{U,V} \circ h\binom{x}{y}$
$= f_{U,V}(h_1(x,y), h_2(x,y)) = 1$

8.F)

Jacobiaanin $J_h(x,y)$ määrääminen

$$J_h(x,y) \overset{\det}{=} \left(\partial_x h \; \vdots \; \partial_y h \right) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} y^{-2/3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} (y^{-2/3}) \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{12} y^{-2/3}$$

$$\therefore \quad f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{1}\{ 1 < y < 8, \; 4 + \sqrt[3]{y} < x < 8 + \sqrt[3]{y} \} \cdot \frac{1}{12} y^{-2/3}$$

9. $X \mid Y \sim N(Y, 2)$, $Y \sim \mathrm{Bin}(5, \frac{3}{5})$

a) $\mathbb{E}(X \mid Y) \overset{\text{määr.}}{=} m(Y)$

kun $m(y) = \mathbb{E}(X \mid Y = y)$.

Ol. $\Rightarrow$ $X \mid (Y = y) \overset{d}{=} W$, kun $W \sim N(y, 2)$

joten ehd. od. määr. mukaan   sama jakauma

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \mathbb{E}W \overset{\text{norm. jak. odotusarvo}}{=} y = m(y)$$

$\therefore$ $\mathbb{E}(X \mid Y) = m(Y) = Y$. | Huom vähemmänkin puurtelu riittää :)

b) $\mathbb{E}X$ on helpointa laskea iteroituna odotusarvona eli $Y \sim \mathrm{Bin}(5, \frac{3}{5})$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\,\mathbb{E}(X \mid Y) \overset{a)}{=} \mathbb{E}Y = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$$

Huom Tied. tilastot. laki + kertolaskusääntö johtaisi laskuun

$$\mathbb{E}X = \sum_y \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{= f_Y(y)\, f_{X|Y}(x|y)} \cdot x \, dx = \sum_y f_Y(y) \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

kertolasku s.

mikä on oikeastaan helpointa laskea palauttamalla se iteroiduksi odotusarvoksi $\int x f_{X|Y}(x|y)\,dx = \mathbb{E}(X \mid Y = y)$

ja $\sum_y f_Y(y)\, \mathbb{E}(X \mid Y = y) = \sum_y f_Y(y)\, m(y) = \mathbb{E}\, m(Y)$

$$= \mathbb{E}\,\mathbb{E}(X \mid Y)$$

$$= \dots = 3.$$

c) $\operatorname{var} \mathbb{E}(X \mid Y) \overset{a)}{=} \operatorname{var} Y = 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}.$

$Y \sim \operatorname{Bin}(5, \frac{3}{5})$

d) $\operatorname{var}(X \mid Y) \overset{\text{määr}}{=} v(Y)$

kun $v(y) = \operatorname{var}(X \mid Y=y)$

$\overset{\text{määr}}{=} \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X \mid Y=y))^2 \mid Y=y\big)$

$\overset{\text{luennot tai laske}}{=} \underbrace{\mathbb{E}(X^2 \mid Y=y)}_{=\mathbb{E}W^2} - \big(\underbrace{\mathbb{E}(X \mid Y=y)}_{=\mathbb{E}W}\big)^2$ ← kun $W \overset{d}{=} X \mid (Y=y)$ eli $W \sim N(y, 2)$

$= \mathbb{E}W^2 - (\mathbb{E}W)^2 = \operatorname{var} W \underset{W \sim N(y,2)}{=} 2 = v(y)$

$\therefore \operatorname{var}(X \mid Y) = v(Y) = 2.$

Ja taas lyhyempi perustelu $\operatorname{var}(X \mid Y=y) = 2$ ← viittaa $X \mid (Y=y) \sim N(y, 2)$

e) $\operatorname{var} X$ on helpoin laskea ehdollisen varianssin avulla (luennot) tai seuraavalla suoraan laskulla

$\operatorname{var} X = \mathbb{E}X^2 - \big(\underbrace{\mathbb{E}X}_{=3^2=9}\big)^2$

$\overset{b)}{=} \mathbb{E}\,\mathbb{E}(X^2 \mid Y) - 9 = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X^2 \mid Y) - (\mathbb{E}(X \mid Y))^2 + (\mathbb{E}(X \mid Y))^2\big) - 9$

katso d) kohta

$= \mathbb{E}\big(\underbrace{\operatorname{var}(X \mid Y)}_{\overset{d)}{=} 2} + \underbrace{(\mathbb{E}(X \mid Y))^2}_{\overset{a)}{=} Y^2}\big) - 9$

$= \mathbb{E}(2 + Y^2) - 9 = -7 + \underbrace{\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}Y)^2}_{=\operatorname{var} Y = \frac{6}{5}} + \underbrace{(\mathbb{E}Y)^2}_{=3^2=9}$

$= 2 + \frac{6}{5} = \frac{16}{5}.$