Toinen tapa e)

Luennot

$$\operatorname{var} \underline{X} = \underbrace{\mathbb{E} \operatorname{var}(\underline{X} \mid \underline{Y})}_{\overset{d)}{=2}} + \underbrace{\operatorname{var} \mathbb{E}(\underline{X} \mid \underline{Y})}_{\overset{c)}{=\frac{6}{5}}}$$

$$= \mathbb{E}\, 2 + \frac{6}{5} = 2 + \frac{6}{5} = \frac{16}{5}.$$

10. $\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{X}$ riippumaton $\underline{Y}$:stä ja $\underline{X} \sim N_2(0, I_2)$, $\underline{Y} \sim N_3(0, I_3)$

$$Z = \begin{pmatrix} X_1 - Y_2 \\ 2X_1 + Y_3 + 7 \\ 3Y_1 - X_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \underline{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B} \underline{Y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=b}$$

Koska $\underline{X} \perp\!\!\!\perp \underline{Y}$ ja molemmat multinorm. jak.

$\overset{\text{luennot}}{\Rightarrow}$ $\begin{pmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{pmatrix} \sim N_5(\mu, \Sigma)$ missä $\mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ja $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & 0 \\ 0 & \Sigma_{YY} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{array}\right)$

$\therefore \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{pmatrix}$ 5-ulott. standardinorm. jak. on

$\Rightarrow$ $Z$ on affiini muunnos multinorm. jak. omaavasta vektorista

$\Rightarrow$ $Z$ on multinorm. jakautunut

$$\mathbb{E} Z = \mathbb{E}(A\underline{X} + B\underline{Y} + b) = A \underbrace{\mathbb{E}\underline{X}}_{\substack{=0 \\ \text{(vektori)}}} + B \underbrace{\mathbb{E}\underline{Y}}_{\substack{=0 \\ \text{(0-vektori)}}} + b$$

$$= 0 + 0 + b = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Huom Laskun voi tehdä monella tapaa, tässä vain yksi mahdollinen*

$$\mathrm{Cov}\, Z_1 = \mathrm{cov}(Z_1, Z_1) = \mathrm{cov}(AX, AX) + \mathrm{cov}(AX, BY+b) + \mathrm{cov}(BY, AX+b) + \mathrm{cov}(BY, BY) + \underbrace{\mathrm{cov}(b, AX+BY+b)}_{=0}$$

(b vakio vektori)

$$= \mathrm{cov}(AX, AX) + \mathrm{cov}(BY, BY) + \underbrace{\mathrm{cov}(AX, BY+b)}_{=0} + \underbrace{\mathrm{cov}(BY, AX+b)}_{=0}$$

$=0$ sillä $AX \perp\!\!\!\perp BY+b$ sillä $X \perp\!\!\!\perp Y$

$=0$ sillä $BY \perp\!\!\!\perp AX+b$ sillä $Y \perp\!\!\!\perp X$

Luennot

$$= \mathrm{Cov}(AX) + \mathrm{Cov}(BY) = A \underbrace{\mathrm{Cov}\, X}_{=I_2} A^T + B \underbrace{\mathrm{Cov}\, Y}_{=I_3} B^T$$

$$= AA^T + BB^T$$

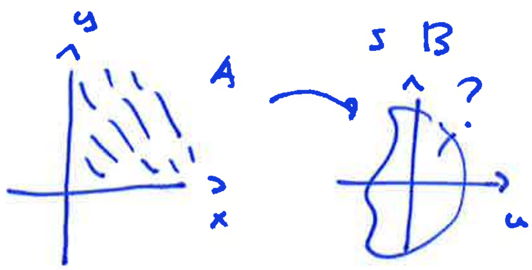
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

eli $Z \sim N_3(\mu_Z, \Sigma_Z)$ kun $\mu_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\Sigma_Z = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

11) $X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

$\Rightarrow \mathbb{P}((X, Y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)) = 1.$

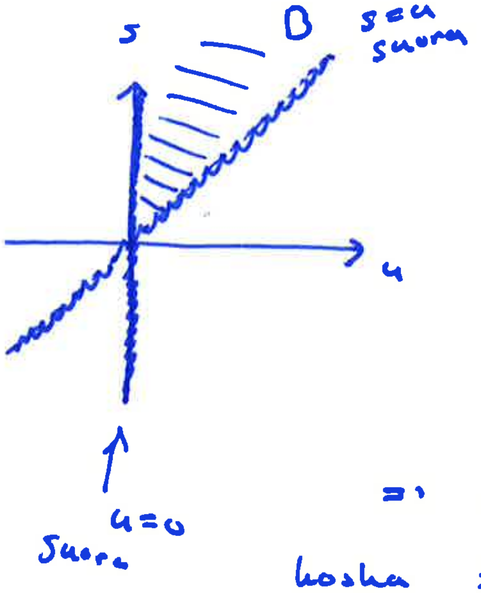



$$\begin{pmatrix} S \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+Y \\ X \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = X+Y \\ U = X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = U+Y \\ X = U \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = U \\ Y = S-U \end{cases}$$

$\Rightarrow$ koska $X, Y > 0$ tn:llä 1, niin $\Rightarrow \overset{X}{\overset{\shortparallel}{U}} > 0$

$\underbrace{S-U}_{=Y} > 0$




$s-u=0$

$\iff s=u$

$s-u>0 \iff s>u$

Koska kuvaus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$ on lineaarinen ja kääntyvä, niin se on koko tason diffeomorfismi

$\Rightarrow$ riittää määrätä muunnoksen jacobiaani koska tällöin $f_{S,U}$ selviää muuntokaavasta

## Muistisääntötekniikka

$$f_{X,Y}(x,y)\,|\partial(x,y)| = f_{S,U}(s,u)\,|\partial(s,u)|$$

$$\Rightarrow f_{S,U}(s,u) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,u)}\right| f_{X,Y}(x,y)$$

Nyt

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,u)} \underset{\text{void. aj.}}{=} \det \frac{\partial\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\partial\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}^T} = \det\left(\partial_s\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \vdots\ \partial_u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \partial_s x & \partial_u x \\ \partial_s y & \partial_u y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

joten

$$f_{S,U}(s,u) = |(-1)| \cdot f_{X,Y}(\overset{=u}{x}, \underset{s-u}{\underset{\shortparallel}{y}}) \cdot 1\!\!1\underbrace{\{(x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty)\}}_{=\{u>0,\ s>u\}}$$

sillä $f_{X,Y}^{(x,y)} = 0$ muul

$$= f_{X,Y}(u, s-u)\, 1\!\!1\{u>0, s>u\}$$

$$\underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \underset{\lambda e^{-\lambda u}}{\underset{\shortparallel}{f_X(u)}}\ \underset{\lambda e^{-\lambda(s-u)}}{\underset{\shortparallel}{f_Y(s-u)}}\ 1\!\!1\{u>0, s>u\}$$

$$= \lambda^2 e^{-\cancel{\lambda u} - \lambda s + \cancel{\lambda u}}\ 1\!\!1\{u>0, s>u\}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda s}\ 1\!\!1\{u>0, s>u\}.$$

Huom ~~Yff~~ $f_{S,U}(s,u)$ riippuu muuttujasta $u$ vain indikaattorifunktion (eli kantajansa $f_{S,U}(s,u)>0$) kautta.

(12.) $\underline{X}, \underline{Y}, S, U$ kuten 11):ssä

a) $f_{S|U}(s|u) = ?$

Näytämme ensin miten $f_{S|U}$ selviää, jos tiedämme ehdotetun

$$\circledast \quad F_{S|U}(s|u) = F_{\underline{Y}}(s-u) \quad (\text{aina kun } u>0).$$

Koska $F_{\underline{Y}}$ on jva ja jatkuvasti derivoituva (melk. kaikilla) kuvaus $s \mapsto s-u$ on lin., niin $s \mapsto F_{S|U}(s|u)$ on jvasti jak. s.muuttujan kertymäfunktio.

$$\Rightarrow \boxed{f_{S|U}(s|u)} = \frac{\partial}{\partial s} F_{S|U}(s|u) \overset{\circledast}{=} \frac{\partial}{\partial s} F_{\underline{Y}}(s-u)$$

$$= f_{\underline{Y}}(s-u). \quad (\text{aina kun } u>0)$$

$$\left( = \lambda e^{-\lambda(s-u)} \mathbb{1}\{s-u>0\}. \right)$$

Näytämme nyt $\circledast$:n

Tiedämme että $F_{S|U}(s|u) = \mathbb{P}(S \le s \mid U=u)$

$$= \mathbb{P}(\underline{X}+\underline{Y} \le s \mid \underset{\underline{X}}{\underset{\parallel}{U}}=u) = \mathbb{P}(\underline{X}+\underline{Y} \le s \mid \underline{X}=u)$$

tämän voi sanoa sanallisesti eli $\underline{X} \to u$ ok. jos siitä $\perp\!\!\!\perp$

$$\underset{\substack{\text{ehd.}\\ \text{odotusarvolle}}}{\overset{\text{mään}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}\{u+y \le s\} \underbrace{f_{\underline{Y}|\underline{X}}(y|u)}_{\substack{= f_{\underline{Y}}(y) \\ \underline{X} \perp\!\!\!\perp \underline{Y} \\ \uparrow\ !!}} dy = \mathbb{P}(u+\underline{Y} \le s)$$

$$= \mathbb{P}(\underline{Y} \le s-u)$$

$$= F_{\underline{Y}}(s-u).$$

$\mathbb{E}(g(\underline{X},\underline{Y}) \mid \underline{X}=u)$

$g(x,y) = \mathbb{1}\{x+y \le s\}$

$\underline{Y}$ jva

b) koska $f_{S|U}(s|u) \overset{a)}{=} \lambda e^{-\lambda(s-u)} \mathbb{1}\{s-u>0\}$

ja $\underset{\underset{X}{\parallel}}{f_U}(u) = f_X(u) = \lambda e^{-\lambda u} \mathbb{1}\{u>0\}$ aina kun $u>0$

niin kertolaskusääntö $\Rightarrow$ $f_{S,U}(s,u) = f_U(u) \cdot f_{S|U}(s|u)$

$$= \lambda^2 e^{-\cancel{\lambda u} - \lambda s + \cancel{\lambda u}} \mathbb{1}\{s-u>0\} \cdot \mathbb{1}\{u>0\}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda s} \mathbb{1}\{u>0,\ s-u>0\}.$$

c) kun s on kiinteä, niin

~~[illegible]~~ $f_{U|S}(u|s) \propto f_{S,U}(s,u) = \lambda^2 \underset{\text{ei riipu u:sta}}{e^{-\lambda s}}$ ei riippuvista $\mathbb{1}\{u>0,\ s-u>0\}$

$\propto \mathbb{1}\{u>0,\ s-u>0\}$

$f_{U|S}(u|s) = \dfrac{f_{S,U}(s,u)}{f_S(s)}$ ← ei riipu u:sta

$= \mathbb{1}\{0<u,\ u<s\}$

$= \mathbb{1}\{0<u<s\}$

$\propto \frac{1}{s}\mathbb{1}\{0<u<s\} = f_W(u)$ kun $W \sim U(0,s)$

voimme kertoa $\frac{1}{s}$:llä

koska $f_{U|S}$ on koska $\frac{1}{s}$ ei riipu u:sta $\propto f$, niin

$\therefore$ $f_{U|S}(u|s) = \frac{1}{s}\mathbb{1}\{0<u<s\} = f_W(u)$

$\Rightarrow$ $U|(S=s) \sim U(0,s)$ ← tasajakauma