

## Todennäköisyyslaskenta II, kertaustehtäviä (2. periodi)

**Huom!** Kertaustehtäviä ei tarvitse palauttaa, ne on tarkoitettu 2. periodin asioiden lisäharjoittelua varten. Vinkkejä voi kysellä Presemon kautta.

*Huom!* Lisään tehtäviä vielä.

1. Olkoon  $X$  sm, joka on integroituva ja  $\mathbb{E}|X| = 2$ . Määrää Markovin ey:n avulla yläraja-arvioita seuraaville tn:ille

a)  $\mathbb{P}(X > 32)$

b)  $\mathbb{P}(X^2 > 256)$

2. Olkoon  $X$  sm, jolla on varianssi  $\text{var } X = 16$ . Jos emme tiedä tarkkaan, mikä on satunnaisuuttujan  $X$  odotusarvo, mutta tiedämme, että  $1 < \mathbb{E}X < 3$ , niin mitä voimme Tšebyševin ey:n avulla sanoa luvusta  $\alpha > 0$ , jolle

$$\mathbb{P}(|X| > 9) \leq \alpha.$$

3. Oletetaan, että  $X$  on sm, jolle  $\mathbb{P}(X \in (0, 1)) = 1$  ja  $\mathbb{E}X = 3/4$ . Oletetaan lisäksi, että  $\mathbb{E} \exp(2X)$  on äärellinen. Määrää jokin  $\alpha > 0$ , että

$$\mathbb{E} \exp(2X) \geq \alpha$$

4. Satunnaisuuttujilla  $X$  ja  $Y$  on jatkuva yhteisjakauma yhteistiheysfunktiolla

$$f_{X,Y}(x, y) = cx^2y \times \mathbf{1}\{0 \leq x^2 < 2y \leq 1\}$$

a) Määrää vakio  $c$

b) Määrää reunatiheysfunktio  $f_X$

c) Määrää reunatiheysfunktio  $f_Y$

5. Olkoon sv:n  $Z = (X, Y)$  tiheysfunktio kuten edellisessä tehtävässä.

a) laske sv:n  $Z$  odotusarvovektori

b) laske sv:n  $Z$  kovarianssimatriisi

6. Olkoon sv:n  $Z = (X, Y)$  tiheysfunktio kuten edellisessä tehtävässä.

a) Laske ehdollinen tiheys  $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$ .

b) Laske ehdollinen tiheys  $x \mapsto f_{X|Y}(x|y)$ .

7. Olkoon sv:n  $Z = (X, Y)$  tiheysfunktio kuten edellisessä tehtävässä.

a) Laske ehdollinen odotusarvo  $\mathbb{E}(X | Y = y)$

b) Laske ehdollinen odotusarvo  $\mathbb{E}(Y | X = x)$

8. Olkoon sv:llä  $(U, V)$  tasajakauma alueessa  $[1, 2] \times [1, 2]$ . Määritellään sv  $(X, Y)$  muunnoksena

$$\begin{cases} X = U + 4V \\ Y = U^3 \end{cases}$$

Määrittää sv:n  $(X, Y)$  yhteistiheysfunktio.

9. Olkoon  $X|Y \sim N(Y, 4)$  ja  $Y \sim \text{Bin}(6, \frac{3}{5})$ . Laske

a) Laske ehdollinen odotusarvo  $\mathbb{E}(X|Y)$

b) Laske odotusarvo  $\mathbb{E}X$ .

c) Laske varianssi  $\text{var} \mathbb{E}(X|Y)$ .

d) Laske ehdollinen varianssi  $\text{var}(X|Y)$ .

e) Laske varianssi  $\text{var} X$ .

10. Olkoon  $X = (X_1, X_2)$  ja  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$  riippumattomia standardinormaalijakautuneita satunnaisvektoreita ja olkoon  $Z = (X_1 - Y_2, 2X_1 + Y_3 + 7, 3Y_1 - X_2)$ . Määrittää satunnaismuuttujan jakauma.

11. Olkoon  $X$  ja  $Y$  riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla  $\lambda > 0$ . Määritellään

$$\begin{pmatrix} S \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + Y \\ X \end{pmatrix}$$

Johda sv:n  $(S, U)$  yhteistiheysfunktio  $f_{S,U}$  tiheysfunktion muuntokaavalla.

12. Olkoon  $X, Y, S$  ja  $U$  kuten edellisessä tehtävässä.

a) Johda ehdollinen tiheys  $f_{S|U}$  näyttämällä suoraan, että kertymäfunktioille pätee

$$F_{S|U}(s|u) = \mathbb{P}(S \leq s|U = u) = F_Y(s - u)$$

b) Johda yhteistiheysfunktio  $f_{S,U}$  kertolaskusäännöllä.

c) Johda ehdollinen tiheysfunktio  $u \mapsto f_{U|S}(u|s)$ . Mikä jakauma on kyseessä?

13. Olkoon  $X, Y$  ja  $Z$  kuten tehtävässä 10. Päättele, että satunnaismuuttujat  $Z_3^2$  ja  $\exp(Z_1 + 4Z_2)$  ovat riippumattomia, kun  $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ .

14. Olkoon  $X, Y$  ja  $Z$  kuten edellisessä tehtävässä. Määrittää

a) satunnaisvektorin  $W = (Z_1, Z_3)$  jakauma

b) satunnaismuuttujan  $Z_2$  ehdollinen jakauma  $Z_2 | (W = w_1, w_2)$  ehdolla  $W = (w_1, w_2)$ .

15. Satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  noudattavat hierarkista mallia

$$\begin{cases} Y | X \sim U(1, 3X) \\ X \sim U(2, 4) \end{cases}$$

(missä  $U(a, b)$  tarkoittaa tasajakaumaa välillä  $(a, b)$ .)

- a) Laske  $\mathbb{E}Y$
- b) Laske  $\text{var } Y$
- c) Laske yhteistiheysfunktio  $f_{X,Y}$ .