

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016
Harjoitus 4

Tehtäväsarja I

1. Satunnaismuuttuja $U \sim \text{Exp}(2)$ ja $V = 2U/(3+U)$. Laske f_V käyttämällä muuttujanvaihtotekniikkaa. (monisteen Lause 2.12 tai muistisääntö (2.12)).
2. Logistinen jakauma parametreilla $\mu \in \mathbb{R}$ ja $s > 0$ voidaan määritellä siten, että se on satunnaismuuttujan Y jakauma, kun

$$Y = \mu + s \ln \frac{X}{1-X},$$

ja $X \sim U(0,1)$. Johda logistisen jakauman tiheysfunktio.

3. Heitetään 12-sivuista noppaa kaksi kertaa. V_1 on ensimmäisen heiton silmäluku ja V_2 toisen heiton silmäluku. Määritellään satunnaismuuttujat $X = \min(V_1, V_2)$ ja $Y = \max(V_1, V_2)$. Perustele, miksi satunnaismuuttujien X ja Y yptnf on

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1/144, & \text{kun } 1 \leq x = y \leq 12, \\ 2/144, & \text{kun } 1 \leq x < y \leq 12, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tarkista myös, että $f_{(X,Y)}$ todella on yptnf. Johda reuna-ptnf:t f_X ja f_Y yptnf:n reunasummina.

4. Jatkoa tehtävään 3.

- a) Ovatko tehtävän 3 satunnaismuuttujat X ja Y riippumattomia?
- b) Esitä tapahtuma $\{X > x\}$ muodossa $\{V_1 > v_1, V_2 > v_2\}$ keksimällä sopivat v_1 ja v_2 .
- c) Päättele silmälukujen V_1 ja V_2 riippumattomuuden ja kohdan b) avulla sm:n X kf F_X .
- d) johda kohdan c) kertymäfunktioista F_X vastaava reuna-ptnf f_X (toivottavasti sait saman kuin edellisessä tehtävässä)

5. Heitetään tavallista lanttia kolme kertaa (ja oletetaan, että heitot ovat riippumattomia).

Määritellään satunnaismuuttujat $X_j = \mathbf{1}\{\text{”j. heitto kruuna”}\}$, kun $j = 1, 2, 3$. Määritellään näiden avulla satunnaismuuttujat $W = 2X_2 + X_3 + 1$ ja $V = 4X_1$ sekä $Y = W + V$.

- a) Selitä perustellen, miksi $W \perp V$.
- b) Määrää ptnf f_Y .

6. Jatkoa tehtävään 3. Kuten tehtävässä 3, määritellään $X = \min(V_1, V_2)$ ja $Y = \max(V_1, V_2)$ kun V_1 ja V_2 ovat 12-sivuisen nopan heittoa. Laske $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}Y$ käyttämällä määritelmää 4.1.