HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2017
Kurssikoe 20.12.2016 – Ratkaisuehdotuksia

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x,y) = c\,x^2(1-y)\,\mathbf{1}\{\,0 < y < 1,\ 0 < x < 2y\,\}$$

   a) Laske vakion c arvo.
   b) Laske satunnaismuuttujan X reunatiheysfunktio f_X.
   c) Laske odotusarvo $\mathbb{E}(\,XY^2\,)$.

Ratkaisu: Huomautus! Alla oleva ehdotus on hyvin seikkaperäinen kuvaus jokaisesta askeleesta. En luonnollisestikaan esitä, että tämä olisi *mallivastaus* vaan ainoastaan vastaus, jossa jokainen kohta on kirjoitettu näkyviin.

a) Kohdassa *a*) vakion c arvo selviää yhtälöstä

$$\int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

Tämä yhtälö seuraa siis siitä, että funktio $f_{X,Y}$ on yhteistiheysfunktio (se on myös positiivinen annetussa joukossa, vaikka $1-y<0$ jos $y>1$) . Fubinin lauseen avulla voimme laskea vasemman puolen tasointegraalin

$$\int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{2y} \mathrm{d}x\, c\,x^2(1-y)$$

missä käytimme apuna sitä, että indikaattorifunktiosta tiedämme suoraan, että $0 < x < 2y$, joten on helpompi integroida ensin muuttujan x suhteen ja sitten integroida y yli välin $(0,1)$.[1].
Nyt sisempi integraali on

$$\int_0^{2y} c\,x^2(1-y)\mathrm{d}x = c\,(1-y)\int_0^{2y} x^2\mathrm{d}x = c(1-y) \Big/_{0}^{2y} \tfrac{1}{3}x^3 = \tfrac{1}{3}c(1-y)(2y)^3$$

Koska $(2y)^3 = 8y^3$, olemme siten jo päätelleet, että

$$\int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{2y} \mathrm{d}x\, c\,x^2(1-y) = \frac{8c}{3}\int_0^1 y^3(1-y)\mathrm{d}y$$

Integroimalla edelleen saamme

$$\frac{8c}{3}\int_0^1 y^3(1-y)\mathrm{d}y = \frac{8c}{3}\int_0^1 y^3 - y^4\mathrm{d}y = \frac{8c}{3} \Big/_{0}^{1} \tfrac{1}{4}y^4 - \tfrac{1}{5}y^5 = \frac{8c}{3}\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big)$$
$$= \frac{8c}{3}\cdot\frac{5-4}{4\cdot 5} = \frac{2c}{3\cdot 5}$$

[1] Toisaalta, jos kurkkaamme b)-kohtaa, niin huomaamme että voisi olla käytännöllisempää käyttää toista integroimisjärjestystä, sillä b)-kohta tulisi tehtyä samalla. Eli eräs lähestyminen olisi tehdä b)-kohta vakiota c vaille ja ratkaista vakio c osana b)-kohtaa. Me tietenkin teemme harjoituksen vuoksi molemmat integroinnit :)

Kaiken kaikkiaan olemme päätelleet, että

$$1 = \int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2c}{15}$$

joten kysytty vakio on Presemossakin mainittu $c = \frac{15}{2}$.

b) Kohdassa b)-kysyttiin satunnaismuuttujan X reunatiheysfunktio f_X. Tiedämme, että tämä saadaan integroimalla y "pois", eli

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}y$$

On oleellista, että tämän integroinnin jälkeen mitään viittausta muuttujaan y ei ole (eli jos vastauksessa y oli jäljellä, on varsinaisilta ratkaisupoluilta astuttu jossain vaiheessa harhaan). Integroinnin helpottamiseksi "viskotaan" kaikki pelkästään muuttujasta x riippuvat termit "pihalle", joten aloitetaan:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} c\,x^2(1-y)\,\mathbf{1}\{\,0<y<1,\ 0<x<2y\,\}\mathrm{d}y \\ &= c\,x^2\mathbf{1}\{\,0<x\,\}\int_{-\infty}^{\infty}(1-y)\,\mathbf{1}\{\,0<y<1,\ x<2y\,\}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Jos integrandissa esiintyvä indikaattori ei häviä, niin $x < 2y < 2\cdot 1 < 2$. Jos siis $x \geq 2$, niin väistämättä $f_X(x) = 0$. Voimme siis kirjoittaa,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= c\,x^2\mathbf{1}\{\,0<x<2\,\}\int_{-\infty}^{\infty}(1-y)\,\mathbf{1}\{\,0<y<1,\ y>x/2\,\}\mathrm{d}y \\ &= c\,x^2\mathbf{1}\{\,0<x<2\,\}\int_{0}^{1}(1-y)\,\mathbf{1}\{\,y>x/2\,\}\mathrm{d}y \\ &= c\,x^2\mathbf{1}\{\,0<x<2\,\}\int_{x/2}^{1}(1-y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Olisimme tosin päässeet tähän suoraankin huomaamalla että

$$\{\,0<y<1,\ 0<x<2y\,\} = \{\,0<x<2,\ x/2<y<1\,\}$$

Tämän voi päätellä ratkomalla epäyhtälöitä tai miettimällä kuvaajaa. Joka tapauksessa pääsemme nyt integroimaan.

$$\begin{aligned} f_X(x) = c\,x^2\mathbf{1}\{\,0<x<2\,\}\int_{x/2}^{1}(1-y)\mathrm{d} &= c\,x^2\mathbf{1}\{\,0<x<2\,\}\Big/_{x/2}^{1} -\tfrac{1}{2}(1-y)^2 \\ = c\,x^2\mathbf{1}\{\,0<x<2\,\}\tfrac{1}{2}(1-(x/2))^2 &= \tfrac{1}{2}c\,\mathbf{1}\{\,0<x<2\,\}x^2(1-x+\tfrac{1}{4}x^2) \end{aligned}$$

Koska a)-kohdan mukaan $c = \frac{15}{2}$, voimme todeta, että

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{15}{4}(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2), & \text{kun } \ 0<x<2, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tarkistetaan vielä, että saatu funktio on tiheysfunktio. Luonnollisestikaan tätä ei tarvitse tehdä :) mutta antaa lisätukea päätelmille. Se, että funktio on positiivinen seurasi esityksest' $f_X(x) \propto x^2(1-(x/2))^2$ kun $0<x<2$. Lasketaan

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \tfrac{15}{4}\int_0^2(\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2)\mathrm{d}x &= \tfrac{15}{4}\Big/_0^2 (\tfrac{1}{4\cdot 5}x^5 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3) \\ &= \tfrac{15\cdot 2^3}{2^2}(\tfrac{2^2}{4\cdot 5} - \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{3}) = (3\cdot 5\cdot 2)\cdot(\tfrac{1}{5} - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3})) = (3\cdot 5\cdot 2)\cdot(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2\cdot 3}) \\ &= 6 - 5 = 1, \end{aligned}$$

kuten pitikin. Jos laskuja teki laskimella, ei välivaiheita varmastikaan tarvinnut näin montaa.

c) Kohdassa c) käytetämme tiedostamattoman tilastotieteilijän lakia[2]. Nyt kaikki satunnaismuuttujat X ja Y ovat positiivisia (eli todennäköisyydellä yksi $X \geq 0$ ja $Y \geq 0$. Siispä integroituvuuskysymys ei astu edes kuvioon mukaan :) joten voimme aloittaa laskemisen.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\,XY^2\,) &= \int xy^2 f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{2y} xy^2 \cdot c\,x^2(1-y)\mathrm{d}x \\
&= c\int_0^1 y^2(1-y)\Big(\int_0^{2y} x^3 \mathrm{d}x\Big)\ \mathrm{d}y = c\int_0^1 y^2(1-y)\Big(\Big/_{\!0}^{2y}\ \tfrac{1}{4}x^4\Big)\ \mathrm{d}y \\
&= c\int_0^1 y^2(1-y)\cdot \tfrac{1}{4}(2y)^4\ \mathrm{d}y = 4c\int_0^1 y^6(1-y)\ \mathrm{d}y \\
&= 4c\int_0^1 y^6 - y^7\ \mathrm{d}y = 4c\ \Big/_{\!0}^{1}\ \tfrac{1}{7}y^7 - \tfrac{1}{8}y^8\ = 4c\cdot(\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}) = 4c\cdot\tfrac{1}{7\cdot 8}
\end{aligned}
$$

Koska a)-kohdan mukaan $c = \frac{15}{2}$, saamme odotusarvolle siten lukuarvon

$$\mathbb{E}(\,XY^2\,) = \tfrac{2\cdot 15}{\cdot}\tfrac{1}{7\cdot 8} = \tfrac{15}{4\cdot 7} = \tfrac{15}{28}.$$

Tietenkään tärkeintä ei ollut tämä lukuarvo vaan retki sinne ja takaisin. :)

2. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia, jotka ovat tasajakautuneita välillä $(0,1)$ ja riippumattomia. Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = 2X - Y, \qquad V = X + 4Y$$

Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio sekä satunnaismuuttujan U reunatiheysfunktio f_U. Kerro lyhyesti perustellen, noudattaako satunnaisvektori (U,V) tasajakaumaa jossakin tasoalueessa vai ei.

Ratkaisu: Huomautus! Alla oleva ehdotus on hyvin seikkaperäinen kuvaus jokaisesta askeleesta. En luonnollisestikaan esitä, että tämä olisi *mallivastaus* vaan ainoastaan vastaus, jossa jokainen (tarvittava) kohta on kirjoitettu näkyviin. Koska on täysin vaihtoehtoisia tapoja lähestyä tehtävää, niin kaikkia mahdollisuuksia ei ehdotus myöskään kata. Edelleen, suosittelen katsomaan kertaustehtävissä ollutta tehtävää, jonka ratkaisussa käytin suoraviivaisempaa muistisääntöä. Tämä suoraviivaisempi tapa on aivan riittävä.

Tehtävänannon perusteella voimme suoraan selvittää satunnaisvektorin (X,Y) jakauman, sillä reunajakaumat ovat

$$f_X(x) = \mathbf{1}\{\,0 < x < 1\,\}, \quad f_Y(y) = \mathbf{1}\{\,0 < y < 1\,\}$$

ja $X \perp\!\!\!\perp Y$, joten yhteistiheysfunktio saadaan kertolaskusäännöllä

$$f_{X,Y}(x,y) = \mathbf{1}\{\,0 < x < 1, 0 < y < 1\,\}$$

Toisin sanoen, satunnaisvektori (X,Y) noudattaa tasajakaumaa *yksikköneliössä*.

[2]Tärkeä havainto on, että satunnaismuuttujat X ja Y eivät ole riippumattomia, vaikka yhteistiheysfunktio hieman näyttää olevan tulomuotoa, sillä indikaattorifunktiota ei voi esittää tulomuodossa. Siispä emme voi olettaa, että $\mathbb{E}(\,XY^2\,)$ olisi sama kuin $\mathbb{E}X\mathbb{E}Y^2$

Luentojen perusteella meillä on (ainakin) kaksi tapaa lähestyä tätä kysymystä. Voimme huomata, että kyseessä on *lineaarinen muunnos* ja käyttää tietojamme affiineista muunnoksista surutta apuna. Toinen on käyttää muuttujanvaihtokaavaa ja diffeomorfismeja joko eksplisiittisesti tai implisiittisesti. Seuraavassa käytämme eksplisiittistä tapaa, missä kirjoitamme näkyviin muunnokset $(U, V) = g(X, Y)$ ja $h(U, V) = (X, Y)$.

Tehtävänannon mukaan $(U, V) = g(X, Y)$, kun g on kahden muuttujan vektoriarvoinen funktio

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tästä huomaamme itse asiassa, että kyseessä on lineaarinen kuvaus ja voisimme hyvin kirjoittaa

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

kun A on matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ja A^{-1} on sen käänteismatriisi. Käänteisfunktion h saa siis joko ratkaisemalla yhtälöparista

$$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 4y \end{cases}$$

muuttujat x ja y tai laskemalla käänteismatriisi A^{-1} ja toteamalla, että

$$h(u, v) = \begin{pmatrix} h_1(u, v) \\ h_2(u, v) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Ratkaistaan tämä ratkaisemalla yhtälöpari (käänteismatriisin varmaankin saa suoraan laskimesta).

$$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 4y \end{cases} \iff \begin{cases} 4u = 8x - 4y \\ v = x + 4y \end{cases} \iff \begin{cases} 4u = 8x - 4y \\ v + 4u = 9x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u = 2x - y \\ x = \frac{1}{9}(v + 4u) \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x - u \\ x = \frac{1}{9}(v + 4u) \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2}{9}v + \frac{8}{9}u - u \\ x = \frac{1}{9}(v + 4u) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{1}{9}(2v - u) \\ x = \frac{1}{9}(v + 4u) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{9}(4u + v) \\ y = \frac{1}{9}(-u + 2v) \end{cases}$$

Eli toisin sanoen, käänteisfunktio h on lineaarinen kuvaus,

$$h(u, v) = \begin{pmatrix} h_1(u, v) \\ h_2(u, v) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(4u + v) \\ \frac{1}{9}(2v - u) \end{pmatrix}$$

Voimme siis todeta, että kuvaus g on bijektio tasolta $\mathbb{R}^2$ itselleen, eli $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on bijektio. Siten myös käänteiskuvaus $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on bijektio.

Edelleen luentojen pohjalta voimme sanoa, että se tässä tapauksessa lineaarisena kuvauksena diffeomorfismi, mutta voimme tarkistaa sen myös varmistamalla, että g ja h ovat jatkuvasti derivoituvia eli että derivaattamatriisien komponentit ovat jatkuvia.

Kuvauksen h derivaattamatriisi on

$$\begin{pmatrix} \partial_u h_1(u,v) & \partial_v h_1(u,v) \\ \partial_u h_2(u,v) & \partial_v h_2(u,v) \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

ja vastaavasti kuvauksen g derivaattamatriisiksi saamme matriisin A. Vakiofunktiot ovat jatkuvia, joten kuvausten g ja h diffeomorfisuus koko tasossa on selvitetty. Luentojen perusteella voimme nyt todeta, että (U,v) on jatkuvasti jakautunut ja sen tiheysfunktio (koko tasossa) on siten

$$f_{U,V}(u,v) = |\, J_h(u,v)\,| f_{X,Y}(h_1(u,v), h_2(u,v)),$$

missä $J_h(u,v)$ on kuvauksen h Jacobin determinantti eli derivaattamatrisiin determinantti

$$J_h(u,v) = \det\begin{pmatrix} \partial_u h_1(u,v) & \partial_v h_1(u,v) \\ \partial_u h_2(u,v) & \partial_v h_2(u,v) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9\cdot 9}(4\cdot 2 - (-1)\cdot 1) = \frac{1}{9}$$

Koska $f_{X,Y}$ tunnetaan jo ja tiedämme lausekkeet funktioille h_1 ja h_2, saamme eksplisiittisen esityksen yhteistiheysfunktiolle

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \tfrac{1}{9}\mathbf{1}\{\, 0 < h_1(u,v), h_2(u,v) < 1 \,\} \\ &= \tfrac{1}{9}\mathbf{1}\{\, 0 < 4u + v < 9, 0 < 2v - u < 9 \,\} \end{aligned}$$

Tästä havaitsemme jo, että (U,V) noudattaa tasajakaumaa tasoalueessa

$$B = \{\, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < 4u + v < 9, 0 < 2v - u < 9 \,\}$$

sillä se saa vakioarvon jossain joukossa B ja jos se ylipäätään on yhteistiheysfunktio, on tämän joukon B pinta-alan silloin oltava äärellinen ja nollasta eriävä. Tämä on seurausta muuttujanvaihtokaavasta. Jotta paremmin näkisimme, millainen joukko B on, niin kirjoitamme siinä esiintyvät 4 epäyhtälöä toisessa muodossa

$$\begin{cases} v > -4u \\ v < 9 - 4u \\ v > \frac{1}{2}u \\ v < \frac{9}{2} + \frac{1}{2}u \end{cases}$$

Nämä kuvaavat puolitasoja, joiden leikkaus on joukko B. Havaitsemme, että kyseessä on suunnikas, jonka kärkipisteiden koordinaatit ovat $(0,0)$, $(2,1)$, $(-1,4)$ ja $(1,5)$. Itse asiassa nämä ovat yksikköneliön kärkipisteiden kuvat lineaarisessa kuvauksessa g.

Voimme siten olla varmoja, että satunnaismuuttujan U reunatiheysfunktio on nolla, kun $u > 2$ ja $u < -1$. Kun $0 < u < 1$, niin kuvasta näemme, että $-4u < v < \frac{9}{2} + \frac{1}{2}u$. Siispä

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\mathrm{d}v = \int_{-4u}^{\frac{9}{2}+\frac{1}{2}u} \frac{1}{9}\mathrm{d}v = \frac{1}{9}(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}u + 4u) = \frac{1}{2}(1+u)$$

Kun $0 < u < 1$, niin kuvasta näemme, että $\frac{1}{2}u < v < \frac{9}{2} + \frac{1}{2}u$. Siispä

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\mathrm{d}v = \int_{\frac{1}{2}u}^{\frac{9}{2}+\frac{1}{2}u} \frac{1}{9}\mathrm{d}v = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

Kun $1 < u < 2$, niin kuvasta näemme, että $\frac{1}{2}u < v < 9 - 4u$. Siispä

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\mathrm{d}v = \int_{\frac{1}{2}u}^{9-4u} \tfrac{1}{9}\mathrm{d}v = \tfrac{1}{9}(9 - 4u - \tfrac{1}{2}u) = 1 - \tfrac{1}{2}u = \tfrac{1}{2}(2-u)$$

Kaiken kaikkiaan, satunnaismuuttujan U reunatiheysfunktio on paloittain määritelty

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+u), & \text{kun } \; -1 < u \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } \; 0 < u \leq 1 \\ \frac{1}{2}(2-u), & \text{kun } \; 1 < u < 2 \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Luonnollisesti nuo integroinnit olisi voinut päätellä kuvasta, sillä kuvasta näkee, että välillä $0 < u < 1$ etäisyys alarajasta ylärajaan ei muutu (joten f_U on tällöin jokin vakoi) ja se vähenee lineaarisesti nollaan kun u kasvaa luvusta 1 lukuun 2 ja vastaavasti kun u vähenee luvusta 0 lukuun -1. Tällöin f_U selviää kertovaa vakiota vaille ja tämän saa vaikka tehtävän 1a) mukaisella tavalla.

3. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia, joiden jakauman kuvaa hierarkinen malli

$$\begin{cases} X \mid (Y = y) \sim \mathrm{U}(y-4, 4y) \\ Y \sim \mathrm{U}(-1, 2) \end{cases}$$

a) Määrää mallin avulla, mikä on ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

b) Laske $\mathbb{E}X$.

c) Laske yhteistiheysfunktio $f_{X,Y}$.

Ratkaisu: **Ratkaisuehdotus:** Huomautus! Alla oleva ehdotus on hyvin seikkaperäinen kuvaus jokaisesta askeleesta. En luonnollisestikaan esitä, että tämä olisi *mallivastaus* vaan ainoastaan vastaus, jossa jokainen kohta on kirjoitettu näkyviin. Esimerkiksi kohdassa *a*) tehtäväannossa sanottiin, että riittää kertoa, mikä on ehdollinen odotusarvo ja myöhemmin c)-kohdassa ehdollinen tiheysfunktio, kun ehdollinen jakauma on annettu *suoraan.*

a) Kohdassa *a*) riittää lukea suoraan kysytyt tiedot. Tehtävänannon mukaan jokaisella $y \in \mathbb{R}$ on $X \mid (Y = y) \sim \mathrm{U}(y-4, 4y)$. Jos kiinnitämme y:n ja merkitsemme $Z \sim \mathrm{U}(y-4, 4y)$, niin satunnaismuuttujalla Z on siten sama jakauma kuin satunnaismuuttujalla X on ehdolla että $Y = y$. Tiedämme siis luentojen ja toivottavasti luntin tai muun vastaavan nojalla, että $\mathbb{E}Z = \frac{1}{2}(4y + y - 4) = \frac{5}{2}y - 2$. Tämän perusteella tiedämme, että satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo ehdolla $Y = y$ on

$$m(y) = \mathbb{E}(X \mid Y = y) = \tfrac{5}{2}y - 2.$$

Luentojen määritelmän mukaan satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo ehdolla satunnaismuuttuja Y on siten *satunnaismuuttuja* $m(Y)$, joka siis saadaan muunnoksena satunnaismuuttujasta Y, joka siis saadaan muunnoksena satunnaismuuttujasta Y. Kysytty ehdollinen odotusarvo on mallin mukaan siten

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \tfrac{5}{2}Y - 2.$$

b) Tässä kohdassa voidaan joko käyttää apuna c)-kohtaa ja tiedostamattoman tilastotieteilijän lakia tai sitten voimme laskea kysytyn odotusarvon iteroidun odotusarvon avulla. Luentojen mukaan

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\mathbb{E}(X \mid Y),$$

joten voimme a)-kohdan avulla laskea tämän sillä nyt

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(\tfrac{5}{2}Y - 2) = \tfrac{5}{2}\mathbb{E}Y - 2.$$

Edellisessä sijoitimme vain a)-kohdan ehdollisen odotusarvon iteroidun odotusarvon kaavaan :) Satunnaismuuttujan Y jakauma on annettu, joten sen odotusarvo voidaan laskea, ja siten saamme $\mathbb{E}X$:n laskettua.

$$\mathbb{E}X = \tfrac{5}{2}\mathbb{E}Y - 2 = \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{1}{2}(-1+2) - 2 = \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{1}{2} - 2 = \tfrac{5}{4} - \tfrac{8}{4} = -\tfrac{3}{4}.$$

c) Nyt tarvitsemme mallin antaman ehdollisen tiheyden satunnaismuuttujalle X ehdolla, että $Y = y$. Koska mallin mukaan tämä noudattaa tasajakaumaa, niin päättelemme

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x \mid y) &= \begin{cases} \frac{1}{4y-(y-4)}\mathbf{1}\{\, y-4 < x < 4y \,\}, & \text{kun} \quad f_Y(y) > 0 \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3y+4}\mathbf{1}\{\, y-4 < x < 4y \,\}, & \text{kun} \quad f_Y(y) > 0 \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases} \end{aligned}$$

Vastaavasti $Y \sim \mathrm{U}(-1,2)$, joten satunnaismuuttujan Y tiheydeksi saamme

$$f_Y(y) = \frac{1}{3}\mathbf{1}\{\, -1 < y < 2 \,\}.$$

Yhteistiheysfunktio saadaan näistä kertolaskusäännöllä

$$f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y) f_{X|Y}(x \mid y)$$

joten

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \tfrac{1}{3}\mathbf{1}\{\, -1 < y < 2 \,\} \cdot \frac{1}{3y+4}\mathbf{1}\{\, y-4 < x < 4y \,\} \\ &= \frac{1}{9y+12}\mathbf{1}\{\, -1 < y < 2, y-4 < x < 4y \,\}. \end{aligned}$$

Vaikka edellä olimme määritelleet ehdollisen tiheyden myös silloin kun $f_Y(y) = 0$, niin kertolaskusäännön tilanteessa voimme hyvin unohtaa kyseinen laajennos, sillä nolla kertaa nolla on nolla :)

4. Olkoon $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ ja $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ riippumattomia multinormaalijakautuneita satunnaisvektoreita, $\mathbb{E}\mathbf{X} = \mathbb{E}\mathbf{Y} = (0,0)$ ja

$$\operatorname{Cov}\mathbf{X} = \operatorname{Cov}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Olkoon $\mathbf{Z} = (X_1 + 3, 3Y_1 - Y_2 + X_2, X_1 - 3X_2 + Y_1) = (Z_1, Z_2, Z_3)$.

a) Määrää satunnaisvektorin $\mathbf{Z}$ jakauma.

b) Ovatko Z_1 ja Z_3 riippumattomia? Perustele lyhyesti.

Ratkaisu: **Ratkaisuehdotus:** Huomautus! Alla oleva ehdotus on hyvin seikkaperäinen kuvaus jokaisesta askeleesta. En luonnollisestikaan esitä, että tämä olisi *mallivastaus* vaan ainoastaan vastaus, jossa jokainen kohta on kirjoitettu näkyviin.

a) Kohdassa *a*) haluamme selvittää satunnaisvektorin $\mathbf{Z}$ jakauman. Huomaamme, että $\mathbf{Z}$ saadaan satunnaisvektoreista $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ affiinina muunnoksena, sillä

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_1 + 3 \\ 3Y_1 - Y_2 + X_2 \\ X_1 - 3X_2 + Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_1 - 3X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3Y_1 - Y_2 \\ Y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{b} = A\mathbf{X} + B\mathbf{Y} + \mathbf{b}\end{aligned}$$

kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tämä huomio tarkoittaa, että satunnaisvektori $\mathbf{Z}$ noudattaa multinormaalijakaumaa, kunhan satunnaisvektori $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ noudattaa multinormaalijakaumaa. Tehtävänannon mukaan sekä $\mathbf{X}$ että $\mathbf{Y}$ ovat multinormaalijakautuneita. Koska ne ovat myös riippumattomia, niin luentojen mukaan niiden yhteisjakauma on myös multinormaalijakauma. Luentojen mukaan tiedämme myös, että ilman riippumattomuusoletusta tätä emme pystyisi päättelemään (ainakaan annetuilla tiedoilla) :).

Kaikenkaikkiaan voimme siis todeta, että $\mathbf{Z}$ on affiini muunnos multinormaalijakautuneesta satunnaisvektorista $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, joten se on multinormaalijakautunut. Luentojen mukaan sen jakauman täydelliseksi kuvaamiseksi tarvitaan enää tietää satunnaisvektorin $\mathbf{Z}$ odotusarvovektori $\mathbb{E}\mathbf{Z}$ sekä kovarianssimatriisi $\operatorname{Cov}\mathbf{Z}$. Koska $\mathbb{E}\mathbf{X} = (0,0)$ ja $\mathbb{E}\mathbf{Y} = (0,0)$, niin

$$A\mathbb{E}\mathbf{X} + B\mathbb{E}\mathbf{Y} = (0,0,0),$$

joten

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(A\mathbf{X} + B\mathbf{Y} + \mathbf{b}) = A\mathbb{E}\mathbf{X} + B\mathbb{E}\mathbf{Y} + \mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kovarianssimatriisin $\operatorname{Cov}\mathbf{Z}$ laskemiseen käytämme luentojen tietoa $\operatorname{Cov}(A\mathbf{Z}) = A \operatorname{Cov}\mathbf{Z}A^\top$ sekä sitä, että riippumattomien satunnaisvektorien summan kovarianssimatriisi on niiden kovarianssimatriisien summa. Koska $\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}$, niin tiedämme, että $A\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp B\mathbf{Y}$. Edelleen vakiovektori $\mathbf{b} \perp\!\!\!\perp (A\mathbf{X} + B\mathbf{Y})$, joten

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}\mathbf{Z} &= \operatorname{Cov}(A\mathbf{X} + B\mathbf{Y} + \mathbf{b}) = \operatorname{Cov}(A\mathbf{X}) + \operatorname{Cov}(B\mathbf{Y}) + \operatorname{Cov}(\mathbf{b}) \\ &= A\operatorname{Cov}\mathbf{X}A^\top + B\operatorname{Cov}\mathbf{Y}B^\top\end{aligned}$$

Satunnaisvektorien X ja Y kovarianssimatriisit on tehtävänannon mukaan

$$\operatorname{Cov}\mathbf{X} = \operatorname{Cov}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Olemme siis määränneet kovarianssimatriisin $\operatorname{Cov} Z$ lähes täysin, sillä tiedämme myös matriisit A ja B sekä niiden transpoosit. Siispä jäljellä on muutama matriisikertolasku. Lasketaan ensin $A \operatorname{Cov} \mathbf{X} A^\top$:

$$\begin{aligned}
A \operatorname{Cov} \mathbf{X} A^\top &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -8 \\ 0 & -8 & 24 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi $B \operatorname{Cov} \mathbf{Y} B^\top$:

$$\begin{aligned}
B \operatorname{Cov} \mathbf{Y} B^\top &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Laskemalla saadut 3×3-matriisit yhteen saamme kovarianssimatriisin $\operatorname{Cov} \mathbf{Z}$ laskettua:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov} \mathbf{Z} = A \operatorname{Cov} \mathbf{X} A^\top + B \operatorname{Cov} \mathbf{Y} B^\top &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -8 \\ 0 & -8 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Olemme näin päätelleet, että $\mathbf{Z}$ on multinormaalijakautunut satunnaisvektori, jonka odotusarvovektori on $\mathbf{b}$ ja kovarianssimatriisi kuten yllä.

b) Kohdassa b) voimme nyt suoraan lukea a)-kohdassa määrätystä kovarianssimatriisista, että $\operatorname{cov}(Z_1, Z_3) = 0$ eli satunnaismuuttujat Z_1 ja Z_3 ovat korreloimattomia. Koska kohdan a) nojalla satunnaisvektori (Z_1, Z_3) on multinormaalijakautunut[3], niin luentojen mukaan $Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_3$.

Toinen tapa päätellä korreloimattomuus on laskea suoraan. Tämä oli myös esimerkki tilanteesta, missä molemmat satunnaismuuttujat Z_1 ja Z_2 riippuvat satunnaismuuttujasta X_1, joten näyttäisi että ne ovat riippuvia. Tässä X_1ja X_2 eivät ole korreloimattomia, mikä muuttaa tilanteen. Suoraan laskemalla havaitsee myös saman korreloimattomuuden

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(Z_1, Z_3) &= \operatorname{cov}(X_1 + 3, Z_3) + \operatorname{cov}(X_1, Z_3) + \operatorname{cov}(3, Z_3) = \operatorname{cov}(X_1, Z_3) \\
&= \operatorname{cov}(X_1, X_1) - 3 \operatorname{cov}(X_1, X_2) + \operatorname{cov}(X_1, Y_1) = 3 - 3 \cdot 1 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Tässä laskussa käytimme apuna satunnaismuuttujien kovarianssin bilineaarisuutta sekä sitä, että riippumattomat satunnaismuuttujat ovat korreloimattomia. Tätä tapaa käyttäen olisi myös voinut määrätä satunnaisvektorin $\mathbf{Z}$ kovarianssimatriisin, sillä

$$(\operatorname{Cov} \mathbf{Z})_{ij} = \operatorname{cov}(Z_i, Z_j)$$

[3]luentojen mukaan kaikki reunajakaumat ovat multinormaalijakautuneita, sillä kaikki reunasatunnaisvektorit saadaan lineaarisina muunnoksina alkuperäisestä satunnaisvektorista