

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali, kesä 2016
Harjoitus 5
Palautus ke 8.6. klo 16.00

Huom! Laitos on siirtynyt kesäaikaan, joten Exactum sulkeutuu arkisin jo klo **16.00**.

1. Osoita, että joukko $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, 0 \leq yx^2 < 1\}$ on mitallinen.

2. a) Olkoot funktiot $f_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mitallisia. Osoita, että joukko

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f_{n+1}(x) \geq f_n(x)\}$$

on mitallinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

b) Osoita, että joukko

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \text{lukujono } f_n(x) \text{ on kasvava}\}$$

on mitallinen.

3. Osoita, että funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jos } x \in \mathbb{Q}; \\ x^2, & \text{jos } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

on mitallinen.

4. Osoita, että mitallisten funktioiden $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ tulo fg on mitallinen.

5. Muista, että $\mathcal{F}_\sigma = \{\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i : F_i \subset \mathbb{R}^n \text{ suljettu kaikilla } i\}$. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jatkuva ja $A \subset \mathbb{R}^n$ suljettu. Osoita, että $fA \in \mathcal{F}_\sigma$. (Vihje: muista mitä kompaktius tarkoittaa \mathbb{R}^n :ssä)

6. Etsi funktion $2\chi_{[0,3]} + 5\chi_{[1,6]} + 3\chi_{\mathbb{Q}}$ normaaliesitys ja laske sen integraali. (Vihje: muista lause 2.25.)