

Mitta ja Integraali

kevät 2015
muistilista

1. $A \subset \mathbb{R}^n$ \mathbb{R}^n :n Lebesgue:n ulkomitta A :sta on $m_n^*(A) := \inf\{\mathcal{S}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Lebesgue:n peite}\}$.
2. \mathcal{F} on A :n Lebesgue:n peite jos se on numeroituva perhe avoimia n -välejä, siten että

$$A \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I.$$

3. $\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \sum_{I \in \mathcal{F}} l(I)$, missä $l((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$.
4. Ulkomitalla on seuraavat ominaisuudet

(a) $m^*(\emptyset) = 0$

(b) Jos $A \subset B$ niin $m^*(A) \leq m^*(B)$.

(c)

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^n A_n\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

5. Caratheodoryn ehto: $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos $\forall A \subset \mathbb{R}^n$

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

mikä on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

6. Vektoriarvoinen funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on mitallinen jos jokaisen avoimen joukon $G \subset \mathbb{R}^m$ alkukuva

$$f^{-1}(G) := \{x : f(x) \in G\} \text{ on mitallinen.}$$

7. Funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($:= \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$) on mitallinen jos jokaisen avoimen joukon $G \subset \mathbb{R}$ alkukuva $f^{-1}(G)$ on mitallinen, ja $f^{-1}(\{-\infty\})$ ja $f^{-1}(\{\infty\})$ ovat mitallisia.

8. Funktion mitallisuus on yhtäpitävä seuraavien ehtojen kanssa

(a) $\forall a \in \mathbb{R} f^{-1}([-\infty, a])$ on mitallinen;

(b) $\forall a \in \mathbb{R} f^{-1}([-\infty, a])$ on mitallinen

(c) $\forall a \in \mathbb{R} f^{-1}([a, \infty])$ on mitallinen

(d) $\forall a \in \mathbb{R} f^{-1}(]a, \infty])$ on mitallinen

9. Sanotaan että ominaisuus $P(x)$ pätee melkein kaikille (m.k.) $x \in E$ jos on olemassa $E' \subset E$ siten, että $m(E \setminus E') = 0$ ja kaikille $x \in E'$ pätee ominaisuus $P(x)$.
10. Funktio $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on yksinkertainen jos sillä on esitys $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$, missä $0 \leq a_i < \infty$ ja joukot A_i mitallisia.
11. Yksinkertaisen funktion $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ integraali on

$$I(f) := \sum_{i=1}^k a_i m(A_i) \quad I(f, E) := I(f \chi_E).$$

12. Olkoon $f \geq 0$ mitallinen funktio. Tällöin on olemassa kasvava jono yksinkertaisia funktioita $\phi_i \nearrow f$.
13. Jos $f \geq 0$ on mitallinen, niin sen Lebesgue integraali määritellään seuraavasti:

$$\int f := \sup\{I(\phi) : \phi \leq f, \phi \text{ yksinkertainen}\} \quad \int_E f := \int f \chi_E.$$

14. Olkoon $f : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$. $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ ja $f^-(x) := -\min\{0, f(x)\}$. $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. f on integroitava yli $E \subset A$ jos se on mitallinen ja $\int_E f^+ < \infty$ ja $\int_E f^- < \infty$. Tällöin

$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

15. f on integroitava yli E jos ja vain jos se on mitallinen ja $\int_E |f| < \infty$.
16. Konvergenssilauseet:

(a) MKL: olkoot $f_i : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$, $0 \leq f_i \leq f_{i+1}$ mitallisia. Tällöin

$$\int_E \lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i$$

(b) Fatou: olkoot $f_i : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$, $0 \leq f_i$ mitallisia. Tällöin

$$\int_E \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i$$

(c) DKL: olkoot $f_i : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia ja $\exists \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)$ m.k. x . Jos löytyy integroitava $g : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$ siten, että $|f_i| \leq g$ kaikilla i , niin pätee

$$\int_E \lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i.$$