

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kombinatoriikka
Erilliskoe 21.9.2016
Koeaika: 3 t 30 min (5 tehtävää)

Kokeessa saa olla mukana kaksipuolinen A4-kokoinen käsinkirjoitettu muistilappu, muttei laskinta.

Muistutus merkinnöistä: luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ sekä $[n] = \{1, \dots, n\}$ kun $n \in \mathbb{N}^*$. Joukon A alkioiden lukumäärä on $|A|$. Binomikertoimet ovat $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Joukon X relaatio R on mikä tahansa osajoukko $R \subset X \times X$. Jos $B \subset X$ on osajoukko, niin asetetaan $R(B) = \{y \in X : bRy \text{ jollakin } b \in B\}$.

1. Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja. Näytä, että

$$|A \setminus B| - |B \setminus A| = |A| - |B|.$$

2. (a) Olkoon R joukon X relaatio. Näytä, että kaikilla osajoukoilla $A, B \subset X$ on voimassa

$$R(B) \setminus R(A) \subset R(B \setminus A).$$

(b) Etsi esimerkki aidosta sisältyvyydestä (a)-osassa kun $X = [2]$, ts. etsi joukon $[2]$ relaatio R ja osajoukot $A, B \subset [2]$ joille

$$R(B) \setminus R(A) \neq R(B \setminus A).$$

3. Laske summa- ja erotusperiaatteen avulla, kuinka moni luvuista $n \in [180]$ on jaollinen jollakin luvuista 2, 3, 5?

4. Näytä kombinatorisen argumentin avulla, että

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}^*$. *Ohje:* Laskettaessa n -alkioisten osajoukkojen lukumäärää joukossa $[2n]$, mieti mikä on vasemmanpuoleisen summalausekkeen tulkinta erillisen yhdisteen $[2n] = A \cup B$ suhteen, missä $A = [n]$ ja $B = \{n+1, \dots, 2n\}$.

KÄÄNNÄ !

5. Rekursiivinen lukujono $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on määritelty ehdoilla

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad \text{kun } n \geq 0,$$

sekä $a_0 = 2$ ja $a_1 = 1$. Etsi lukujonolle (a_n) yleinen kaava yrittäen $a_n = r^n$ avulla.