

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Kombinatoriikka  
Erilliskoe 11.8.2016  
Koeaika: 3 t 30 min (5 koetehtävää)

Kokeessa saa olla mukana kaksipuolinen A4-kokoinen käsinkirjoitettu muistilappu, muttei laskinta.

Muistutus merkinnöistä: luonnolliset luvut  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$  sekä  $[n] = \{1, \dots, n\}$  kun  $n \in \mathbb{N}^*$ . Joukon  $A$  alkioden lukumäärä on  $|A|$ . Binomikertoimet ovat  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

1. Olkoot  $A, B$  ja  $C$  annettuja joukkoja.

- (i) Määrää  $|A \cup B|$  kun  $|A| = 100$ ,  $|B| = 40$  ja  $|A \cap B| = 30$ .
- (ii) Määrää  $|A \cap B \cap C|$  kun

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= 10, & |A| &= 4, & |B| &= 5, & |C| &= 6 \\ |A \cap B| &= 1, & |A \cap C| &= 2, & |B \cap C| &= 2. \end{aligned}$$

2. Olkoon  $X = [6]$ . Joukon  $X$  relaatio  $R$  on mikä tahansa osajoukko  $R \subset X \times X$ . Relaatio  $R \subset X \times X$  on *symmetrinen* jos  $(x, y) \in R$  jos ja vain jos  $(y, x) \in R$ .

- (i) Määrää kuinka monta *eri* relaatiota  $R \subset X \times X$  on olemassa.
- (ii) Määrää kuinka monta *eri symmetristä* relaatiota  $R \subset X \times X$  on olemassa.

Perustele vastauksesi!

3. Näytä, että luku  $\binom{2n}{n}$  on parillinen jokaisella  $n \in \mathbb{N}^*$ . (Muistutus: Pascalin kaava on hyödyllinen.)

4. Johda yhtälö

$$\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n \cdot \binom{n}{2} + n^3, \quad n \geq 3,$$

kombinatorisen argumentin avulla, joka ei nojaudu binomikertoimien  $\binom{n}{k}$  kaavaan. (Ohje: Jos  $|X| = 3n$ , jaa  $X = A \cup B \cup C$  kolmeen erilliseen joukkoon, missä  $|A| = |B| = |C| = n$ . Mieti miten joukosta  $X$  valitaan 3-alkioisia osajoukkoja jaon  $X = A \cup B \cup C$  suhteen.)

KÄÄNNÄ !

5. Rekursiivinen lukujono  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on määritelty ehdoilla

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n, \quad \text{kun } n \geq 0,$$

sekä  $a_0 = 0$  ja  $a_1 = 1$ . Etsi lukujonolle  $(a_n)$  yleinen kaava yrittäen  $a_n = r^n$  avulla.