

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kombinatoriikka
Kurssikoe 29.6.2016
Koeaika: 2 t 30 min

Muistutus merkinnöistä: luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ sekä $[n] = \{1, \dots, n\}$ kun $n \in \mathbb{N}^*$. Joukon A alkioden lukumäärä on $|A|$.

Kokeessa saa olla mukana kaksipuolinen A4-kokoinen käsinkirjoitettu muistilappu, muttei laskinta.

1. Tarkastellaan seitsemännumeroisia puhelinnumeroita $r_1 r_2 \dots r_7$, missä $r_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ kaikilla $j = 1, \dots, 7$.

(i) Kuinka monta tällaista eri puhelinnumeroa on olemassa?

(ii) Kuinka monessa puhelinnumerossa on eri numeroita, toisin sanoen, $r_i \neq r_j$ aina kun $i \neq j$?

2. Johda yhtälö

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2, \quad n \geq 2,$$

(i) lähtien binomikertoimien $\binom{n}{k}$ kaavasta (3 p.)

(ii) kombinatorisen argumentin avulla, joka nojautuu binomikertoimien $\binom{n}{k}$ määritelmään. (Ohje: Jos $|X| = 2n$, jaa $X = A \cup B$ kahteen erilliseen joukkoon, missä $|A| = n = |B|$. Mieti kuinka monella tavalla joukosta X voi valita 2-alkioisia osajoukkoja jaon $X = A \cup B$ suhteen.) (3 p.)

3. Laske summa- ja erotusperiaatteen avulla kuinka monella luvulla $n \in [850]$ ei ole ykköstä suurempia tekijöitä luvun 850 kanssa.

4. Rekursiivinen lukujono $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ määritellään ehdoilla

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \quad \text{kun } n \geq 0,$$

sekä $a_0 = 0$ ja $a_1 = 1$. Etsi lukujonolle (a_n) yleinen kaava.