

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kombinatoriikka
Harjoitus 5 (21.6-23.6.2016; viimeinen harjoitus)

Muistutuksia: $[n] = \{1, \dots, n\}$ kun $n \in \mathbb{N}^*$. Joukon $[n]$ epäjärjestys on permutaatio $f : [n] \rightarrow [n]$ jolle $f(j) \neq j$ kaikilla $j \in [n]$.

1. Olkoon a_n sellaisten n -jonojen (r_1, \dots, r_n) lukumäärä, että $r_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ kun $j \in [n]$ ja jonossa on parillinen määrä nollia. Näytä, että jono (a_n) toteuttaa rekursiivisen relaation

$$a_{n+1} = 8a_n + 10^n, \quad n \geq 1, \quad a_1 = 9.$$

2. Ratkaise yleinen 1. kertaluvun epähomogeeninen rekursioyhtälö

$$a_{n+1} = ba_n + c, \quad n \geq 0, \quad a_0 = d$$

induktiolla luvun n suhteen.

3. *Fibonacciin luvut* (f_n) toteuttavat rekursioyhtälön

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \geq 0, \quad f_0 = 0, f_1 = 1.$$

Näytä induktiolla luvun n suhteen että

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n, \quad n \geq 1.$$

4. Ratkaise lineaarinen rekursioyhtälö

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} + 6a_n, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 0, a_1 = 1.$$

5. Ratkaise lineaarinen rekursioyhtälö

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n, \quad n \geq 0,$$

kun $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ja $a_2 = 2$.

6*. Olkoon e_n joukon $[n]$ epäjärjestysten lukumäärä, kun $n \in \mathbb{N}^*$. Näytä, että palautuskaava

$$e_{n+1} = n(e_n + e_{n-1})$$

on voimassa kun $n \geq 1$. Ohje: olkoon $f : [n+1] \rightarrow [n+1]$ mielivaltainen epäjärjestys. Tällöin $k = f(n+1) \in [n]$. Tutki tapaukset $f(k) = n+1$ tai $f(k) \in [n]$ erikseen.

Kombinatoriikan kurssikoe järjestetään *keskiviikkona 29.6.* klo 12.15–14.45 salissa B123. Kombinatoriikan kurssin voi myös tenttiä kesätentissä torstaina 11.8. klo 10–14. Kesätenttiin täytyy ilmoittautua weboodissa.

Tentissä saa olla mukana kaksipuolinen A4-kokoinen käsinkirjoitettu muis-tilappu, muttei laskinta.