

Modaalilogiikka

Taneli Huuskonen

27. elokuuta 2015

1 Johdanto

Klassinen logiikka on formaali tapa käsitellä muuttumattomia tosiasiaväitteitä ja niitä koskevaa päättelyä. Se ei tarjoa työkaluja ns. *modaliteettien*, kuten mahdollisuuden, tietämisen, uskomisen tai hyväksynnän käsittelyyn ilman ylimääräistä, itse logiikkaan sisältymätöntä koodausta. Erilaiset modaalilogiikat sallivat modaliteettien käsittelyn suoraan. Tällä kurssilla keskitytään *aleettiseen modaalilogiikkaan*, jonka perusmodaliteetit ovat välttämättömyys ja mahdollisuus. Monet muut modaliteetit voidaan intuitiivisesti tulkita näiden perusteella. Esimerkiksi *deonttisen logiikan* käsitteet velvollisuus ja hyväksyttävyyys voidaan ymmärtää moraalin, lain tai muiden sääntöjen mukaiseksi välttämättömyydeksi ja mahdollisuudeksi.

1.1 Alustavia esimerkkejä

Tarkastellaan johdatuksena täsmälliseen formaaliin muotoiluun seuraavaa esimerkkiä. Pienessä Anemodiksian tasavallassa valmistaudutaan vaaleihin. Valtaa tähän asti pitänyt puolue, Kansallinen Hajoomus, on hajoamassa sisäisiin ristiriitoihin, eikä se ole pystynyt edes asettamaan yhtään ehdokasta. Maan kolme muuta puoluetta ovat Vähemmistöliitto, Reunustapuolue ja Perussuolaiset. Vähemmistöliitto ajaa mitä erilaisimpien vähemmistöjen asiaa. Reunustapuolue pyrkii jakamaan maan keskiosaan kertynyttä vaurautta tasaisesti koko maahan. Perussuolaiset vastustaa julkisten edustusvarojen tuhlausta makeisiin leivonnaisiin ja erikoiseen naposteltavaan. Mikä tahansa näistä puolueista saattaa päästä yksinään muodostamaan hallituksen ailahtelevaisen kansan tuella. Ökyrikkaitakin edustava Vähemmistöliitto ei kykene hallitusyhteistyöhön Reunustapuolueen kanssa, mutta kumpi tahansa voi muodostaa kaksipuoluehallituksen Perussuolaisten kanssa.

Anemodiksian seuraavaa hallitusta koskevat mahdollisuudet voidaan siis tiivistää seuraavasti:

Pääministeri	Hallituspuolueet
Vähemmistöliitto	Vähemmistöliitto
	Vähemmistöliitto, Perussuolaiset
Perussuolaiset	Perussuolaiset
	Perussuolaiset, Vähemmistöliitto
	Perussuolaiset, Reunustapuolue
Reunustapuolue	Reunustapuolue
	Reunustapuolue, Perussuolaiset

Merkitään symbolilla p_V sitä, että pääministeri on Vähemmistöliitosta, ja symbolilla h_V sitä, että Vähemmistöliitto on mukana hallituksessa. Symboleilla p_P , p_R , h_P ja h_R on vastaavanlaiset merkitykset muille puolueille. Näillä merkinnöillä taulukko voidaan tiivistää seuraavanlaiseksi mahdollisuuksien luetteloksi:

- p_V, h_V
- p_V, h_V, h_P
- p_P, h_P
- p_P, h_P, h_V
- p_P, h_P, h_R
- p_R, h_R
- p_R, h_R, h_P

Poliittista tilannetta lainkaan tuntematta on helppo tarkistaa pelkän taulukon perusteella, että esimerkiksi seuraavat väitteet ovat tosia:

1. On mahdollista, että pääministeri on Vähemmistöliitosta ja etteivät Perussuolaiset pääse hallitukseen.
2. Ei ole mahdollista, että sekä Reunustapuolue että Vähemmistöliitto pääsevät hallitukseen.
3. On mahdollista mutta ei välttämätöntä, että sekä Perussuolaiset että Reunustapuolue pääsevät hallitukseen.

Mahdollisuutta merkitään modaalilogiikassa operaattorilla \diamond ja välttämättömyyttä operaattorilla \square . Muuten käytetään samoja merkintöjä kuin lauselogiikassa yleensä. Ylläolevat numeroidut väitteet voidaan siis esittää symbolisesti näin:

1. $\diamond(p_V \wedge \neg h_P)$
2. $\neg \diamond(h_R \wedge h_V)$
3. $\diamond(h_P \wedge h_R) \wedge \neg \square(h_P \wedge h_R)$

Huomaa, että vaaleja odottaessa mikään taulukossa esitetty mahdollisuus ei ole vielä toteutunut. Niinpä myös esimerkiksi väite $\neg p_V \wedge \diamond p_V$ on tosi: (Nykyinen) pääministeri ei ole Vähemmistöliitosta, mutta on mahdollista, että (tuleva) pääministeri on Vähemmistöliitosta. Hieman yllättävämpi piirre tässä mahdollisuuden ja välttämättömyyden tulkinnassa on se, että myös seuraava kaava on tosi:

$$\neg(p_V \vee p_P \vee p_R) \wedge \neg \diamond \neg(p_V \vee p_P \vee p_R).$$

On siis totta, ettei (nykyinen) pääministeri ole Vähemmistöliitosta, Perussuolaisista eikä Reunustapuolueesta, mutta on mahdotonta, ettei (tuleva) pääministeri olisi jostakin näistä puolueista. Tämä on esimerkki siitä, että modaalilogiikan sovelluksissa on joskus aiheita hylätä itsestään selviltä tuntuvia periaatteita, kuten se, että vallitseva tilanne on mahdollinen.

Yllä tarkasteltiin kaikkia mahdollisia lopputuloksia rinnakkain kiinnittämättä huomiota prosessiin. Toinen näkökulma asiaan saadaan, kun katsotaan, kuinka pääministerin valintaa koskevat mahdollisuudet vaikuttavat puolueiden hallitukseen pääsyn mahdollisuuksiin. Lähtötilanteessa on kolme vaihtoehtoa, joista tasan yksi toteutuu: pääministeri valitaan Vähemmistöliitosta, Perussuolaisista tai Reunustapuolueesta. Ensimmäinen vaihtoehto avaa kaksi mahdollisuutta hallituksen koostumukselle ja sulkee muut pois: hallituksessa saattaa olla Vähemmistöliitto yksin tai yhdessä Perussuolaisten kanssa. Vastaavaan tapaan muut pääministerivalinnat avaavat ja sulkevat pois vaihtoehtoja. Nyt voidaan puhua mahdollisista ja välttämättömistä mahdollisuuksista ja välttämättömyyksistä, esimerkiksi näin:

1. On välttämätöntä, että on mahdollista, että Perussuolaiset pääsevät hallitukseen.
2. Ei ole välttämätöntä, että on mahdollista, että Vähemmistöliitto pääsee hallitukseen.

3. On mahdollista, että on välttämätöntä, että Reunustapuolue pääsee hallitukseen.

Ensimmäisen väitteen voi tarkistaa toteamalla, että jokaista mahdollista pääministerivalintaa vastaa mahdollinen hallitus, jossa Perussuolaiset ovat mukana:

p_V	p_V, h_V
	$p_V, h_V, \underline{h_P}$
p_P	$p_P, \underline{h_P}$
	p_P, h_P, h_V
	p_P, h_P, h_R
p_R	p_R, h_R
	$p_R, h_R, \underline{h_P}$

Väitteet 2 ja 3 voidaan puolestaan havaita tosiksi siitä, että pääministerin valinta Reunustapuolueesta jättää avoimiksi ainoastaan sellaisia vaihtoehtoja, joissa Vähemmistöliitto ei ole hallituksessa mutta Reunustapuolue tietenkin on.

Tässä tarkastelutavassa on sama erikoisuus kuin edellisessä: nykytilannetta ei katsota mahdolliseksi tilanteeksi. Lisäksi saattaa vaikuttaa hämääväältä se, ettei lähtötilanteessa pidetä minkään puolueen pääsyä hallitukseen todellisena mahdollisuutena vaan pelkästään mahdollisena mahdollisuutena. Pätee siis $\diamond \diamond h_R$ mutta ei $\diamond h_R$.

Kolmas, ehkä parhaiten mahdollisuuden ja välttämättömyyden tavanomaista intuitiivista merkitystä vastaava näkökulma Anemodiksian politiikkaan saadaan jälkiviisaasta jossittelusta. Uusi hallitus on valittu, ja kansalaiset ruotivat sen toimia ja miettivät, mitä muita vaihtoehtoja olisi ollut tarjolla. Kaikki hallituskokoonpanot, joista yllä spekulointiin etukäteen, olisivat periaatteessa olleet mahdollisia riippumatta siitä, mikä vaihtoehto toteutui. Todellinen mahdollisuus, mahdollinen mahdollisuus ja välttämätön mahdollisuus sulautuvat samaksi käsitteeksi, ja vallitseva tilanne on aina yksi mahdollisista tilanteista. Tässä toteutuu siis periaate ”se, mikä on totta, on mahdollista”, toisin kuin edellä esitetyissä tarkastelutavoissa.

1.2 Yhteenveto

Kaikki edellä esitetyt esimerkit voi kuvailla seuraavien asioiden avulla:

1. Kaikkien tarkasteltavien tilanteiden joukko. Vakiintunut nimitys näille tilanteille on ”*mahdollinen maailma*”. (Ilmaus ei ole filosofinen kannanotto sen enempää kuin ”irrationaaliluku”.)

2. Tieto siitä, mikä maailma on mistäkin katsoen mahdollinen. Selvyyden vuoksi tästä käytetään ilmausta ”maailma v on saavutettavissa maailmasta w ”.
3. Tieto siitä, mitkä (propositiosymboleilla koodatut) atomiset propositiot ovat tosia missäkin maailmassa.

Ensimmäisessä esimerkissä mahdollisten maailmojen joukkoon kuuluu alkutilanne sekä jokainen mahdollinen hallituskokoonpano. Alkutilanteesta lähtien kaikki muut maailmat ovat saavutettavia, muista maailmoista lähtien saavutettavia maailmoja ei enää ole. Alkutilanteessa mikään tarkasteltava propositio ei ole tosi. Muissa mahdollisissa maailmoissa todet propositiot on esitetty taulukossa.

Toisessa esimerkissä on kaikki samat maailmat kuin ensimmäisessä sekä lisäksi mahdollista pääministerin puoluetta kuvaavat kolme maailmaa. Pelkkää pääministerin valintaa kuvaavat maailmat ovat saavutettavia lähtömaailmasta, ja jokaisesta näistä ovat taulukon mukaiset täydennykset saavutettavia. Valmista hallitusta kuvaavista maailmoista katsoen mitkään mahdollisuudet eivät enää ole avoimia eli mitkään maailmat eivät ole saavutettavissa. Toded propositiot ovat jälleen taulukon mukaiset.

Kolmannessa esimerkissä mahdollisia maailmoja ovat kaikki luetteloidut hallituskokoonpanot, siis kaikki ensimmäisen esimerkin mahdolliset maailmat lukuunottamatta alkutilannetta. Kaikki maailmat ovat saavutettavissa toisistaan. Propositioiden totuus on sama kuin ensimmäisessä esimerkissä.

Modaalilogiikan perusteoriassa mahdollisten maailmojen joukolle, saavutettavuudelle ja propositioiden totuudelle asetetaan vain se rajoitus, että mahdollisten maailmojen joukon on oltava epätyhjä. Tämä sallivuus johtaa joskus siihen, että jokin selvästi intuition vastainen väite on teknisesti tosi, kuten esimerkeissä nähtiin. Monissa modaalilogiikoissa rajoitetaankin erityisesti saavutettavuusrelaatiota tavoilla, jotka sulkevat pois outoja tapauksia. Jos vaikkapa vaaditaan, että jokaisen mahdollisen maailman on oltava saavutettavissa itsestään, päästään eroon siitä, että väite voi olla samalla kertaa tosi ja mahdoton.