

Modaalilogiikka, harjoitus 2 (16.9.2015)

Taneli Huuskonen

Tehtävissä ”kurssiteksti” viittaa luennoitsijan laatimaan materiaaliin, joka löytyy kurssin kotisivulta, ei oppikirjaan.

1. Olkoot $M = \langle W, R, P \rangle$ K -malli ja C_1, \dots, C_k kaavoja. Olkoon $M' = \langle W, R, P' \rangle$, missä

$$P'(p_i) = \begin{cases} \|C_i\|^M, & \text{jos } i \in \{1, \dots, k\}, \\ P(p_i), & \text{muuten.} \end{cases}$$

Osoita, että jokaiselle kaavalle A pätee

$$\|A\|^{M'} = \|A[\bar{p}/\bar{C}]\|^M,$$

missä $A[\bar{p}/\bar{C}]$ merkitsee kaavaa $A[p_1/C_1, \dots, p_k/C_k]$. (Vihje: Induktio kaavan A rakenteen suhteen.)

2. Olkoot A_1, \dots, A_n sekä B sellaiset kaavat, että päättelysääntö

$$\frac{A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n}{B}$$

säilyttää validisuuden (siis jokaiselle K -mallille M pätee, että jos kaavat A_1, \dots, A_n ovat valideja mallissa M , niin myös B on validi mallissa M). Osoita, että jos A_1, \dots, A_n ovat K -valideja, niin myös B on K -validi.

3. Olkoon

$$\frac{A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n}{B}$$

päättelysääntö, joka säilyttää validisuuden, ja olkoot C_1, \dots, C_k kaavoja. Osoita, että päättelysääntö

$$\frac{A_1[\bar{p}/\bar{C}] \quad A_2[\bar{p}/\bar{C}] \quad \dots \quad A_n[\bar{p}/\bar{C}]}{B[\bar{p}/\bar{C}]}$$

säilyttää validisuuden. Voit pitää edellisen tehtävän tulosta tunnettuna.

4. Osoita, että seuraava sääntö säilyttää validisuuden:

$$(RE) \quad \frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$$

(Vihje: Kurssitekstin lause 2.23 voi olla hyödyllinen.)

5. Osoita, että päättelysääntö

$$\frac{A}{\Diamond A}$$

ei säilytä validisuutta. (Vihje: Voit soveltaa harjoituksen 1 tehtävän 5 tulosta.)

6. (a) Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ sellainen K -malli, että jokaisella $w \in W$ on jokin sellainen $w' \in W$, että wRw' , ja olkoon A sellainen kaava, että $M \models A$. Osoita, että $M \models \Diamond A$.
- (b) Osoita vastaesimerkillä, ettei kaava $p_1 \rightarrow \Diamond p_1$ ole validi kaikissa K -malleissa, jotka toteuttavat (a)-kohdan ehdon.