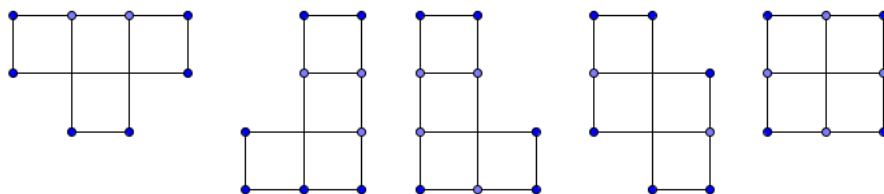


## KOMBINATORIIKAN KURSSIN TOISET LASKUHARJOITUKSET

Yhden tähden  $\star$  tehtävät käydään läpi laskareissa, kahden tähden  $\star\star$  tehtävä palautetaan vertaisarvioitavaksi Moodleen.

- (1)  $\star$  Kuinka moni korkeintaan luvun 140 suuruisista luvuista on jaollinen ainakin jollakin luvuista 2, 5, 7?
- (2) Tsekkiläisessä tutkimusinstituutissa on 67 jäsentä. Heistä 47 puhuu englantia, 35 saksaa ja 20 ranskaa. Lisäksi tiedetään, että heistä 23 puhuu sekä englantia että saksaa, 12 englantia ja ranskaa ja 11 saksaa ja ranskaa. Viiden tiedetään puhuvan kaikkia kolmea kieltä. Kuinka moni ei puhu mitään näistä kielistä?
- (3) Kuinka monta epäjärjestystä on viiden alkion jonolla?
- (4)  $\star$  Joukossa  $A$  on  $a$  alkiota ja joukossa  $B$  on  $b$  alkiota. Tiedetään, että  $a \geq b$ . Kuinka monta surjektiota on joukolta  $A$  joukolle  $B$ ?
- (5)  $\star\star$  Kirjapainossa laitetaan kannet 12 kirjalle. Mahdolliset kansivärit ovat sininen, punainen ja ruskea. Kuinka monella tavalla kirjojen kansivärit voidaan valita, jos vaaditaan, että jokainen väri on käytössä vähintään kerran?
- (6)  $\star$  Kuinka monella tavalla voidaan järjestää sanan *TERAKOTA* kirjaimet, jos vaaditaan, että mitkään kaksi samaa kirjainta ( $A$ -kirjaimet ja  $T$ -kirjaimet) eivät ole peräkkäin? (Kaksi järjestystä on samat, jos ne muodostavat saman sanan, vaikka niissä näennäisesti olisikin esimerkiksi  $A$ -kirjaimet vaihdettu keskenään.)
- (7) (a) Kuinka monta erilaista sanaa voidaan muodostaa kirjaimista  $AABCD$ ? (Huom! Sanojen ei tarvitse kuulua mihinkään luonnolliseen kieleen, eri selvitetään vain erilaisten järjestysten määrää.)  
(b) Kuinka monessa näistä sanoista ei kumpikaan  $A$ -kirjaimista ole alkuperäisellä paikallaan?
- (8) Jatketaan vielä edellisen tehtävän sanojen parissa.  
(a) Kuinka monessa molemmat  $A$ -kirjaimet ovat  $A$ -kirjainten alkuperäisillä paikoilla  
(b) Kuinka monessa tasan yksi  $A$ -kirjain on sellaisella paikalla, jolla alunperinkin oli  $A$ -kirjain?
- (9)  $\star$  Käsitellään vielä yhden tehtävän verran edellisten tehtävien sanoja. Kuinka monessa sanassa ei yksikään kirjain ole alkuperäisellä paikallaan? ( $A$ -kirjaimet ovat keskenään samanlaisia, eli tämä ehto tarkoittaa sitä, että kumpikaan kahdesta ensimmäisestä kirjaimesta ei voi olla  $A$ .)
- (10)  $\star$  Osoita, että  $10 \times 10$ -lautaa ei voida peittää  $1 \times 4$ -palikoilla.
- (11)  $\star$  Suorakulmion muotoinen lattia on peitetty  $2 \times 2$ -laatoilla ja  $1 \times 4$ -laatoilla. Varastossa on jäljellä vielä yksi  $1 \times 4$ -laatta. Valitettavasti syystä tai toisesta yksi lattian  $2 \times 2$ -laatta menee rikki. Osoita, että lattia ei ole korjattavissa varastossa olevalla varapalikalla, vaikka kuinka yritettäisiin uudelleenjärjestää.
- (12) Onko mahdollista peittää  $4 \times 5$ -suorakulmio seuraavilla viidellä palikalla?



- (13) Osoita, että  $8 \times 8$ -lautaa ei voida peittää 15 T-palikkalla ja yhdellä neliöpalikkalla. (T-palikka on edellisen kuvan ensimmäinen palikka ja neliöpalikka viimeinen.)
- (14) Huoneessa on 17 ihmistä. Nämä tervehtivät toisiaan seuraavasti: Osa mahdollisesti kättelee, osa mahdollisesti kumartaa toisilleen, ja osa mahdollisesti jättää tervehtimättä. Tervehdys, kuten myös sen tekemättä jättäminen on kaksipuoleista: joko kaksi henkilöä tervehtii toisiaan samoin (eli molemmat kättelevät tai molemmat kumartavat) tai jättää tervehtimättä. Ketkään kaksi eivät myöskään tervehdi toisiaan yli yhtä kertaa. Osoita, että huoneesta löytyy kolmen hengen joukko, niin, että kaikki joukon jäsenet ovat tervehtineet toisiaan samoin tai jättäneet tervehtimättä.