

KOMBINATORIIKAN KURSSIN NELJÄNNET LASKUHARJOITUKSET

Tehtävät, jotka on merkitty tähdellä \star käydään läpi laskuharjoituksissa. Tehtävä, joka on merkitty kahdella tähdellä $\star\star$ palautetaan Moodlessa vertaisarvioitavaksi. Tehtävät, jotka on merkitty ristillä \dagger ovat hankalia (tai ainakin niiden on tarkoitus olla). Niitä tekemällä voi hankkia lisäpisteitä (1 piste/tehtävä), mutta näin hankittuja lisäpisteitä ei voi hyödyntää vertaisarviointitehtävien tai vertaisarvioinnin kompensointiin. Niiden malliratkaisuja voi pyytää luennoitsijalta. Mitä useampi risti, sitä hankalampi tehtävä (vertaa sienikirja).

Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

- (1) \star Etsi osamurtokehitemmä funktiolle $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$.
- (2) \star Millaisen jonon generoiva funktio on $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$?
- (3) Etsi generoivan funktion suljettu muoto jonolle $a_n = n + 1$.
- (4) \star Etsi generoivan funktion suljettu muoto jonolle $a_n = n^2$.
- (5) Etsi generoivan funktion suljettu muoto jonolle $a_n = (n + 1)^2$.
- (6) Fibonaccin lukujono toteuttaa ehdot $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Etsi sen generoivan funktion suljettu muoto (voit vedota kappaleen Rekursioon nojautuminen kaavaan).
- (7) \star Jono on annettu kaavalla $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ ja $a_0 = 0$ ja $a_1 = 1$. Etsi sen generoivan funktion suljettu muoto vetoamatta kappaleen Rekursioon nojautuminen kaavaan. Kappaleen menetelmä on vapaata riistaa, eli sitä voi tässä käyttää.
- (8) Osoita, että binomikertoimien $\binom{n+k-1}{k}$ muodostaman jonon generoiva funktio on $(1-x)^{-n}$.
- (9) \star Olkoon $a_0 = 0$, $a_1 = 6$ ja $a_n = -3a_{n-1} + 10a_{n-2} + 3 \cdot 2^n$, kun $n \geq 2$. Määritä generoiva funktio.
- (10) \star Jatketaan edellisen tehtävän parissa. Määritä generoivan funktion avulla jonon jäsenten lausekkeet.
- (11) $\star\star$ Sievennä $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 31x^{30}$.
- (12) Todista

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2.$$

- (13) (Kertaus) Kuinka monella tavalla voi viisi naista ja viisi miestä istua pyöreään pöydän ympärillä niin, että ketkään kaksi samaa sukupuolta olevat eivät istu vierekkäin?
- (14) (Kertaus) Yksikköneliön sisältä on annettu yhdeksän pistettä. Osoita, että jotkin kolme niistä ovat sellaisen kolmion kärjet, jonka ala on enintään $\frac{1}{8}$.
- (15) (Kertaus) Kuinka monta sellaista anagrammia voidaan muodostaa sanasta BARBAR, että mitkään kaksi samaa kirjainta eivät ole peräkkäin?
- (16) \dagger Laske $2 \cdot 2^1 + 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2^3 + \dots + n(n+1)2^n$.

- (17) † Onko mahdollista peittää 20×20 -shakkilautaa neljällä 1×1 -ruudukolla, kahdeksalla 2×2 -ruudukolla, kahdellatoista 3×3 -ruudukolla ja kuudellatoista 4×4 -ruudukolla?
- (18) † Kuinka monta sellaista joukon $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ alkioiden järjestystä on olemassa, että millekään $i = 1, 2, \dots, n - 1$ alkio a_{i+1} ei ole välittömästi alkion a_i jälkeen, ja että alkio a_1 ei välittömästi seuraa alkioita a_n ?