

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan, kevät 2015
Harjoitus 8

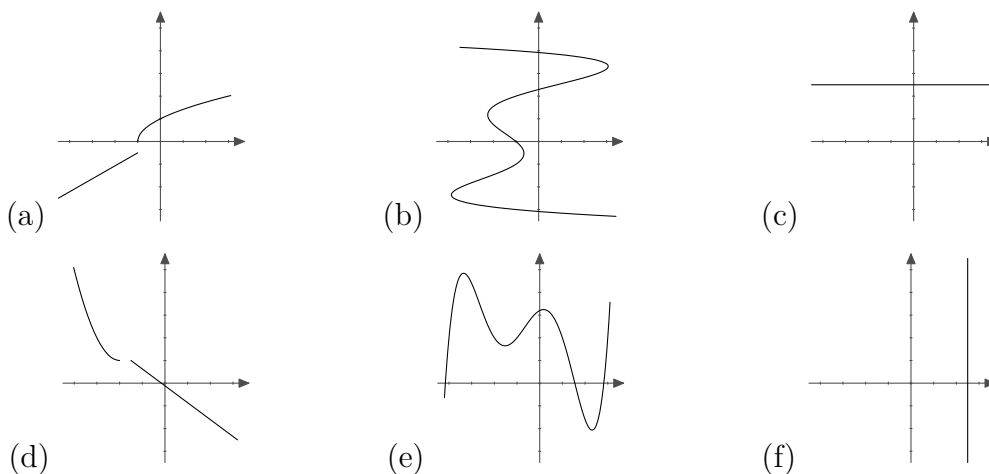
Ratkaisut palautettava viimeistään ti 24.3.2015 klo 19.30
 Korjaukset palautettava viimeistään ti 14.4.2015 klo 19.30

★ *Muista, että saat halutessasi henkilökohtaista ohjausta tehtävien tekemiseen salissa C323! Ohjausajat löytyvät osoitteesta wiki.helsinki.fi/display/mathstat/Kurssit/Aukioloajat*

Tehtäväsarja I

Seuraavat tehtävät liittyvät kuvauksen käsitteeseen (luentokalvot 81-90).

1. Perustele, mitkä alla olevista koordinaatistoon piirretyistä kuvioista määrittelevät kuvauksen $[-4, 3] \rightarrow \mathbb{R}$.



2. Olkoon $X = \{0, 1, 2\}$. Ovatko seuraavat säännöt kuvauksia?

- (a) $f : X \rightarrow X, f(n) = n^2 + n(-1)^{n+1}$
 (b) $g : X \rightarrow X, x \mapsto 3$
 (c) $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1+x}{1-x}$
 (d) $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[, x \mapsto x^2 - 2x$.

3. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $b \neq 0$. Ovatko seuraavat säännöt kuvauksia $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$?

- (a) $\frac{a}{b} \mapsto \frac{a-b}{a+b}$ (b) $\frac{a}{b} \mapsto 1$ (c) $\frac{a}{b} \mapsto \frac{a^2+b}{b^2}$.

Tehtäväsarja II

Seuraavat tehtävät liittyvät kuvan ja alkukuvan käsitteisiin (luentokalvot 91-108).

4. Olkoon $X = \{3, 6, \{3, 6\}\}$ ja $Y = \{0, 3, 6, 9\}$. Määritellään sääntö f asettamalla

$$3 \mapsto 6, \quad 6 \mapsto 9 \quad \text{ja} \quad \{3, 6\} \mapsto 0.$$

- (a) Perustele, että f on kuvaus $X \rightarrow Y$.
 (b) Merkitään $A = \{3, 6\}$. Määritä $f(A)$, fA sekä $f^{-1}A$ ja nimeä nämä käsitteet.

★ 5. Tarkastellaan kuvausta $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, jolle $z \mapsto z^2 + 2$. Merkitään $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Määritä

- (a) fA (b) fB (c) $f^{-1}A$ (d) $f^{-1}B$.

6. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaus, jolle $f(x) = 2x - 4$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Merkitään $U = [1, 3]$.

- (a) Määritä fU . Piirrä koordinaatistoon funktion f kuvaaja sekä joukot U ja fU .
 (b) Määritä $f^{-1}U$. Piirrä koordinaatistoon funktion f kuvaaja sekä U ja $f^{-1}U$.

Tehtäväsarja III

Seuraavissa tehtävissä oletetaan, että $f: X \rightarrow Y$ on kuvaus, $A, B \subset X$ ja $V, W \subset Y$. Kannattaa tutustua luentokalvojen 109-116 esimerkkeihin.

7. (a) Osoita, että $f[A \cap B] \subset fA \cap fB$.
 (b) Osoita vastaesimerkillä, että inklusio toiseen suuntaan ei päde yleisesti.

★ 8. Todista tai kumoa seuraava väite: $f^{-1}[V \cup W] = f^{-1}V \cup f^{-1}W$.

Tehtäväsarja IV

Seuraavassa tehtävässä harjoitellaan II induktioperiaatteen käyttöä. Luentokalvoista 117-122 voi olla apua.

9. Määritellään jono kokonaislukuja a_0, a_1, a_2, \dots rekursiivisesti asettamalla $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ ja $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, kun $n \geq 1$. Osoita II induktioperiaatetta käyttäen, että $a_n = n + 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Kompleksiluvut

10. Osoita, että $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ ja $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ kaikilla $\theta \in \mathbb{R}$.

11. Merkitään $z_1 = 4e^{i\pi}$, $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ja $z_3 = -6e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Määritä seuraavien kompleksilukujen itseisarvo, vaihekulma, reaali- ja imaginaariosa:

$$(i) \quad z_1 z_2 \quad (ii) \quad \frac{z_1}{z_2} \quad (iii) \quad z_3 \quad (iv) \quad \frac{z_2 z_3}{z_1}$$

12. Määritä luvun z itseisarvo, vaihekulma, reaali- ja imaginaariosa, jos

$$(a) \quad z = (1 - i\sqrt{3})^{14} \quad (b) \quad z = (1 + i)^3 (\sqrt{3} - i)^2 (2\sqrt{2} + i2\sqrt{6})^{-1}.$$

Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

13. Määritä seuraavat logaritmit tai niiden likiarvot jakolaskun avulla:

$$(i) \quad \log_2 16 \quad (ii) \quad \log_2 80 \quad (iii) \quad \log_{100} 1 \quad (iv) \quad \log_3 600$$

14. Ratkaise seuraavat yhtälöt logaritmin määritelmän avulla:

$$(i) \quad \log_2(x) = 5 \quad (ii) \quad \log_2(x) = 2,5 \quad (iii) \quad 2^x = 16 \quad (iv) \quad 2^{x-1} = 100$$

15. Oletetaan, että $a \in \mathbb{R}$ ja $a > 1$. Päättele, miten paljon luvun a 2-kantainen logaritmi kasvaa, jos luku itse

- (a) kasvaa 8-kertaiseksi
- (b) kasvaa 512-kertaiseksi
- (c) korotetaan potenssiin 4
- (d) korotetaan potenssiin 16

Vihje: esimerkiksi a-kohdassa on tarkoitus vertailla lukuja $\log_2(a)$ ja $\log_2(8a)$.