

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan, kevät 2015
Harjoitus 7

Ratkaisut palautettava viimeistään ti 17.3.2015 klo 19.30
Korjaukset palautettava viimeistään ti 31.3.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Merkitään $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Ovatko seuraavat säännöt kuvauksia?

(a) $f: X \rightarrow X, f(x) = 4$ (b) $g: X \rightarrow X, g(x) = x + 1$

(c) $h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, h\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b-a}{b^2+a^2}$ (d) $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tau(x) = \frac{2}{x}$.

2. Olkoon $X = \{1, 2, 3\}$. Mitkä seuraavista kuvauksista ovat samoja?

$f_1: X \rightarrow \mathbb{R}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto \frac{1}{4}, 3 \mapsto \frac{1}{9}$ $f_2: X \rightarrow \mathbb{Q}, f_2(x) = \frac{1}{x^2}$

$f_3: X \rightarrow \mathbb{Q}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto \frac{1}{4}, 3 \mapsto \frac{1}{9}$ $f_4: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}, f_4(x) = \frac{1}{x^2}$

$f_5: X \rightarrow \mathbb{Q}, f_5(x) = \frac{2}{2x^3 - 10x^2 + 22x - 12}$.

3. (a) Mitä eroa on kuvauksilla $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4x^2 - x$ ja $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4x^2 - x$ vai ovatko ne sama kuvaus?

(b) Valitse sellaiset lähtö X ja maali Y , että sääntö $x \mapsto \frac{7x}{2x^2-x-3}$ on kuvaus $X \rightarrow Y$.

4. Olkoon $X = \{2, 9\}$. Muodosta kaikki mahdolliset kuvaukset $X \rightarrow X$.

★ 5. Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$. Olkoon $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ kuvaus, jolle $f(X) = A \setminus X$. Määritä

(a) $f(\{1\})$ (b) $f(\{2, 3\})$ (c) $f(A)$ (d) $f(\emptyset)$.

Tehtäväsarja II

Seuraavissa tehtävissä kerrataan joukko-opillisten väitteiden todistamista ja kumoamista. Tehtävissä 6–9 oletetaan, että A, B ja C ovat joukkoja.

6. Osoita, että

$$A \cap C = B \cap C \text{ jos ja vain jos } (A \Delta B) \cap C = \emptyset.$$

Muistutus: joukkojen A ja B symmetrinen erotus määriteltiin seuraavasti: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

7. Osoita, että $A \cup C \subset B \cup C$, jos ja vain jos $A \setminus C \subset B \setminus C$.

8. Tarkastellaan yhtälöä $A \cup (B \times C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

- (a) Onko tämä yhtälö aina tosi?
(b) Onko tämä yhtälö aina epätosi?

9. Tarkastellaan yhtälöä $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

- (a) Onko tämä yhtälö aina tosi?
(b) Onko tämä yhtälö aina epätosi?

Kompleksiluvut

- ★ 10. Kompleksiluvun $z \neq 0$ negatiivinen eksponentti määritellään kuten reaaliluvuille:
 $z^{-n} = (z^n)^{-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todista De Moivrén kaava: Olkoon $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ ja ϕ luvun z vaihekulma. Tällöin

$$z^n = |z|^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Vihje: induktio ja lauseen 11 a ja c-kohta.

11. Olkoon $z = \cos \phi + i \sin \phi$, missä ϕ on jokin reaaliluku.
- (a) Laske $z^2 = (\cos \phi + i \sin \phi)^2$ kertomalla sulut auki.
- (b) Kirjoita kompleksiluku z^4 kahdella tavalla: De Moivrén kaavan avulla ja toisaalta kertomalla sulut auki. Tässä a-kohdasta on apua, sillä $z^4 = z^2 \cdot z^2$. Päättele näistä esityksistä kosinin ja sinin nelinkertaisen kulmien kaavat; ts. päättele miten $\cos 4\phi$ ja $\sin 4\phi$ voidaan ilmaista lausekkeiden $\cos \phi$ ja $\sin \phi$ avulla.
12. Piirrä kompleksitasoa esittävä kuva ja merkitse siihen seuraavat kompleksiluvut:

$$\begin{array}{llll} z_1 = e^{-\pi i}, & z_2 = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, & z_3 = 3e^{-\frac{\pi}{2}i}, & z_4 = 2e^{\frac{5\pi}{4}i}, \\ z_5 = e^{6\pi i}, & z_6 = \frac{7}{4}e^{\frac{\pi}{2}i}, & z_7 = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}, & z_8 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i} \end{array}$$

Muistutus: $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$, missä $\phi \in \mathbb{R}$.

Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

- ★ 13. Anna ja Antti ovat veneilemässä Helsingin edustalla ja haluavat vierailia seuraavilla saarilla: Harakka, Harmaja, Lonna, Pihlajasaari ja Vasikkasaari.
- (a) Kuinka monta eri tapaa on kiertää nämä saaret eri järjestyksessä? Edellä saaret lueteltiin aakkosjärjestyksessä; se olisi yksi mahdollinen tapa.
- (b) Kuinka monta eri tapaa on kiertää nämä saaret niin, että Lonna ja Vasikkasaari ovat kiertojärjestyksessä vierekkäin. Esimerkiksi Lonna, Vasikkasaari, Harakka, Harmaja, Pihlajasaari tai Harakka, Vasikkasaari, Lonna, Harmaja, Pihlajasaari ovat kaksi tällaista tapaa.

14. Määritä termin $x^9 y^8$ kerroin polynomissa $(x + y)^{17}$.

15. Osoita luentokalvojen lauseen 28 avulla, että

$$\sum_{k=0}^n 3^k \binom{n}{k} = 4^n$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.