

**HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Johdatus yliopistomatematiikkaan, kevät 2015**  
**Harjoitus 6**

Ratkaisut palautettava viimeistään ti 10.3.2015 klo 19.30  
 Korjaukset palautettava viimeistään ti 24.3.2015 klo 19.30

**Tehtäväsarja I**

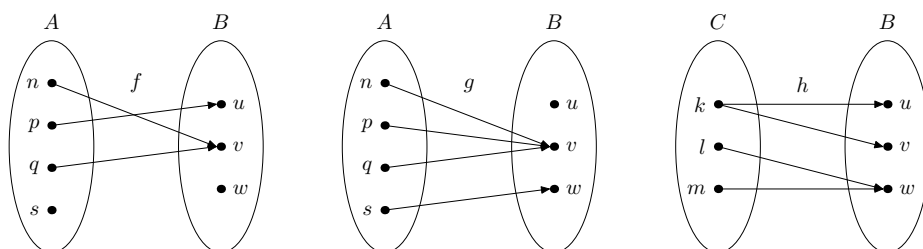
- Päteekö väite  $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$  kaikilla joukoilla  $A, B, C$  ja  $D$ ?
- Päteekö väite  $(A \cup C) \times (B \cup D) \subset (A \times B) \cup (C \times D)$  kaikilla joukoilla  $A, B, C$  ja  $D$ ?
- Muista, että jos  $a$  ja  $b$  ovat reaalilukuja, niin  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ . Muista myös, että jos  $A$  on joukko, niin merkintä  $A^2$  tarkoittaa tulojoukkoa  $A \times A$ .  
 Olkoon  $X = [0, 3]^2$ ,  $Y = [0, 3]^2 \setminus [1, 2]^2$  ja  $Z = ([0, 3] \setminus [1, 2])^2$ . Piirrä kolme koordinaatistoa ja niihin joukot  $X, Y$  ja  $Z$ . Mitkä niistä ovat toistensa osajoukkoja?

**Tehtäväsarja II**

- Päteekö väite  $A \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$  kaikilla joukoilla  $A, B$  ja  $C$ ?
- Päteekö väite  $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \setminus C)$  kaikilla joukoilla  $A, B$  ja  $C$ ?
- Osoita epäsuoraa päättelyä käyttäen, että jos  $A \subset B$  ja  $A \not\subset C$ , niin  $B \not\subset C$ .
- ★ Osoita, että jos  $C \neq \emptyset$  ja  $A \cap C \subset B$ , niin  $C \not\subset A \setminus B$ . Käytä epäsuoraa päättelyä.

**Tehtäväsarja III**

- Olkoon  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4\}$ ,  $C = \{1\}$  ja  $D = \{2, 3, 4\}$ .
  - Määritellään  $f: C \rightarrow D$  asettamalla  $1 \mapsto 2$ ,  $1 \mapsto 3$  ja  $1 \mapsto 4$ . Onko  $f$  kuvaus?
  - Määritellään  $g: A \rightarrow D$  asettamalla  $1 \mapsto 3$ ,  $2 \mapsto 1$  ja  $3 \mapsto 4$ . Onko  $g$  kuvaus?
  - Määritellään  $h: A \rightarrow B$  asettamalla  $1 \mapsto 4$ ,  $2 \mapsto 4$  ja  $3 \mapsto 4$ . Onko  $h$  kuvaus?
- Havainnollista tehtävän 8 sääntöjä  $f, g$  ja  $h$ 
  - samanlaisilla kaavakuvilla kuin tehtävässä 10.
  - koordinaatistossa.
- Ovatko alla kuvatut säännöt  $f$  ja  $g$  kuvauksia  $A \rightarrow B$ ? Entä onko  $h$  kuvaus  $C \rightarrow B$ ?



## Tehtäväsarja IV

Kirjoita alla olevan tehtävän 11 ratkaisu *eri paperille kuin muut ratkaisut*. Nido paperi kuitenkin yhteen muiden ratkaisujen kanssa siten, että se tulee *viimeiseksi sivuksi*. Muista myös kirjoittaa paperiin kurssitunnukseksi. Opiskelijoiden ratkaisut tähän tehtävään kerätään talteen, ja niitä käytetään aineistona kielentämistä käsittelevässä pro gradu -tutkielmassa. Lisäpisteiden kannalta tämä tehtävä vastaa kahta tavallista tehtävää.

11. (a) Lue oheinen todistus ja laadi sille tehtävänanto. Kirjoita todistus uudelleen käyttäen symbolikieltä (joukko-opin merkintöjä).

*Todistus:* Tehdään vasta oletus, että joukko  $A$  on joukkojen  $B$  ja  $C$  erotuksen osajoukko. Koska  $A$  on epätyhjä, on olemassa alkio  $a$ , joka kuuluu joukkoon  $A$ . Vasta oletuksen nojalla  $a$  kuuluu myös joukkojen  $B$  ja  $C$  erotukseen. Toisin sanottuna  $a$  kuuluu joukkoon  $B$  mutta ei joukkoon  $C$ .

Oletuksen nojalla tiedetään, että joukkojen  $A$  ja  $B$  leikkaus sisältyy joukkoon  $C$ . Koska  $a$  ei ole joukon  $C$  alkio, se ei voi myöskään kuulua joukkojen  $A$  ja  $B$  leikkaukseen.

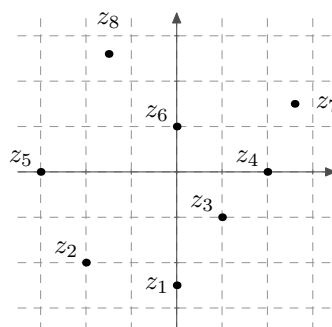
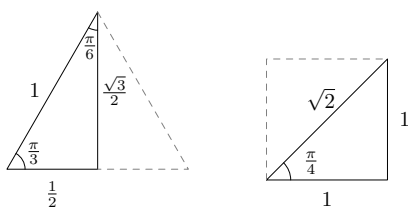
On siis päätelty, että  $a$  kuuluu joukkoihin  $A$  ja  $B$ , mutta ei niiden leikkaukseen. Tämä on ristiriita, joten  $A$  ei voi sisältyä joukkojen  $B$  ja  $C$  erotukseen. Alkuperäinen väite siis pätee.

- (b) Keskustelitko tästä tehtävästä ohjaajan kanssa?

## Kompleksiluvut

12. Viereinen kuva esittää kompleksitasoa (ruudun sivun pituus on 1). Lisäksi tiedetään, että  $z_7 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$  ja  $z_8 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ . Kirjoita kuvaan merkittyjen kompleksilukujen napaesitykset.

Tässä tehtävässä voit hyödyntää alla olevia ns. muistikolmioita:



- ★ 13. Etsi seuraavien kompleksilukujen napaesitys:

$$z_1 = -4 + 4i \quad z_2 = 3i \quad z_3 = 6i - 2\sqrt{3}$$

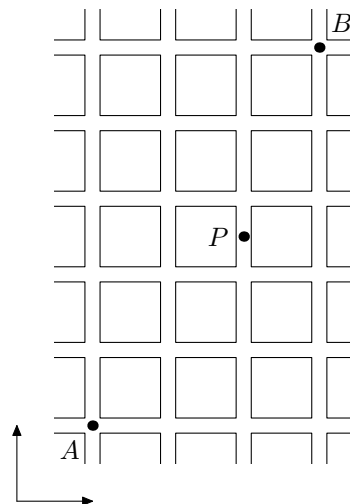
14. Onko kompleksiluku  $-2(\sin \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$  napaesityksessä? Jos ei, niin etsi luvun napaesitys.

## Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

15. Oheisessa kaavakuvassa on näkyvissä Kampin kortteleita välillä Albertinkatu-Yrjönkatu ja Merimiehenkatu-Lönnrotinkatu. Vihje tehtävään sivun alalaidassa<sup>1</sup>.

Anna kävelee joka arkiamu kotoaan Merimiehenkadun ja Albertinkadun kulmasta (piste  $A$ ) työpaikalleen joka sijaitsee Vanhan kirkkopuiston kulmalla (piste  $B$ ).

- (a) Oletetaan, että Anna kulkee aina kaavakuvassa näkyviä teitä pitkin ja aina jompaan kumpaan nuolilla merkityistä suunnista. Kuinka monta erilaista kävelyreittiä hänellä silloin on pisteestä  $A$  pisteeseen  $B$ ?
- (b) Oletetaan, että Anna poikkeaa joka arkiamu kahvilassa pisteessä  $P$ . Kuinka monta erilaista reittiä hän tällöin voi kulkea?



- ★ 16. Eräässä työpaikassa kymmenen miestä ja kaksitoista naista harrastaa jalkapalloa. Kuinka monella tavalla heistä voidaan valita yksi jalkapallojoukkue (11 pelaajaa), jos

- (a) joukkueeseen valittavien sukupuolella ei ole väliä?  
(b) joukkueessa on oltava vähintään yksi nainen?  
(c) joukkueessa on oltava vähintään yksi mies?  
(d) joukkueessa on oltava vähintään kuusi naista ja vähintään kolme miestä?

17. Kurssikokeeseen osallistuu 150 opiskelijaa. Koe järjestetään

- (a) kahdessa salissa, jossa on 90 ja 60 istumapaikkaa.  
(b) kahdessa salissa, jossa on 90 ja 61 istumapaikkaa.

Kuinka monella tavalla opiskelijat voidaan jakaa saleihin näissä tapauksissa? (heidän keskenäisellä järjestyksellään salien sisällä ei ole merkitystä)

---

<sup>1</sup>Vinkki: bittijono.