

**HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Johdatus yliopistomatematiikkaan, kevät 2015**  
**Harjoitus 5**

Ratkaisut palautettava viimeistään ti 24.2.2015 klo 19.30  
Korjaukset palautettava viimeistään ti 17.3.2015 klo 19.30

**Tehtäväsarja I**

Seuraavat tehtävät liittyvät yhdisteen ja leikkauksen käsitteisiin tilanteessa, jossa joukkoja on enemmän kuin kaksi.

Oletetaan, että  $J$  on jokin joukko ja että jokaista  $j \in J$  kohti on annettu jokin joukko  $A_j$ . Tällöin joukkojen  $A_j$  yhdiste ja leikkaus ovat

$$\bigcup_{j \in J} = \{x \mid x \in A_j \text{ jollakin } j \in J\} \quad \text{ja} \quad \bigcap_{j \in J} A_j = \{x \mid x \in A_j \text{ kaikilla } j \in J\}.$$

1. Olkoon  $J = \{0, 1, 2, 3\}$  ja  $A_j = \{1, j, j(j+1), 3j-1\}$  kaikilla  $j \in J$ . Määritä
  - (a) jokainen joukoista  $A_j$ .
  - (b) yhdiste  $\bigcup_{j \in J} A_j$
  - (c) leikkaus  $\bigcap_{j \in J} A_j$ .

2. Olkoon  $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x > n\}$  jokaisella  $n \in \mathbb{N}$ . Määritä

$$(i) \text{ joukot } A_0, A_1 \text{ ja } A_6 \quad (ii) \text{ yhdiste } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad (iii) \text{ leikkaus } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Perustele vastauksesi!

**Tehtäväsarja II**

Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan karteesisista tuloa.

3. Määritä karteesinen tulo  $A \times B$ , jos

$$(a) \ A = \{1, 2, 3\} \text{ ja } B = \{1, 3, 5\} \quad (b) \ A = \{8, \sqrt{3}, 6\} \text{ ja } B = \{\pi, e\}$$
$$(c) \ A = \{9, 1, 8, 7\} \text{ ja } B = \emptyset \quad (d) \ A = \mathbb{Q} \text{ ja } B = \mathbb{N}$$

Tehtävissä 4 ja 5 tarkastellaan joukkoja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ ja } y \geq 0\}$ ,  
 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 2\}$  ja  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1\}$ .

4. Piirrä kolme koordinaatistoa ja niihin joukot  $A$ ,  $B$  ja  $C$ .
5. Piirrä kolme koordinaatistoa ja niihin joukot  $B \cap C$ ,  $A \setminus C$  ja  $C \setminus (A \cap B)$ .
6. Oletetaan, että  $A, B, C$  ja  $D$  ovat joukkoja. Osoita, että

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

### Tehtäväsarja III

Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan mm. potenssijoukkoa.

7. Määritä seuraavat potenssijoukot:

$$(i) \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \quad (ii) \mathcal{P}(\emptyset) \quad (iii) \mathcal{P}(\{1, \{1\}, \emptyset\})$$

8. Olkoon  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$  ja  $C = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$ . Määritä:

$$(i) (A \times B) \setminus C \quad (ii) \mathcal{P}((A \times B) \setminus C)$$

### Tehtäväsarja IV

Seuraavassa tehtävässä harjoitellaan ”P jos ja vain jos Q”-muotoisen lauseen todistamista.

★ 9. Oletetaan, että  $A$  ja  $B$  ovat joukkoja. Osoita, että

$$A \cup B = B \text{ jos ja vain jos } A \cap B = A.$$

### Kompleksiluvut

★ 10. (a) Ratkaise kompleksinen yhtälö  $z + |z|^2 = \operatorname{Re} z - 3\operatorname{Im} z - 2i$ .

(b) Oletetaan, että  $z, w \in \mathbb{C}$  ja  $w \neq 0$ . Osoita luentojen lauseiden 7 ja 8 avulla, että

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

11. Oletetaan, että  $z \in \mathbb{C}$ . Osoita induktiolla, että  $|z^n| = |z|^n$  kaikilla luonnollisilla luvuilla  $n \geq 1$ . Vihje: lause 7.

12. Olkoon  $z = 2 + 5i$  ja  $w = 3 - 4i$ . Laske seuraavien kompleksilukujen itseisarvo hyödyntäen lauseita 7 ja 8 sekä edellisiä tehtäviä:

$$(i) zw \quad (ii) \frac{z}{w} \quad (iii) z^{10} \quad (iv) \frac{2z^{10}}{w^4}$$

### Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

13. Antilla on kukkakauppa jossa hän myy tulppaaneja. Joka aamu hän hakee tukusta 200 uutta tulppaania ja päivän aikana myynnin sekä kuihtumisen takia tulppaanien määrä pienenee 10% siitä, mitä se on aamulla ollut tukkureissun jälkeen. 1.1.2015 Antti laski tultuaan tukusta, että hänellä on 1000 tulppaania. Tarkastellaan lukujonoa  $(a_n)$ , jossa  $a_n$  ilmaisee tulppaanien lukumäärän tukkureissun jälkeen, missä  $n = 0$  vastaa päivää 1.1.2015,  $n = 1$  vastaa päivää 2.1.2015 jne.

(a) Muodosta rekursioyhtälö, joka kertoo, miten  $a_{n+1}$  riippuu luvusta  $a_n$ . Mikä on  $a_0$ ?

(b) Osoita induktiolla, että kaikilla  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  pätee

$$a_n = a_0 q^n + \sum_{j=0}^{n-1} b q^j,$$

missä  $b = 200$  ja  $q = 0,9$ .

(c) Montako tulppaania kaupassa oli tammikuun viimeisenä päivänä?

(d) Jos tilanne jatkuu samanlaisena, kasvaako kukkien määrä Antin kaupassa rajattomasti, vai päädytäänkö lopulta tasapainotilaan, jossa tulppaanien määrä pysyy suurinpiirtein vakiona päivästä toiseen? Mikä tämä mahdollinen määrä on?

14. (a) Selitä, mitä tarkoittaa merkintä  $\binom{28}{4}$  ja laske sen arvo laskimella tai tietokoneella (laskimessa tarvitsit nappia nCr ja esimerkiksi Wolfram Alphalla voit laskea arvon syöttämällä nCr(28,4)).

(b) Yhdessä lottorivissä on 7 eri numeroa väliltä 1–39. Kuinka monta eri lottoriviä on olemassa?

(c) Kuinka monta lottoriviä on olemassa joka sisältää numeron 1?

(d) Kuinka monta lottoriviä on olemassa joka sisältää numerot 1, 2, 3, 4 ja 5?

★ 15. Tarkastellaan kahdeksan bitin jonoja kuten esimerkiksi 00101111. Kuinka monessa tällaisessa jonossa on

(a) tasan kaksi ykköstä?

(b) tasan kolme nollaa?

(c) enintään kolme ykköstä?

(d) vähintään neljä ykköstä?