

## Johdatus tilastolliseen päättelyyn, kevät 2015

### Harjoitus 6 (28. 4. – 4. 5.)

**Opastus:** Nämä tehtävät (tehtäviä 4 ja 6 lukuunottamatta) liittyvät Bayes-päätelyyn, jota käsitellään monisteen luvussa 10.

1. Palataan edellisten harjoitusten viimeiseen tehtävään, jossa hotelliasiakkaan alushousujen värillisyyden perusteella tehtiin päätelmiä asiakkaan kansalaisuudesta. Sijoitetaan tämä esimerkki bayesiläisen päättelyn yleiseen viitekehykseen siinä mielessä kuin se on kuvattu esim. monisteen sivulla 116. Mikä olisi parametri ja sen priorijakauma? Entä uskottavuusfunktio? Mikä on posteriorijakauma? Koodaa alushousujen ominaisuudet ”valkoinen” ja ”värillinen” sekä asiakkaan kansalaisuus joillakin lukuarvoilla.

2. Kulhossa on 4 palloa, joista  $\theta$  on valkoisia ja loput mustia. Pekalla ei ole mitään tietoa siitä, miten pallojen värit ovat määräytyneet, joten hänen ennakkokäsityksensä mukaan kaikki vaihtoehdot  $\theta$ :n arvolle (0,1,2,3,4) ovat yhtä todennäköisiä. Hän nostaa korista umpimähkään ja palauttaen kolme palloa ja saa tulokseksi värit valkoinen, musta ja musta. (Tätä satunnaiskoetta kuvaava malli on esitetty monisteen jaksossa 10.2.)

Esitä arvot luettelemalla ja halutessasi myös kaavalla i) Pekan priorijakauma, ii) uskottavuusfunktio, iii) Pekan posteriorijakauma. Mikä on Pekan mielestä havaintojen teon jälkeen todennäköisin  $\theta$ :n arvo?

3. Jatkoa edelliseen tehtävään. Maija seuraa sivusta Pekan koetta. Samalla hän tietää, että pallot päätyivät kulhoon seuraavasti: Oli 4 samanlaista valkoista palloa. Kunkin pallon kohdalla heitettiin harhatonta lanttia, ja mikäli saatiin kruunu, pallo värjättiin mustaksi. Sitten pallot pantiin kulhoon. Mitkä ovat Maijan priori- ja posteriorijakauma (luettele arvot)? Mikä on hänen mielestään havaintojen teon jälkeen todennäköisin  $\theta$ :n arvo?

4. Satunnaismuuttuja  $X$  noudattaa *Pareto-jakaumaa* parametrein  $\kappa > 0$  ja  $\alpha > 0$ , jos se on jatkuvasti jakautunut tiheysfunktioaan

$$g(x; \kappa, \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha \kappa^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & \text{kun } x > \kappa, \\ 0, & \text{kun } x \leq \kappa. \end{cases}$$

Merkitään tällöin  $X \sim \text{Pareto}(\kappa, \alpha)$  ja sanotaan, että  $\kappa$  on jakauman *sijaintiparametri* sekä  $\alpha$  sen *muotoparametri*.

Varmista, että  $g$  kelpaa jatkuvan jakauman tiheysfunktioksi. Hahmottele sen kuvaajaa. Kiinnitä erityisesti huomiota siihen, miten  $\alpha$  vaikuttaa tiheysfunktion muotoon.

5. Tilastollinen malli aineistolle  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  on satunnaisotos tasajakaumasta  $\text{Tas}(0, \theta)$ , jonka yhteistiheysfunktio ja uskottavuusfunktio on johdettu harjoituksen 1 tehtävässä 6. Valitaan prioriksi  $p(\theta)$  jakauma  $\text{Pareto}(\kappa, \alpha)$ , jossa  $\kappa > 0$  ja  $\alpha > 0$ . Osoita, että posteriorijakauma  $p(\theta|\mathbf{y})$  on Pareto-jakauma, jonka sijaintiparametri on  $\max(\kappa, y_{(n)}) = \max(\kappa, y_1, \dots, y_n)$ . Mikä on muotoparametri?

Tämä lasku osoittaa, että Pareto-jakauma on tasajakauman  $\text{Tas}(0, \theta)$  *liittopriori* (vrt. monisteen jakso 10.5).

*Apu.* Tässä voi edetä verrannollisuustarkastelun  $p(\theta|\mathbf{y}) \propto p(\theta)f(\mathbf{y}|\theta)$  kautta (vrt. s. 123).

**6.** Pohdittavaksi ja harjoituksissa keskusteltavaksi:

a) Sukulaisesi, joka ei ole opiskellut lainkaan tilastotiedettä, pyytää sinua kertomaan yhdellä virkkeellä, mistä tilastollisessa päättelyssä on kysymys. Miten vastaisit hänelle tämän JTP-kurssin pohjalta?

b) Luettele kolme mielestäsi tärkeintä (tai ainakin mielenkiintoisinta) tällä kurssilla opittua tilastollisen päättelyn käsitettä tai menetelmää.

**Vappuaattona to 30. 4. ja vapunpäivänä pe 1. 5. ei pidetä harjoituksia.** Torstain harjoitusryhmät pidetään **ma 4. 5. klo 10–12 ja 14–16** salissa DK118. Perjantain ryhmä peruutetaan. Torstain ja perjantain ryhmiin osallistuneet voivat halutessaan vieraillla muissa ryhmissä.

**Kurssikoe pidetään ma 11. 5. klo 13.00–15.00** Exactumin auditorioissa. Tarkka koealue ja muuta kokeeseen liittyvää kerrotaan piakkoin kurssin [www-sivulla](#).