Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tilastollinen päättely II

Kurssikoe 14.3.2017 (kesto 3h 30 min)

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu. Ei taulukkokirjaa

1. Olkoon θ positiivinen parametri, ja asetetaan

$$f(y;\theta) = \begin{cases} 2\theta^{-1} y \exp(-y^2/\theta), & \text{kun } y > 0 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Oletetaan, että $Y_1, \dots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin yllä mainittua jakaumaa. Muodosta tämän mallin uskottavuusfunktio sekä määritä suurimman uskottavuuden estimaatti $\widehat{\theta}$.

2. Olkoon $(t_1, t_2, t_3) = (1, 2, 3)$, olkoon Y_1, Y_2 ja Y_3 kolme riippumatonta eksponenttijakautunutta satunnaismuuttujaa ja $Y_i \sim \mathrm{Exp}(t_i/\mu)$ missä $\mu > 0$. Näytä, että estimaattori

$$T = \frac{Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3}{3}$$

on parametrin μ harhaton estimaattori. Onko T täystehokas estimaattori? (Perustele vastauksesi).

3. Olkoon $Y_1, \dots, Y_n \sim \mathrm{P}(\mu)$ Poisson-jakautuneita ja riippumattomia havaintoja vastaavia satunnaismuuttujia. Etsi tässä mallissa parametrille μ reaaliarvoinen tyhjentävä tunnusluku.

4. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \dots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattava kukin samaa jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on gammajakauman erikoistapaus

$$f(y;\theta) = \tfrac{1}{2}\theta^{-3} y^2 \exp(-y/\theta)\ 1\{\, y > 0\,\}$$

ja θ on positiivinen parametri.

   a) Määrää mallin Fisherin informaatio $i(\theta)$. (vihje: satunnaismuuttujan Y_i odotusarvo saadaan gammajakauman avulla suoraan *ilman* integrointia)

   b) Halutaan testata nollahypoteesia $H_0\colon \theta = \theta_0$ kaksisuuntaista vastahypoteesia $H_1 : \theta \neq \theta_0$ vastaan. Johda Raon pistemäärätestisuure.

5. a) Olkoon $Y_1, \dots, Y_n$ riippumatton satunnaisotos jakaumasta, jonka tiheysfunktio f riippuu reaaliarvoisesta parametrista θ. Miten määritellään parametrin θ luottamusväli luottamustasolla $1 - \alpha$?

   b) Oletaan, että kohdan *a*) tiheysfunktio f on gammajakauman $\mathrm{G}(2, \theta)$ tiheysfunktio (löytyy tehtäväpaperin takaa). Olkoon $W = (Y_1 + \cdots + Y_n) \cdot 2\theta$. Määrää muotoa $(0, a)$ oleva parametrin θ luottamusväli luottamustasolla $1 - \alpha$ satunnaismuuttujan W avulla. (vihje: perustele gammajakauman ominaisuuksien avulla, että $W \sim \chi^2_{4n}$).

Jakaumia:

- Satunnaismuuttuja $X \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda)$ noudattaa gammajakaumaa parametreilla $\kappa > 0$, $\lambda > 0$. Sen tiheysfunktio on
$$f_X(x; \kappa, \lambda) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}\{ x > 0 \},$$
odotusarvo $\mathbb{E}X = \kappa/\lambda$ ja varianssi $\operatorname{var} X = \kappa/\lambda^2$. Riippumattomien gammajakautuneitten $X_i \sim \mathrm{G}(\kappa_i, \lambda)$ summa on gammajakautunut $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{G}(\sum \kappa_i, \lambda)$. Jos $X \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda)$ ja $c > 0$ vakio, niin $cX \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda/c)$.

- Satunnaismuuttuja $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla $\lambda > 0$. Tämä on gammajakauman erikoistapaus $\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathrm{G}(1, \lambda)$, ja sen tiheysfunktio on
$$f_Y(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}\{ y > 0 \},$$
odotusarvo $\mathbb{E}Y = 1/\lambda$ ja varianssi $\operatorname{var} Y = 1/\lambda^2$. Eksponenttijakauman kertymäfunktio $F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda y}) \mathbf{1}\{ y > 0 \}$.

- Satunnaismuuttuja $Z \sim \chi^2_n$ noudattaa khiin neliön jakaumaa vapausasteella $n > 0$. Tämä on gammajakauman erikoistapaus $\chi^2_n = \mathrm{G}(n/2, 1/2)$ ja sen tiheysfunktio on siten
$$f_Z(z; n) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2} \mathbf{1}\{ z > 0 \},$$
odotusarvo $\mathbb{E}X = n$ ja varianssi $\operatorname{var} X = 2n$.

- Diskreetti satunnaismuuttuja $W \sim \mathrm{P}(\mu)$ noudattaa Poissonin jakaumaa parametrilla μ. Sen pistetodennäköisyysfunktio on
$$f_W(w; \mu) = \begin{cases} e^{-\mu} \mu^w / w!, & \text{kun } w = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$
Odotusarvo $\mathbb{E}W = \mu$ ja varianssi $\operatorname{var} W = \mu$. Riippumattomien Poisson-jakautuneitten satunnaismuuttujien $X_i \sim \mathrm{P}(\mu_i)$ summa on Poisson-jakautunut $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{P}(\sum \mu_i)$.