

Tilastollinen päättely I 12. 5. 2017
Kurssikoe 2h 30min

1. Olkoon $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Poisson}(\mu)$ riippumattomia, $\mu > 0$. Poissonin jakaumaa noudattavalla satunnaismuuttujalla on pistetodennäköisyysfunktio

$$f(x; \mu) = e^{-\mu} \frac{\mu^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Johda huolellisesti parametrin μ suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\mu}$.

2. Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n riippumattomia $N(\mu, \sigma^2)$ -jakautuneita satunnaismuuttujia, missä $\mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}$ ovat tuntemattomia parametreja ja $\sigma^2 > 0$. Merkitään $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$.

- (i) Tarkastellaan parametrin μ (kiinnostusparametri) luottamusväliä ja satunnaismuuttujia

$$Y_1 = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma^2 / \sqrt{n}}$$

ja

$$Y_2 = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}},$$

missä S on otoskeskihajonta. Luottamusväli voidaan muodostaa helposti käyttäen sopivaa saranasuuretta. Onko Y_1 saranasuure? Entä Y_2 ? Perustele.

- (ii) Oletetaan nyt, että $\sigma^2 = 1$ on tunnettu. Esitä kaksisuuntainen 95%-luottamusväli parametrille μ . Kuinka suuri otoskoko olisi valittava, että luottamusvälin leveydeksi tulisi noin 1? Entä jos valittaisiin vastaava 90%-luottamusväli?
3. Viesti lähetetään koodattuina biteiksi, eli se koostuu nolista ja ykkösistä. Viestistä 1/10 on ykkösiä, ja 9/10 nolli. Lähetysyhteys on kuitenkin huono, joten viestiä välitettäessä 1/5 nolista muuttuu ykkösiäksi, ja 1/3 ykkösistä nolliksi.
- (i) Laske todennäköisyys, että viestiä vastaanotettaessa yksittäinen (satunnaisesti valittu) merkki on ykkönen.
- (ii) Viestiä vastaanotettaessa merkki on ykkönen. Laske todennäköisyys, että se oli ykkönen myös alkuperäisessä viestissä.
4. Havainnot ovat luvut y_1, \dots, y_n . Oletamme, että nämä ovat satunnaismuuttujien Y_1, \dots, Y_n havaittuja arvoja ja että Y_1, \dots, Y_n ovat riippumattomia ja noudattavat jakaumaa $N(\mu, \sigma^2)$, jossa sekä μ että σ^2 ovat tuntemattomia. Haluamme testata hypoteesia $\mu \geq \mu_0$, kun vastahypoteesina on $H_1: \mu < \mu_0$. Testi perustuu testisuureeseen

$$t = \frac{\bar{y} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}.$$

- (i) Selitä, kuinka tämän testin p-arvo määritellään ja selitä, kuinka sen saisi laskettua esimerkiksi taulukoiden tai tietokoneiden avulla. (Voit ajatella, että nollahypoteesi on $\mu = \mu_0$).
- (ii) Testi pyydetään suorittamaan merkitsevyystasolla $\alpha = 0.05$. Mitä tarkoittaa hylkäämisvirhe (omin sanoin) ja mitä voidaan sanoa hylkäämisvirheen todennäköisyydestä tässä testitilanteessa?
- (iii) Oletetaan, että testin p-arvoksi tuli $p = 0.09$. Hylätäänkö nollahypoteesi H_0 vai jääkö se voimaan, kun merkitsevyystaso on $\alpha = 0.05$?

Standardinormaalijakauman yläkvantileja:

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_α	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58