

Matemaattinen logiikka

Harjoitus 9

1. Näytä, että funktio $\pi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $\pi(x, y) = ((x + y)^2 + 3x + y)/2$, on bijektio.
2. Näytä, että funktio $syt(x, y) = x:n$ ja $y:n$ suurin yhteinen tekijä on primitiivirekursiivinen funktio.
3. Oletetaan, että relaatio $R \subseteq \mathbb{N}$ on primitiivirekursiivinen. Näytä, että funktio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) =$ joukon $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n, x \in R\}$ alkioden lukumäärä, on primitiivirekursiivinen.
4. Oletetaan, että $g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ovat primitiivirekursiivisiä ja että $g(0) = 0$ ja jos $n > 0$ niin $g(n) < n$. Määritellään funktio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ siten, että $f(n) = 0$ jos $n = 0$ ja muuten $f(n) = h(f(g(n)))$. Näytä, että f on primitiivirekursiivinen.
5. Määritellään rekursiolla sanat:
 - (i) 010 on sana,
 - (ii) 0101 on sana,
 - (iii) jos A ja B ovat sanoja, niin $AB1$ on sana (eli esim. 01001011 on sana). Näytä, että

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid (n)_0(n)_1 \dots (n)_{(\text{len}(n)-1)} \text{ on sana}\}$$

on primitiivirekursiivinen relaatio. (Vihje: Huomaa, että $n \in X$ joss x koodaa jomman kumman jonoista 010 ja 0101 tai löytyy $m \in X$ ja $k \in X$ jotka ovat pienempiä kuin n ja $n:n$ koodaama merkkijono saadaan liittämällä $m:n$ ja $k:n$ koodaamat jonot peräkkäin ja lisäämällä merkki 1 perään.)

6. Olkoon $L^* = L \cup \{f\}$, missä f on 2-paikkainen funktiosymboli. Olkoon M^* L^* -strukturi ja $M = M^* \upharpoonright L$ eli L -strukturi, joka saadaan M^* :stä jättämällä $f:n$ tulkinta pois. Oletetaan, että f^{M^*} on määriteltävä M^* :ssä. Näytä, että kaikilla L^* -termeilla $t(v_0, \dots, v_n)$, kaavan $t = v_{n+1}$ M^* :ssä määrittelemä relaatio on määriteltävä jo M :ssä.