

Matemaattinen Logiikka

Harjoitus 7

1. Olkoon T L -teoria siten, että jokaisessa L -struktuurissa ainakin jokin $\phi \in T$ on tosi. Osoita, että on olemassa $\phi_0, \dots, \phi_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$, siten, että $\vdash \phi_0 \vee \dots \vee \phi_n$.

2. Olkoon $L = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ja T sellainen L -teoria, että jokaisella $M \models T$ ja $a \in M$ löytyy sellainen $i \in \mathbb{N}$, että $c_i^M = a$. Näytä, että on olemassa $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ jolla $T \vdash \bigvee_{k < m \leq n} c_k = c_m$, missä $\bigvee_{k < m \leq n} c_k = c_m$ tarkoittaa kaavaa

$$c_0 = c_1 \vee c_0 = c_2 \vee \dots \vee c_0 = c_n \vee c_1 = c_2 \vee \dots \vee c_{n-1} = c_n.$$

3. Näytä, että $Th((\mathbf{Z}, <))$ (missä $<$ on kokonaislukujen luonnollinen järjestys) ei ole \aleph_0 -kategorinen.

4. Olkoon $M = (\{0, 1, 2\}, \{0\}) \{P\}$ -strukturi. Etsi $\{P\}$ -lause ϕ siten, että $M \models \phi$ ja $\{P\}$ on täydellinen teoria.

5. Olkoon T ristiriidaton L -teoria ja T' ristiriidaton L' -teoria ja oletetaan, että $L \cap L' = \emptyset$. Millä ehdolla $T \cup T'$ on ristiriidaton?

6. Olkoot P ja R 1-paikkaisia relaatiosymboleja, jotka eivät kuulu aakkostoon L . Olkoon T ristiriidaton $L \cup \{P\}$ -teoria ja T' ristiriidaton $L \cup \{R\}$ -teoria. Oletetaan että $T \cap T'$ on \aleph_0 -kategorinen teoria, jolla ei ole äärellisiä malleja. Näytä, että $T \cup T'$ on ristiriidaton teoria.