

Matemaattinen logiikka

Harjoitus 11

1. Määritellään F -funktioiden perhe seuraavasti:

(i) funktiot Z , S , $+$ and Pr_i^n ovat F -funktioita,

(ii) jos $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ ja $g_i : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, ovat F -funktioita niin myös $h(x_1, \dots, x_m) = f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m))$ on F -funktio.

Näytä, että kertolasku ei ole F -funktio (Vihje: Tarkastele kertolaskun kasvunopeutta).

2. Olkoon $N = (\mathbb{N}, +, 0, 1, \leq, f, g)$ struktuuri, missä $+$ ja \leq ovat luonnollisten lukujen tavalliset yhteenlasku ja järjestys, g on yksipaikkainen funktio ja $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ on sellainen, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ löytyy $x \in \mathbb{N}$ jolla kaikilla $i \leq k$, $f(x, i) = a_i$. Näytä suoraan määritelmiin vetoamalla, että funktio $h(n) = g^n(n)$ on määriteltävä struktuurissa N , missä $g^0(x) = x$ ja $g^{n+1}(x) = g(g^n(x))$.

3. Olkoon $N = (\mathbb{N}, +, 0, 1, \leq, f)$ struktuuri, missä $+$ ja \leq ovat luonnollisten lukujen tavalliset yhteenlasku ja järjestys ja $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ on sellainen, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ löytyy $x \in \mathbb{N}$ jolla kaikilla $i \leq k$, $f(x, i) = a_i$. Näytä suoraan määritelmiin vetoamalla, että kertolasku on määriteltävä struktuurissa N .

4. Olkoon SMK niiden $(x, y, i) \in \mathbb{N}^3$ joukko joilla löytyy L_{exp} -kaava ϕ ja L_{exp} -termi t niin, että $\lceil \phi \rceil = x$, $\lceil t \rceil = y$ ja t on sijoitettavissa muuttujaan v_i kaavassa ϕ . Näytä, että SMK on primitiivirekursiivinen.

5. Näytä, että joukko $TA = \{\lceil \phi \rceil \mid \mathcal{N}_{exp} \models \phi, \phi \text{ on atomilause}\}$ on primitiivirekursiivinen.

6. Olkoon n pienin luonnollinen luku, jota ei voi määritellä suomenkielisellä ilmauksella jossa on enintään tuhat kirjainta. Mitä voit sanoa luvusta n ? Entä pienimmästä luonnollisesta luvusta, jota ei voi määritellä L_{exp} -lauseella jossa on enintään tuhat merkkiä?