

# Todennäköisyysteorian luennot, kevät 2015

Dario Gasbarra<sup>1</sup>

17. maaliskuuta 2015

<sup>1</sup>Helsingin Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos



# Sisältö

<b>0</b>	<b>Miksi todennäköisyydet ovat additiivisia ?</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Kolmogorovin aksioomat.</b>	<b>25</b>
1.1	Mitan laajennus . . . . .	28
1.2	Sovellus: Tulo $\sigma$ -algebra ja tulo-todennäköisyys . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Todennäköisyys äärettömissä tulo-avaruuksissa ja Kolmogorovin laajennuslause</b>	<b>45</b>
<b>3</b>	<b>Satunnaismuuttujat</b>	<b>51</b>
<b>4</b>	<b>Odotusarvo ja Integraali</b>	<b>57</b>
4.1	Monotonisen konvergenssin lause. . . . .	63
4.2	Satunnaismuuttujan jakauma . . . . .	69
4.3	Odotusarvon sovellus: mitan vaihto . . . . .	71
4.3.1	Uskottavuusosamäärä . . . . .	72
4.3.2	Lebesguen hajotelma . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Riippumattomuus</b>	<b>77</b>
5.0.1	Lovaszin lokaali lemma . . . . .	79
5.1	Borel Cantelli lemmat . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Stokastinen konvergenssi</b>	<b>87</b>
6.1	Funktionaalianalyysin peruskäsitteiden pika-sanasto . . . . .	91

<b>7</b>	<b>Fubinin lause ja tulo-todennäköisyys</b>	<b>93</b>
7.0.1	Osittaisintegroinnin kaava . . . . .	98
7.0.2	Muuttujan vaihto-kaava eukliidisessä avaruudessa $\mathbb{R}^d$	101
<b>8</b>	<b>Tasainen integroituvuus ja <math>L^1(P)</math>-konvergenssi</b>	<b>103</b>
8.0.1	Sovellus: odotusarvon derivointi parametrin suhteen . . . . .	113
<b>9</b>	<b><math>L^p(\Omega)</math> avaruudet</b>	<b>119</b>
9.0.1	Epäyhtälöt . . . . .	119
9.1	Projektio $L^2(P)$ avaruudessa . . . . .	126
<b>10</b>	<b>Ehdollinen odotusarvo</b>	<b>131</b>
10.1	Ehdollinen odotusarvo Radon-Nykodim derivaattana . . .	133
10.2	Mitä voidaan sanoa kun $E_P( X ) = \infty$ ? . . . . .	134
10.3	Ehdollisen odotusarvon ominaisuudet . . . . .	135
10.4	Säännöllinen ehdollinen todennäköisyys ja ytimet . . . . .	136
10.5	Ehdollisen odotusarvon laskenta riippumattomuuden nojalla . . . . .	141
10.6	Ehdollisen odotusarvon laskenta mitan-vaihdon avulla: Bayesin kaava . . . . .	142
10.6.1	Ehdollisen odotusarvon laskenta tuloavaruudessa . .	145
10.7	Ehdollistaminen nollamittaisiin tapahtumiin: varoitus . . .	147
<b>11</b>	<b>Martingaalit</b>	<b>151</b>
<b>12</b>	<b>Martingaalien konvergenssi</b>	<b>155</b>
12.1	Doobin Martingaali-konvergenssi lause . . . . .	155
12.1.1	Tasaisesti integroituvat martingaalit . . . . .	158
12.1.2	Martingaalin takaperäinen konvergenssi . . . . .	160
12.2	Vaihdeettavuus ja De Finettin lause . . . . .	164
<b>13</b>	<b>Radon-Nikodymin lause</b>	<b>173</b>
<b>14</b>	<b>Johdatus Cramerin suurten poikkeamien teoriaan</b>	<b>179</b>

<i>SISÄLTÖ</i>	5
<b>15 Jakaumien konvergenssi</b>	<b>189</b>
15.0.1 Skorokhodin esitys . . . . .	191
<b>16 Karakteristinen funktio ja Konvoluutio</b>	<b>203</b>
16.0.1 Lyhyesti kompleksi-analyysistä . . . . .	203
<b>17 Keskeinen raja-arvo lause , Steinin todistus</b>	<b>215</b>
<b>18 Suurten satunnaismatriisien ominaisarvojen jakauma</b>	<b>227</b>



# Luku 0

## Miksi todennäköisyydet ovat additiivisia ?

*My Thesis, paradoxically and a little provocatively, but nonetheless genuinely, is simply this:*

PROBABILITY DOES' NOT EXISTS.

*The abandonment of superstitious beliefs about the existence of Phlogiston, the Cosmic Ether, Absolute Space and Time, . . . , or Faires and Witches was an essential step along the road on scientific thinking. Probability too, if regarded as something endowed with some kind of objective existence is no less a misleading misconception, an illusory attempt to exteriorize or materialize our true probabilistic beliefs. Bruno De Finetti, Theory of Probability, a critical introductory treatment (1972).*

Aloitan tällä (ja lopetan saman tien) tätä pohdiskelua: On merkillistä että, matemaattisesta sivistyksestä riippumatta, todennäköisyyskäsite on kaikille tuttu: me kaikki ymmärrämme mitä jalkapallonvalmentaja tarkoittaa kun kertoo haastattelussa että hänen mielestä joukkueensa voittomahdollisuudet ovat noin 60% (vaikka me voimme olla eri mieltä luvusta ja todennäköisyyden filosofiasta).

Kuten meidän kauaiset esi-isämme, joudumme jatkuvasti tekemaan isompia tai pienempia päätöksiä epävarmuuden tilassa. Luonnon valinta on muokannut meidän aivoihimme vaistomaista älykkyyttä hahmotta-

maan ja vertailemaan eri mahdollisuuksien "uskottavuuksia", ottaamalla huomioon aikaisempaa kokemusta ja ympäristöltä tulevaa informaatiota.

Mittateoria saa uuden maun, koska sen ongelmat ja tulokset voidaan tulkita "jokamiehen" todennäköisyyskäsitteen valossa.

M. Kac sen lausui: "*Probability theory is measure theory with a soul*" eli ("*Todennäköisyysteoria on mittateoria jolla on sielua*").

Kun hypoteettiset avaruusolennot vihdoinkin saapuvat maahan ja ilmenee että he osaavat jo koko meidän matematiikkamme ja mittateoriamme, pystyisivätkö he silti ymmärtämään mitä todennäköisyys tarkoittaa meille ?

**Todennäköisyys = Hinta** Bruno De Finetti (1906-1985) oli matemaatikko, taloustieteilijä ja filosofi. Hänen tieteenfilosofiassa torjutaan absoluuttisen todennäköisyyden käsite. Sen sijaan todennäköisyydellä on puhtaasti operaativinen merkitys. Todennäköisyydet ovat aina suhteellisia, meidän tiedon tilasta riippuen.

Epävarmassa maailmassa, tapahtumat voidaan luokitella kahteen luokkaan,  $\mathcal{V} = \{ \text{varmat tapahtumat} \}$  ja  $\mathcal{E} = \{ \text{epävarmat tapahtumat} \}$ .

Kun tapahtuma  $E \in \mathcal{V}$  on varma ja  $F \supseteq E$  eli  $F$  tapahtuu aina silloin kun  $E$  tapahtuu, seuraa että myös  $F \in \mathcal{V}$  on varma. Tapahtuma  $E$  on mahdoton jos sen negaatio  $E^c$  (joka tapahtuu silloin kun  $E$  ei tapahdu) on varma.

Merkitään luokka  $\mathcal{N} = \{ \text{mahdottomat tapahtumat} \}$  ja sanotaan että tapahtumat  $E, F$  ovat keskenään *ei sopivia* kun niiden yhteensattuma on mahdoton, eli  $(E \cap F) \in \mathcal{N}$ . Huomataan myös että jokaiselle tapahtumalle  $E$ ,  $(E \cup E^c) \in \mathcal{V}$ . Kun  $E$  ja  $F$  ovat tapahtumia,  $(E \cup F)$  merkitsee tapahtuman jossa  $E$  tai  $F$  tapahtuvat.

Eräs vedonlyöntimeklari ottaa vastaan vetoja tapahtumista  $E_1, \dots, E_n$ , jotka ovat keskenään ei-sopivia, siis  $(E_i \cap E_j) \in \mathcal{N}$  (mahdoton tapahtuma) kun  $i \neq j$ . Tarkemmin, meklarin on pakko ottaa vastaan mitä tahansa vetoja (myös negatiivisilla panoksilla) tapahtumista  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ja niiden yhdisteistä  $(E_i \cup E_j), (E_i \cup E_j \cup E_k), \dots$  jne.

Meklari valitsee kuitenkin vetojen hinnat (tulkinta: **todennäköisyydet**)  $Pr(E_i), Pr(E_i \cup E_j), Pr(E_i \cup E_j \cup E_k) \dots$  jne.

Merkinnät:  $p_i := Pr(E_i)$ , "satunnaissuure"  $\mathbf{1}_{E_i}$  on tapahtuman  $E_i$ :n indikaattori joka saa arvon 1 jos "sattuma"  $E_i$  tapahtuu, muuten 0.

Pr lyhennys sopii hyvin molemmille englanninkielisille sanoille

Price = hinta            ja            Probability = todennäköisyys.

Vastapuolen voitto on satunnaissuure

$$V = (\mathbf{1}_{E_1} - p_1)y_1 + \dots + (\mathbf{1}_{E_n} - p_n)y_n$$

jossa  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  on vastapuolen vapaasti valittavissa oleva vedonlyöntistrategia.

Johdonmukainen meklari määrää vedonlyönnin hinnat siten, että vastapuolelle ei syntyisi *arbitraasimahdollisuuksia*, eli mahdollisuuksia tehdä riskitöntä voittoa.

**Teoreema 0.0.1.** (Tämä on väite eikä määritelmä !)

*Arbitraasivapausoletuksesta seuraa välittömästi:*

1. Vetojen hinnat ovat yksikäsitteisiä (yhden hinnan laki), vedolle  $\mathbf{1}_{E_i}$  on vain yksi hinta  $Pr(E_i) \in [0, 1]$ .
2. Jos  $E_i \in \mathcal{V}$  (varma tapahtuma),  $Pr(E_i) = 1$  ja vastaavasti jos  $E_i \in \mathcal{N}$  (mahdoton tapahtuma), niin  $Pr(E_i) = 0$ .
3. Hinnat (eli todennäköisyydet) ovat (äärellisesti)-additiivisia.

**Todistus :**

1. Jos vedolle  $\mathbf{1}_E$  olisi kaksi hintaa,  $p_1 > p_2$ , vastapuoli voisi ostaa meklarilta  $x$  vedonlyöntilippua hinnalla  $p_1$  ja myydä meklarille  $x$  vedonlyöntilippua hinnalla  $p_2$ , jossa  $x > 0$  voi olla mielivaltainen suuri. Vastapuolen voitto (meklarin tappio) on kaikissa tapauksissa

$$(\mathbf{1}_E - p_1)x - (\mathbf{1}_E - p_2)x = (p_1 - p_2)x$$

2. Jos  $E$  on varma tapahtuma, ja vedolle  $\mathbf{1}_E$  on hinta  $p \neq 1$ , vastapuolelle syntyy varmasti voitto

$$(\mathbf{1}_E - p)x = (1 - p)x$$

Kun  $p > 1$  (vastaavasti  $p < 1$ ) vastapuoli saa mielivaltainen suuri voittoa valitsemalla  $x < 0$  (vastaavasti  $p > 1$ ). Jos  $E$  on mahdoton tapahtuma, vastapuolen voitto on varmasti

$$(\mathbf{1}_E - p)x = -px$$

jossa  $x < 0$  on mielivaltainen.

3. Olkoon ensin  $n = 2$ ,  $(E_1 \cap E_2) \in \mathcal{N}$ ,

sen lisäksi oletamme että  $(E_1 \cup E_2) \in \mathcal{V}$  (eli on varma tapahtuma). Siitä seuraa  $Pr(E_1 \cup E_2) = 1$ . Lineaarisisella systeemillä

$$\begin{cases} V(E_1) = (1 - p_1)y_1 - p_2y_2 = & \text{vastapuolen voitto kun } E_1 \text{ tapahtuu} \\ V(E_2) = -p_1y_1 + (1 - p_2)y_2 = & \text{vastapuolen voitto kun } E_2 \text{ tapahtuu} \end{cases}$$

on ratkaisu mille tahansa voitto-vektorille  $(V(E_1), V(E_2))$  jos ja vain jos kertoimien matriisi on kääntyvä, eli

$$\det \begin{pmatrix} (1 - p_1) & -p_2 \\ -p_1 & (1 - p_2) \end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 \neq 0$$

Estääkseen vastapuolta tekemistä riskitöntä voittoa, on välttämätöntä että

$$Pr(E_1) + Pr(E_2) = 1 = Pr(E_1 \cup E_2).$$

Kun  $n > 2$ ,  $E_i \cap E_j \in \mathcal{N}$  kun  $i \neq j$  ja,  $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \in \mathcal{V}$  (eli on varma), meklari on johdonmukainen jos ja vain jos

$$\det \begin{pmatrix} (1-p_1) & -p_2 & \dots & -p_n \\ -p_1 & (1-p_2) & \dots & -p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_1 & -p_2 & \dots & (1-p_n) \end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_n = 0$$

Tämä determinantti lasketaan induktiolla tai lineaari-algebran Sylvesterin lemman kautta:

**Lemma 0.0.1.** Jos  $A$  on  $n \times m$  ja  $B$  on  $m \times n$  matriisi, ja  $I_n$  on  $n \times n$  identiteetti matriisi,

$$\det(I_n + AB) = \det(I_m + BA)$$

Yleisemmin, kun  $(E_1 \cap E_2) \in \mathcal{N}$ , koska  $(E_1 \cup E_2 \cup (E_1 \cup E_2)^c) \in \mathcal{V}$ , seuraa

$$1 = Pr(E_1) + Pr(E_2) + Pr((E_1 \cup E_2)^c) = Pr(E_1) + Pr(E_2) + (1 - Pr(E_1 \cup E_2))$$

$$\text{siis } Pr(E_1 \cup E_2) = Pr(E_1) + Pr(E_2) \quad \square$$

Oletetaan että meklari on hinnoitellut johdonmukaisesti keskenään eisopivia tapahtumia  $E_1, \dots, E_n$  ja niiden yhdisteitä hinnoilla  $Pr(E_1), \dots, Pr(E_n)$ , jossa  $P$  on äärellisesti additiivinen.

Käsitellään vielä monimutkaisempaa vedonlyöntisopimusta ("satunnaissuuretta")

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \mathbf{1}_{E_x}$$

jossa

$$E_x := \bigcup_{1 \leq i \leq n: x_i = x} E_i = (\text{"X saa arvon } x\text{"}).$$

ja  $E_x = \emptyset$  jos  $x \neq x_i \forall i$ .

Vedonlyönninsopimus  $X$  maksaa vastapuolelle etukäteen sovittua summaa  $x_i \in \mathbb{R}$  silloin kun "sattuma"  $E_i$  tapahtuu.

Tämä sopimus on "toistettavissa" vedonlyönnin strategialla  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Koska arbitraasivapaassa hinnoittelusysteemissä hinnat ovat yksikäsitteisiä, seuraa että  $X$ :n ainoa johdonmukainen hinta (tulkinta: satunnaisuuden odotusarvo, englanniksi Expectation) on

$$\mathbb{E}_{Pr}(X) := \sum_{i=1}^n x_i Pr(E_i) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x Pr(E_x).$$

- Odotusarvo on lineaarinen: kun  $a, b$  ovat vakioita ja  $X, Y$  satunnaisia,

$$E_{Pr}(aX + bY) = aE_{Pr}(X) + bE_{Pr}(Y)$$

- Odotusarvo on positiivinen: jos  $(X \geq 0)$  on varma tapahtuma  $Pr$  todennäköisyyden suhteen, eli  $Pr(X \geq 0) = 1$ , seuraa

$$E_{Pr}(X) \geq 0$$

**Huomautus 0.0.1.** Olkoon

$$\mathcal{X} \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{1}(E_i) : n \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

vedonlyönninsopimusten osajoukko.

Matemaattisessa rahoitusteoriassa, karakterisoidaan arbitraasivapaita hintasysteemejä

$$c = (c(X) : X \in \mathcal{X})$$

**Lause 0.0.1.** ( Rahoitusteorian ensimmäinen päälause) Hintasysteemi  $c(\cdot)$  on arbitraasi-vapaa jos ja vain jos on olemassa hinnoittelu-todennäköisyys  $Pr$ , jolla  $Pr(E) = 0 \iff E \in \mathcal{N}$ , ja kaikille  $X \in \mathcal{X}$

$$c(X) = \mathbb{E}_{Pr}(X) = \sum_x x Pr(X = x).$$

Yleisesti  $Pr$  ei tarvitse olla yksikäsitteinen, voi olla useita hinnoittelutodennäköisyyksiä jotka generoivat samaa hintasysteemiä  $c(\cdot)$ .

**Todistus** ( $\Leftarrow$ ): Olkoon  $X_1, \dots, X_m$  satunnaisuureita ja  $Pr$  hinnoittelu-todennäköisyys, joka määrää hintasysteemiä

$$c_k = E_{Pr}(X_k) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x Pr(X_k = x), \quad k = 1, \dots, m.$$

Tässä oletamme että  $\{x : Pr(X_k = x) > 0\}$  on äärellinen,  $\forall k = 1, \dots, m$ .

Olkoon  $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$  vedonlyönti strategia jolla tapahtuma

$$\left\{ \sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) \geq 0 \right\} \in \mathcal{V}$$

on varma.

$$E_{Pr} \left( \sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) \right) = \sum_{k=1}^m \left( E_{Pr}(X_k) - c_k \right) = 0$$

seuraa että

$$\left\{ \sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) > 0 \right\} \in \mathcal{N}$$

on mahdoton, koska muuten

$$Pr \left( \sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) > 0 \right) > 0$$

josta seuraa ristiriita

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^m \left( E_{Pr}(X_k) - c_k \right) = E_{Pr} \left( \sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) \right) \\ &= E_{Pr} \left( \left( \sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) \right) \mathbf{1}_{\left\{ \sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) > 0 \right\}} \right) > 0. \end{aligned}$$

Implikaatio ( $\Rightarrow$ ) osoitetaan rahoitusteorian kurssilla konveksianalyysin argumentilla  $\square$

Arbitraasi-vapaassa tilanteessa, hinnoittelu-todennäköisyyden  $Pr$ :n avulla, määrittelemällä

$$c(Y) = \mathbb{E}_{Pr}(Y) = \sum_i y_i Pr(E_i)$$

laajennetaan alkuperäistä hintasysteemiä säilyttämällä arbitraasivapautta.

Kun on olemassa, hinnoittelutodennäköisyys  $Pr$  ei tarvitse olla yksikäsitteinen, siis jos hinta-systeemi  $(c(X) : X \in \mathcal{X})$  on arbitraasi-vapaa, sillä voi olla useita arbitraasi-vapaita laajennuksia.

**Huomautus 0.0.2.** Tässä johdannossa emme ole vielä paljastaneet että Kolmogorovin todennäköisyyden aksiomeissa tapahtumat  $E_i$  tulevat olemaan jonkun pistetapahtumien avaruuden  $\Omega$ :n osajoukkoja. Sen sijaan De Finetti kannatti minimaalista lähestymistapaa, jossa pistetapahtumien avaruutta  $\Omega$  ei edes tarvita.

**Todennäköisyys logiikan laajenuksena**<sup>1</sup> Vuonna 1949 fyysikko R.T. Cox osoitti miten De Finettin additiivisen todennäköisyyden aksiomat seuraavat kun laajennetaan perinteistä logikkaa epävarmoihin väitteisiin pitämällä kiinni minimaalisista tervejärkisistä ehdoista.

Olkoon  $A, B, C$  väitteitä (tapahtumia),  $I$  merkitsee (sinun) taustatietoa. Notaatio

$$(A|I) \geq (B|I)$$

tarkoittaa että taustatiedon  $I$ :n perusteella väite  $A$  on (sinulle) yhtä uskottava tai uskottavampi kuin  $B$  väiteettä.

- Vaatimus 1):  $\geq$  relaatio on täydellinen järjestys, eli on *transitiivinen*

$$(A|I) \geq (B|I) \text{ ja } (B|I) \geq (C|I) \text{ seuraa } (A|I) \geq (C|I), \quad (0.0.1)$$

ja taustatiedolla  $I$  kaikki väitteet ovat verrattavissa, eli

$$(A|I) \geq (B|I) \text{ tai } (B|I) \geq (A|I) \quad (0.0.2)$$

Kun molemmat ovat voimassa  $(B|I) = (A|I)$ , eli taustatiedolla  $I$ , väitteet  $A$  ja  $B$  ovat sinulle yhtä uskottavia.

---

<sup>1</sup>Tämä kappale voidaan sivuuttaa

Koska väitteiden järjestys on täydellinen, taustatiedon  $I$ :n perusteella voidaan asentaa jokaiselle väitteelle  $A$  uskottavuusaste joka on reaaliluku jota merkitsemme aluksi samalla notaatiolla  $(A|I)$ . Väitteiden järjestys palautuu reaalilukujen järjestykseen. Tämä uskottavuusaste-funktio ei ole tietenkään yksikäsitteinen. Näytämme että on olemassa funktionaali  $\pi(A|I)$  joka säilyttää  $\geq$  järjestyksen ja toteuttaa De Finettin additiivisen todennäköisyyden vaatimukset.

Jatkossa merkitään  $AB = A \cap B$ .

- Vaatimus 2) On olemassa kuvaus  $F(x, y)$  joka on kasvava ja derivoituva ja  $x, y$ :n suhteen

$$(AB|I) = F((A|I), (B|A, I)) = F((B|I), (A|B, I))$$

Siis  $(A|I)$  ja  $(B|AI)$  määrävät  $(AB|I)$  terveen järjen mukaisesti, ja joudutaan samaan arvoon arvioimalla ensin  $(B|I)$  ja sitten  $(A|B, I)$ .

Erityisesti

$$(ABC|I) = F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z)) \quad (0.0.3)$$

$$= F(u, z) = F(x, v) \quad (0.0.4)$$

jossa  $x = (A|I), y = (B|A, I), z = (C|AB, I), u = F(x, y), v = F(y, z)$

**Lemma 0.0.2.** *Vaatimuksista seuraa että on olemassa kasvava kuvaus  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jolla  $w(F(x, y)) = w(x) + w(y)$*

**Tod.** Olkoon  $F_1(x, y), F_2(x, y)$  osittaisderivaatat. Derivoimalla 0.0.3 saa-

daan

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F(F(x, y), z))}{\partial x} &= \frac{\partial(F(x, F(y, z)))}{\partial x} \\ \iff F_1(u, z)F_1(x, y) &= F_1(x, v), \\ \frac{\partial(F(F(x, y), z))}{\partial y} &= \frac{\partial(F(x, F(y, z)))}{\partial y} \\ \iff F_1(u, z)F_2(x, y) &= F_2(x, v)F_1(y, z), \\ \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)} &= \frac{F_2(x, v)}{F_1(x, v)}F_1(y, z) \\ \iff G(x, y) &= G(x, v)F_1(y, z) \\ \iff G(x, v)F_2(y, z) &= G(x, y)G(y, z) \text{ jossa } G(x, y) := \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)} \end{aligned}$$

Derivoimalla seuraa

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left( G(x, v)F_1(y, z) \right) = G_2(x, v)F_2(y, z)F_1(y, z) + G(x, v)F_{12}(y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( G(x, v)F_2(y, z) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( G(x, y)G(y, z) \right) \end{aligned}$$

eli  $G(x, y)G(y, z)$  ei riipu  $y$ :stä. Tämä pätee jos ja vain jos  $G$  on muotoa

$$G(x, y) = r \frac{H(x)}{H(y)}$$

Tästä seuraa

$$F_1(y, z) = \frac{H(v)}{H(y)} \quad F_2(y, z) = r \frac{H(v)}{H(z)}$$

Seuraa

$$\begin{aligned} dv &= dF(y, z) = F_1(y, z)dy + F_2(y, z)dz \\ \iff \frac{1}{H(v)}dv &= \frac{1}{H(y)}dy + r \frac{1}{H(z)}dz \end{aligned}$$

Olkoon

$$W(x) := \exp\left(\int_{-\infty}^x \frac{1}{H(t)} dt\right)$$

Seuraa kun  $v_0 = F(y_0, z_0)$

$$\begin{aligned} \frac{W(F(y, z))}{W(F(y_0, z_0))} &= \frac{W(v)}{W(v_0)} = \exp\left(\int_{v_0}^v \frac{1}{H(t)} dt\right) = \exp\left(\int_{F(y_0, z_0)}^{F(y, z)} \frac{1}{H(t)} dt\right) = \\ &= \exp\left(\int_{y_0}^y \frac{1}{H(t)} dt + r \int_{z_0}^z \frac{1}{H(s)} ds\right) = \exp\left(\int_{y_0}^y \frac{1}{H(t)} dt\right) \exp\left(r \int_{z_0}^z \frac{1}{H(s)} ds\right) = \\ &= \frac{W(y)}{W(y_0)} \left(\frac{W(z)}{W(z_0)}\right)^r \\ &\iff W(v) = W(F(y, z)) = cW(y)W(z)^r \\ &\text{jossa } c = \frac{W(F(y_0, z_0))}{W(y_0)W(z_0)^r} \text{ on vakio} \end{aligned}$$

Yhtälöstä 0.0.3

$$W(F(x, v)) = cW(x)W(v)^r = W(F(u, z)) = cW(u)W(z)^r$$

Tästä sijoittamalla  $W(v) = cW(y)W(z)^r$  saadaan

$$\begin{aligned} W(x)c^r W(y)^r W(z)^{r^2} &= W(u)W(z)^r = W(F(x, y))W(z)^r = W(x)W(y)^r W(z)^r \\ &\iff cW(z)^r = W(z) \quad \forall z \end{aligned}$$

joka pätee jos ja vain jos  $r = c = 1$ , eli

$$W(F(x, y)) = W(x)W(y)$$

Ottamalla  $w(x) := \log(|W(x)|)$ , saadaan

$$\begin{aligned} w(F(x, y)) &= \log(|W(F(x, y))|) = \log(|W(x)W(y)|) \\ &= \log(|W(x)|) + \log(|W(y)|) = w(x) + w(y) \quad \square \end{aligned}$$

Huomataan että  $w(A|I)$  säilyttää uskottavuusjärjestyksen, se mittaa väitteiden uskottavuutta eri asteikolla.

- Vaatimus 3) On olemassa kuvaus  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jolla  $w(\bar{A}|I) = f(w(A|I))$ , jossa  $\bar{A}$  on väitteen  $A$ :n negaatio.

Tästä seuraa  $f(f(x)) = x$ . Oletetaan nyt että  $\overline{B} \implies A$ , josta seuraa  $\overline{BA} = \overline{B}$ .

$$\begin{aligned}
 w(AB|I) &= w(A) + w(B|AI) \\
 &= w(A) + f(w(\overline{B}|AI)) \\
 &= w(A) + f(w(\overline{BA}|I) - w(A|I)) \\
 &= w(A) + f(w(\overline{B}|I) - w(A|I)) \\
 &= w(A) + f(f(w(B|I)) - w(A|I)) \\
 &= x + f(f(y) - x) \\
 &= y + f(f(x) - y)
 \end{aligned}$$

jossa  $x = w(A), y = w(B|I)$

ja viimeinen yhtälö seuraa vaihtamalla  $A$  ja  $B$ :n roolit.

**Lemma 0.0.3.** *On olemassa  $c > 0$  jolla*

$$f(x) = \frac{1}{c} \log(1 - \exp(cx))$$

**Tod.** Olkoon

$$\begin{aligned}
 u &:= f(y) - x, & v &:= f(x) - y, \\
 x + f(u) &= y + f(v) \\
 \frac{\partial(x + f(u))}{\partial x} &= 1 - f'(u) = \frac{\partial(y + f(v))}{\partial x} = f'(v)f'(x) \\
 \frac{\partial(x + f(u))}{\partial y} &= f'(u)f'(y) = \frac{\partial(y + f(v))}{\partial x} = 1 - f'(v) \\
 \frac{\partial^2(x + f(u))}{\partial y \partial x} &= -f''(u)f'(y) = -f''(v)f'(x) \\
 \iff \frac{f''(u)}{f'(u)(1 - f'(u))} &= \frac{f''(v)}{f'(v)(1 - f'(v))} = c
 \end{aligned}$$

Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{d}{dx} \log(|f'(x)|) = c(1 - f'(x))$$

integroimalla

$$\begin{aligned}
 \log(f'(x)) &= \log(f'(x_0)) + c \int_{x_0}^x (1 - f'(t)) dt = \\
 \log(f'(x_0)) + c((x - x_0) - (f(x) - f(x_0))) &= a + c(x - f(x)) \\
 f'(x) &= A \exp(c(x - f(x))) \\
 \exp(cf(x)) df(x) &= A \exp(cx) dx \\
 d \exp(cf(x)) &= \frac{A}{c} \exp(cx) dx \\
 \exp(cf(x)) &= \exp(cf(x_0)) + \frac{A}{c} \int_{x_0}^x \exp(ct) dt = \\
 &= \exp(cf(x_0)) + \frac{A}{c^2} (\exp(cx) - \exp(cx_0)) = k + B \exp(cx) \\
 \implies f(x) &= \frac{1}{c} \log(k + b \exp(cx))
 \end{aligned}$$

Koska

$$x + f(f(y) - x) = y + f(f(x) - y)$$

saadaan

$$\begin{aligned}
 x + \frac{1}{c} \log(k + b \exp(\log(k + b \exp(cy)) - cx)) &= \\
 x + \frac{1}{c} \log(k + b(k + b \exp(cy)) \exp(-cx)) &= \\
 x + \frac{1}{c} \log(k + bk \exp(-cx) + b^2 \exp(c(y - x))) &= \\
 = \frac{1}{c} \log(k \exp(cx) + bk + b^2 \exp(cy)) = \frac{1}{c} \log(k \exp(cy) + bk + b^2 \exp(cx))
 \end{aligned}$$

josta seuraa että  $b^2 = k$ , siis

$$f(x) = \frac{1}{c} \log(b^2 + b \exp(cx))$$

Koska  $f(f(x)) = x$ ,

$$\frac{1}{c} \log(b^2 + b^3 + b^2 \exp(cx)) = x \quad \forall x$$

seuraa  $b^2 + b^3 = 0$  ja  $b^2 = 1$ , josta seuraa  $b = -1$  ja

$$f(x) = \frac{1}{c} \log(1 - \exp(cx)) \quad \square$$

Otetaan uusi uskottavuus-skaala  $Pr(A|I) = \exp(cw(\bar{A}|I))$ . Seuraa lem-  
masta että

$$Pr(A|I) = 1 - Pr(\bar{A}),$$

$$Pr(\bar{A}|I) \in [0, 1]$$

$$Pr(AB|I) = Pr(A|I)Pr(B|A, I) = Pr(B|I)Pr(A|B, I)$$

Kutsutaan  $Pr(A|I)$  väitteen  $A$ :n todennäköisyydeksi taustatiedolla  $I$ .

Huomataan että uskottavuutta voidaan mitata eri skaalalla, säilyttä-  
mällä järjestyksen, esimerkiksi vedonlyöntisuhteen (englanniksi odds ra-  
tio) skaalalla:

$$\phi(A|I) = \frac{Pr(A|I)}{1 - Pr(A|I)} \in \mathbb{R}$$

Vedonlyöntisuhde ei sovi vedonlyönnin hinnaksi, koska ei täytä De Finet-  
tin additiivisuuden vaatimusta.

Todennäköisyyskaala on laskennallisesti kätevämpi, laskenta perus-  
tuu tulon ja summan operaatioihin:

$$Pr(A + B|I) = Pr(A|I) + Pr(B|I) \quad \text{kun } B \subseteq \bar{A},$$

$$Pr(AB|I) = Pr(A|I)Pr(B|AI) = Pr(B|I)Pr(A|BI)$$

**Huomautus 0.0.3.** *Todennäköisyys on aina ehdollinen todennäköisyys, joka riip-  
puu taustatiedoista. Uskottavuus-järjestys määrää todennäköisyyden yksikäsit-  
teisesti. Mittapuuna voidaan käyttää hypoteettista arpajaispeliä, arpalipuilla  $\{1, 2, \dots, N\}$   
jossa  $X$  on ensimmäiseksi arvottu arpa.*

Olkoon väite  $A_k = \{X = k\}$ , ja oletamme että  $(A_k|I) = (A_\ell|I) \forall k, \ell$  eli  
(sinun mielestä taustatietojen perusteella) kaikki arpajaispelin tulokset ovat yh-  
tä uskottavia. Tämä symmetriaa kutsutaan yhdentekevyyden periaatteeksi.  
Symmetriasta ja additiivisuudesta ja seuraa välittömästi että todennäköisyysas-  
teikolla  $Pr(A_k|I) = 1/N$ .

Tämän hypoteettisen pelin todennäköisyyksiä voidaan sitten käyttää mittapuuna. Olkoon  $B$  väite, jolla ei tarvitse olla tekemisessä meidän hypoteettisen arpapelin kanssa, ja

$$M := \min \left\{ 1 \leq k \leq N : (B|I) \leq (A_1 + \dots + A_k|I) \right\}$$

Seuraa

$$\frac{(M-1)}{N} < Pr(B|I) \leq \frac{M}{N}$$

Silloin kun  $N$  kasvaa, nähdään että väitteiden uskottavuuden järjestys määrää yksikäsitteisesti  $Pr(B|I)$ .

Huomataan kuitenkin että samalla taustatiedolla eri henkilöt saattavat asettaa väitteitä eri uskottavuusjärjestykseen, siksi todennäköisyys ei ole yksikäsitteinen. Objektiiivisessa Bayes-teoriassa valitaan todennäköisyysmitta joka on vähiten informatiivinen (jolla on maksimaalinen entropia) olleessaan yhteensopiva taustatietojen kanssa.



# Kirjallisuutta

- [1] Jaynes ET, *Probability theory, the logic of science*. Cambridge 2003.
- [2] Sivia DS, Skilling J: *Data Analysis, a Bayesian tutorial*. 2nd edition Oxford 2006
- [3] De Finetti B: *Theory of probability: a critical introductory treatment* Wiley 1972



# Luku 1

## Kolmogorovin aksioomat.

De Finetti osoitti, että ainoa johdonmukainen tapa hinnoitella epävarmoja tapahtumia on additiivisella todennäköisyydellä. Filosofisesti voidaan kiistaanalaistaa numeroituvan additiivisuuden aksiooman tarpellisuus, näin teki De Finetti joka kehitti oman äärellisesti-additiivisen todennäköisyyden teorian. Kuitenkin, todennäköisyyden numeroituva- eli  $\sigma$ -additiivisuus on luonteva oletus rajatapahtumien käsittelemisessä.

Vuonna 1933, venäläinen matemaatikko Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) julkaisi teoksen *Foundation of the Theory of Probability*, joka sisälsi modernin todennäköisysteorian aksioomeja, todennäköisyyden konstruktiota ääretön-ulotteisessa tuloavaruudessa, sekä ehdollisen todennäköisyyden yleistä teoriaa.

**Määritelmä 1.0.1** (Algebrat ja  $\sigma$ -algebrat). *Olkoon  $\Omega$  abstrakti joukko.  $2^\Omega$  on  $\Omega$ :n potenssijoukko, eli kaikkien  $\Omega$ :n alijoukkojen kokoelma.*

*Olkoon  $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$  (mahdollisesti pienempi) alijoukkojen perhe. Sanotaan*

•  *$\mathcal{A}$  algebraksi kun*

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2.  $A \in \mathcal{A} \implies A^c = (\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$
3.  $A, B \in \mathcal{A} \implies (A \cup B) \in \mathcal{A}$

*Kun huomataan että  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ , määritelmästä seuraa että algebra on suljettu äärellisten leikkauksen ja yhdisteen operaatioiden suhteen.*

- Algebra  $\mathcal{A}$  on  $\sigma$ -algebra kun se on suljettu numeroituvan yhdisteen suhteen

$$\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A} \implies \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \in \mathcal{A}$$

Seuraa että  $\sigma$ -algebra on suljettu myös numeroituvan leikkauksen suhteen.

- Pari  $(\Omega, \mathcal{A})$  jossa  $\mathcal{A}$  on  $\Omega$ :n  $\sigma$ -algebra kutsutaan mitta-avaruudeksi tai todennäköisyysavaruudeksi.
- $\sigma$ -algebran jäseniä  $A \in \mathcal{A}$  kutsutaan mitallisiksi joukoiksi tai tapahtumiksi.

**Määritelmä 1.0.2.** Olkoon  $(\Omega, \mathcal{A})$  todennäköisyysavaruus, jossa  $\mathcal{A}$  on  $\Omega$ :n  $\sigma$ -algebra.

- Kuvaus  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  on (positiivinen) **mitta** kun  $\mu(\emptyset) = 0$  ja  $\mu$  on  $\sigma$ -additiivinen, eli kaikille jonoille  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$  joilla  $A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall m \neq n$ ,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

- Mitta  $\mu$  on **äärellinen** kun  $\mu(\Omega) < +\infty$ , ja on  **$\sigma$ -äärellinen** jos on olemassa numeroituva mitallinen peite  $\{\Omega_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$  jolla

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \quad \text{ja} \quad \mu(\Omega_n) < \infty \quad \forall n.$$

- Positiivinen mitta  $\mu$  on **todennäköisyysmitta** kun  $\mu(\Omega) = 1$ .

**Huomautus 1.0.1.** Normalisoimalla, saadaan äärellisestä mitasta  $\mu$  todennäköisyysmitta:

$$P(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

**Tehtävä 1.0.1.** Äärellisesti additiivinen todennäköisyys voi olla melko erikoinen: Olkoon  $\Omega = \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ tai } A^c \text{ on äärellinen}\}$$

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1], \quad \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{jos } A \text{ on äärellinen} \\ 1 & \text{jos } A^c \text{ on äärellinen} \end{cases}$$

Osoita että

- $\mathcal{A}$  on algebra mutta ei ole  $\sigma$ -algebra.
- $\mu$  on äärellisesti additiivinen mutta ei  $\sigma$ -additiivinen todennäköisyys.

**Huomautus 1.0.2.** Potenssijoukko  $2^\Omega$  on  $\sigma$ -algebra. Onko mahdollista valita aina todennäköisyysavaruudeksi  $(\Omega, 2^\Omega)$ , ja määrittellä  $P(B)$  jokaiselle alijoukolle  $B \subseteq \Omega$ ?

On olemassa esimerkkejä (kts. Banachin ja Tarskin paradoksi) todennäköisyyskolmikosta  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , jossa todennäköisyysmitan  $P$ :n laajennus  $\sigma$ -additiiviseksi mitaksi  $P^* : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$  ei ole olemassa. Kun  $\Omega$  on ei-numeroituva, potenssijoukko saattaa olla liian suuri.

**Esimerkki 1.0.1 (Vitali).** Olkoon  $\Omega = \mathbb{T} = \{z = e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{T}) = \sigma(\mathbb{T}\text{:n avoimet välit})$  eli pienin  $\sigma$ -algebra joka sisältää kaikki ympyrän avoimet välit  $(z, w)$  (avoimet karteet).

Määrittellemme todennäköisyysmitan ensin avointen välien kautta

$$P((z, w)) = \frac{\text{pituus}((z, w))}{2\pi} = \frac{|\theta - \psi|}{2\pi}$$

jossa  $w = e^{i\psi}$ .

Caratheodoryn lauseen (1.1.1) avulla voidaan laajentaa  $P$ :n koko Borelin  $\sigma$ -algebralle  $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ . Osoitamme kuitenkin että  $P$  ei laajene  $\sigma$ -additiiviseksi mitaksi koko potenssijoukolle  $2^\Omega$ .

Määritellään ekvivalenssirelaatio

$$z = e^{i\theta} \sim w = e^{i\psi} \iff \left( \frac{\theta - \psi}{2\pi} \right) \in \mathbb{Q}$$

Ylinumeroituvan valinnan aksiooman avulla voidaan valita jokaisesta ekvivalenssiluokasta yhden jäsenen ja muodostaa joukon  $E$ . Määritellään

$$E_q = \{ze^{i2\pi q} : z \in E\}, \quad q \in \mathbb{Q}.$$

Koska  $E$  koostuu ekvivalenssiluokkien edustajista, seuraa  $E_0 = E$ ,  $E_q = E_r$  kun  $q \sim r$  ja  $(E_q \cap E_r) = \emptyset$  kun  $q \not\sim r \pmod{2\pi}$ , jossa kun  $q, r \in \mathbb{Q}$ ,  $q \sim r \iff q = r \pmod{2\pi}$ . Näillä notaatioilla,

$$\mathbb{T} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}/\sim} E_q.$$

Huomataan että mitta  $P$  on rotaatio-invariantti  $\mathbb{T}$ :n avoimille väleille ja niiden virittämällä  $\sigma$ -algebralla koska

$$\text{pituus}(z, w) = \text{pituus}(yz, yw) \text{ kun } y, z, w \in \mathbb{T}.$$

Jos  $P(E)$  olisi hyvin määritelty, seuraisi  $P(E_q) = P(E)$ , mikä johtaa riistiriitaan, koska  $\sigma$ -additiivisuudesta seuraa

$$1 = P(\mathbb{T}) = P\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}/\sim} E_q\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}/\sim} P(E_q) = \infty \times P(E) \quad \square$$

## 1.1 Mitan laajennus

**Määritelmä 1.1.1.** Olkoon  $P$  todennäköisyysmitta todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Kun  $A \in \mathcal{A}$  ja  $P(A) = 1$  sanotaan, että  $A$  tapahtuu  $P$ -melkein varmasti (lyhennys: *m.v.*) ja  $A^c$  on  $P$ -nollajoukko.

Sen lisäksi jos  $B \notin \mathcal{A}$  mutta  $B \supseteq A$  (vastaavasti  $B \subseteq A$ ) jossa  $A \in \mathcal{A}$  ja  $P(A) = 1$  (vastaavasti  $P(A) = 0$ ), asetetaan  $P(B) = 1$  (vastaavasti  $P(B) = 0$ ).

**Lemma 1.1.1** (mitan monotoninen suppeneminen). Olkoon  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  mittaavaruus. Olkoon  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$  tapahtumien jono jolla  $A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall n$ ,

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}, \text{ ja merkitään } A_n \uparrow A.$$

Silloin  $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$  kun  $n \uparrow \infty$ .

Vastaavasti kun  $B_n \supseteq B_{n+1} \in \mathcal{A} \quad \forall n$  ja

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}, \text{ merkitään } B_n \downarrow B.$$

Silloin  $\mu(B_n) \downarrow \mu(B)$ .

Olkoon  $C_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n \in \mathcal{A}$ .

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \text{ jossa } C_i \cap C_j = \emptyset \text{ kun } i \neq j.$$

$P$  mitan  $\sigma$ -additiivisuudesta

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(C_k) = \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{k=1}^n P(C_k) = \lim_{n \uparrow \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n C_k\right) = \lim_{n \uparrow \infty} P(A_n) \quad \square$$

Toinen väite seuraa ottamalla komplementtijoukkoja, joilla

$$P(B^c) = (1 - P(B)).$$

**Lemma 1.1.2.** *P-nollajoukkojen numeroituva yhdiste on P-nollajoukko. P-melkein varma tapahtumien numeroituva leikkaus on P-melkein varma.*

**Tehtävä 1.1.1.** *Olkoon  $(\Omega, \mathcal{A})$  todennäköisyysavaruus, ja  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  additiivinen mitta. Osoita että  $P$  on  $\sigma$ -additiivinen jos ja vain jos*

$$\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}, \quad B_n \downarrow \emptyset \implies P(B_n) \downarrow 0 \text{ kun } n \uparrow \infty$$

**Määritelmä 1.1.2.** *Olkoon  $(S, \mathcal{T})$  Topologinen avaruus, jossa topologia  $\mathcal{T}$  koostuu kaikista  $S$ :n avoimista joukoista. **Borelin**  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(S) := \sigma(\mathcal{T})$  on avointen joukkojen virittämä  $\sigma$ -algebra.*

$\mathcal{B}(S)$ :n jäseniä kutsutaan Borelin joukoiksi. Koska yleinen Borelin joukko voi olla liian monimutkainen esitettäväksi, on hyödyllistä tietää yksinkertaisempi joukkoperhe joka virittää  $\mathcal{B}(S)$ :n numeroituvien yhdisteiden ja leikkausten kautta.

Tässä vaiheessa on hyvä palauttaa mieleen topologian aksioomat:  $\emptyset$  ja koko avaruus  $S$  ovat avoimia, avointen joukkojen mielivaltainen (myös ylinumeroituva) yhdiste on avoin, ja avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin.

**Esimerkki 1.1.1.** *Olkoon  $S = \mathbb{R}$ , silloin*

$$\mathcal{A} := \sigma\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

*Todistus: koska*

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, x + n^{-1})$$

*on Borelin joukko, seuraa että  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Kun  $a < b$ ,*

$$(a, b) = (-\infty, a]^c \cap \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, b - n^{-1}] \right) \in \mathcal{A}$$

*Olkoon  $U \subseteq \mathbb{R}$  avoin. Jokaiselle  $q \in U \cap \mathbb{Q}$  on olemassa  $\varepsilon_q > 0$  jolla*

$(q - \varepsilon_q, q + \varepsilon_q) \subseteq U$ . Koska  $\mathbb{Q}$  on tiheä  $\mathbb{R}$ :ssa, seuraa että

$$U = \bigcup_{q \in U \cap \mathbb{Q}} (q - \varepsilon_q, q + \varepsilon_q)$$

jossa yhdiste on numeroituva. Tästä seuraa että  $U \in \mathcal{S}$  ja siksi  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}$ .

**Mitan määräys ja laajennukset** Tämä materiaali pohjautuu Williamsin kirjaan *Probability with Martingales*. Charatheodoryn lausetta voit myös lukea suomeksi Elfving ja Tuomisen kirjasta.

**Määritelmä 1.1.3.** Joukkoperhettä  $\mathcal{D} \subseteq 2^\Omega$  kutsutaan  $d$ -luokaksi kun

1.  $\Omega \in \mathcal{D}$ .
2.  $A, B \in \mathcal{D}, A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathcal{D}$ .
3.  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}, A_n \uparrow A \implies A \in \mathcal{D}$ .

**Määritelmä 1.1.4.** Joukkoperhe  $\mathcal{I} \subseteq 2^\Omega$  kutsutaan  $\pi$ -luokaksi jos on suljettu äärellisen leikkauksen suhteen:

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I} \implies I_1 \cap I_2 \in \mathcal{I}$$

**Tehtävä 1.1.2.** Mielivaltainen  $\pi$ (vastaavasti  $d$ )-luokkien, leikkaus on  $\pi$ (vastaavasti  $d$ )-luokka. Eli

$$d(\mathcal{C}) = \bigcap_{d\text{-luokat } \mathcal{I} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{I}$$

on pienin  $\mathcal{C}$ :n sisältävä  $d$ -luokka, ja

$$\pi(\mathcal{C}) = \bigcap_{\pi\text{-luokat } \mathcal{J} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{J}$$

on pienin  $\mathcal{C}$ :n sisältävä  $\pi$ -luokka. Myös

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\sigma\text{-algebrat } \mathcal{A} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{A}$$

on pienin  $\mathcal{C}$ :n sisältävä  $\sigma$ -algebra.

**Lemma 1.1.3** (Dynkin). 1. Joukkoperhe  $\mathcal{C}$  on  $\sigma$ -algebra jos ja vain jos on sekä  $\pi$ -luokka että  $d$ -luokka.

2. Jos  $\mathcal{I}$  on  $\pi$ -luokka, pienin  $d$ -luokka joka sisältää  $\mathcal{I}$  on  $\sigma$ -algebra, siis  $d(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I})$

1. Tod. Selvästi  $\sigma$ -algebra on sekä  $d$ - että  $\pi$ -luokka. Toisinpäin riittää osoittaa, että numeroituvan yhdisteen ominaisuus on voimassa. Olkoon  $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$  oletuksesta seuraa että

$$A_n := B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = (B_1^c \cap B_2^c \cap \dots \cap B_n^c)^c \in \mathcal{C}$$

$$A_n \uparrow A := \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \in \mathcal{C} \quad \square$$

2. Tod. Lemman ensimmäisestä osasta riittää osoittaa että  $d(\mathcal{I})$  on  $\pi$ -luokka. Osoitetaan ensin että

$$\mathcal{D}_1 := \{B \in d(\mathcal{I}) : B \cap E \in d(\mathcal{I}) \forall E \in \mathcal{I}\}, \text{ jossa } \mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}_1 \subseteq d(\mathcal{I})$$

on  $d$ -luokka:

$$\Omega \in \mathcal{D}_1, \text{ koska } \Omega \in d(\mathcal{I}), (\Omega \cap E) = E \in \mathcal{I} \forall E \in \mathcal{I}.$$

Jos  $B_1 \subseteq B_2, B_i \in \mathcal{D}_1, i = 1, 2, (B_2 \setminus B_1) \in d(\mathcal{I}),$  ja  $\forall E \in \mathcal{I}, (B_2 \setminus B_1) \cap E = (B_2 \cap E) \setminus (B_1 \cap E)$ . Nyt  $(B_i \cap E) \in d(\mathcal{I}), i = 1, 2$  ( $\mathcal{D}_1$  määritelmä), ja koska  $d(\mathcal{I})$  on  $d$ -luokka, seuraa että  $(B_2 \setminus B_1) \cap E \in d(\mathcal{I}) \forall E \in \mathcal{I}$ , siis  $(B_2 \setminus B_1) \in \mathcal{D}_1$ .

Samoin, kun  $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}_1, B_n \uparrow B = \bigcup_n B_n$  ja  $E \in \mathcal{I}$ ,

$$B \cap E = \bigcup_n (B_n \cap E)$$

jossa  $(B_n \cap E) \uparrow (B \cap E)$ . Nyt  $(B_n \cap E) \in d(\mathcal{I})$  ( $\mathcal{D}_1$ -määritelmä) ja koska  $d(\mathcal{I})$  on  $d$ -luokka seuraa että  $(B \cap E) \in \mathcal{D}_1 \forall E \in \mathcal{I}$ . Siis on osoitettu että  $\mathcal{D}_1$  on  $d$ -luokka. Koska  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}_1 \subseteq d(\mathcal{I})$ , seuraa että  $\mathcal{D}_1 = d(\mathcal{I})$ .

Olkoon nyt

$$\mathcal{D}_2 := \{B \in d(\mathcal{I}) : B \cap A \in d(\mathcal{I}) \forall A \in d(\mathcal{I})\} \subseteq d(\mathcal{I})$$

Seuraa myös että  $\mathcal{D}_2 \supseteq \mathcal{I}$ , koska olemme osoittaneet että jos  $E \in \mathcal{I}, B \in \mathcal{D}_1 = d(\mathcal{I})$  silloin  $(E \cap B) \in d(\mathcal{I})$ .

Kuten edellisissä askeleissa voidaan osoittaa että  $\mathcal{D}_2$  on  $d$ -luokka, ja siksi  $\mathcal{D}_2 = d(\mathcal{I})$ . Tästä seuraa että  $d$ -luokka  $d(\mathcal{I})$  on  $\pi$ -luokka, ja lemmän ensimmäisestä osasta seuraa että  $d(\mathcal{I})$  on  $\sigma$ -algebra. Yleisesti  $d(\mathcal{I}) \subseteq \sigma(\mathcal{I})$ , koska  $d(\mathcal{I})$  on  $\sigma$ -algebra joka sisältää  $\mathcal{I}$ , seuraa että  $d(\mathcal{I}) \supseteq \sigma(\mathcal{I})$ , siis  $d(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I})$   $\square$

**Lause 1.1.1** (Laajennuksen yksikäsitteisyys). *Olkoon  $\mathcal{I}$   $\pi$ -luokka,  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{I})$ ,  $P$  ja  $Q$  todennäköisyysmittoja todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{A})$ , jolla  $P(\Omega) = Q(\Omega) = 1$  ja  $P(I) = Q(I) \quad \forall I \in \mathcal{I}$ . Silloin  $P(A) = Q(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$ .*

Tod. Olkoon

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : Q(A) = P(A)\} \subseteq \mathcal{A}$$

$\mathcal{D}$  on  $d$ -luokka:  $\Omega \in \mathcal{D}$  (oletus) jos  $A, B \in \mathcal{D}, A \subseteq B$ ,

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) = Q(B) - Q(A) = Q(B \setminus A)$$

koska  $P, Q$  ovat todennäköisyysmittoja  $(\Omega, \mathcal{A})$ -avaruudessa.

Jos  $A_n \uparrow A, A_n \in \mathcal{D}, A \in \mathcal{A}$ , lemmasta (1.1.1) seuraa

$$P(A) = \lim_n P(A_n) = \lim_n Q(A_n) = Q(A)$$

josta seuraa että  $A \in \mathcal{D}$ . Koska  $\mathcal{D}$  on  $d$ -luokka, ja oletuksesta  $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{I}$  joka on  $\pi$ -luokka, Dynkin lemmasta 1.1.3 seuraa että  $\mathcal{D} \supseteq \sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{A}$ , eli  $\mathcal{D} = \mathcal{A}$   $\square$ .

**Esimerkki 1.1.2.** *Kun  $\Omega = \mathbb{R}$ , joukkoperhe*

$$\mathcal{I} := \{(-\infty, t], t \in \mathbb{R}\}$$

on  $\pi$ -luokka, ja  $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  (Borelin  $\sigma$ -algebra). Kun  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , todennäköisyysavaruudessa  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  on olemassa korkeintaan yksi todennäköisyysmitta  $P$  jolla  $F(t) := P((-\infty, t]) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

Riittävät ja välttämättömät ehdot todennäköisyyssmitan  $P$ :n olemassaololle ovat:

kuvaus  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  on ei-vähenevä, oikealta jatkuva ja  $\lim_{t \uparrow +\infty} F(t) = 1$ ,  $\lim_{t \uparrow +\infty} F(-t) = 0$ .

Eugen Dynkin(1924-2014) oli Neuvostoliittolainen ja Ameriikkalainen matemaatikko. Hänellä on tuloksia todennäköisysteoriassa (Markovin prosessesisistä), ja algebrassa (Lie ryhmistä, Lie algebroista).

**Teorema 1.1.1** (Caratheodoryn laajennuslause). Olkoon  $\mathcal{A}_0$   $\Omega$ :n tapahtumien algebra, ja olkoon  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$ .

Jos kuvaus  $\lambda_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, \infty]$  on  $\sigma$ -additiivinen, on olemassa yksikäsitteinen  $\sigma$ -additiivinen mittalaajennus  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  jolla  $\lambda(A) = \lambda_0(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}_0$ .

Tod. Laajennuksen yksikäsitteisyys on osoitettu lemmassa (1.1.1). Olemassaolon todistus on jaettu eri vaiheisiin:

**Esimerkki 1.1.3.** Olkoon  $\mathcal{Q}$  todennäköisyyssmittojen kokoelma samalla todennäköisyysavaruudella  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Silloin

$$\lambda(A) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} Q(A), \quad A \in \mathcal{A},$$

on ulkomitta (harjoitustehtävä).

**Lemma 1.1.4.** Olkoon  $\mathcal{A}_0 \subseteq 2^\Omega$  algebra, ja mielivaltainen kuvaus  $\lambda : \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, +\infty]$  jolla  $\lambda(\emptyset) = 0$ .

Sanotaan että  $L \in \mathcal{A}_0$  on  $\lambda$ -joukko jos se jakaa siististi  $\mathcal{A}_0$ :n seuraavalla tavalla:

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap L) + \lambda(A \cap L^c), \quad \forall A \in \mathcal{A}_0$$

- $\lambda$ -joukkojen kokoelma  $\mathcal{L}_0$  on algebra ja  $\lambda : \mathcal{L}_0 \rightarrow [0, +\infty]$  on äärellisesti additiivinen.

- Jos  $L_1, L_2, \dots, L_n \in \mathcal{L}_0$ ,  $L_i \cap L_j = \emptyset$  kun  $i \neq j$ ,  $A \in \mathcal{A}_0$ ,

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^n (L_k \cap A)\right) = \sum_{k=1}^n \lambda(L_k \cap A)$$

Tod. Selvästi  $\Omega$  on  $\lambda$ -joukko ja  $\lambda$ -joukon komplementti on  $\lambda$ -joukko.

Olkoon  $L_1, L_2$   $\lambda$ -joukot. Osoitamme että  $L = (L_1 \cap L_2) \in \mathcal{L}_0$

$L^c \cap L_2 = L^c \cap L_1$ ,  $L^c \cap L_2^c = L_2^c$ . Kun  $A \in \mathcal{A}_0$ , koska  $L_2$  on  $\lambda$ -joukko

$$\lambda(A) = \lambda(L_2 \cap A) + \lambda(L_2^c \cap A)$$

$$\lambda(L^c \cap A) = \lambda(L_2 \cap (L^c \cap A)) + \lambda(L_2^c \cap (L^c \cap A)) = \lambda(L_2 \cap L_1^c \cap A) + \lambda(L_2^c \cap A)$$

$$\lambda(L_2 \cap A) = \lambda(L_1 \cap L_2 \cap A) + \lambda(L_1^c \cap L_2 \cap A) \text{ (koska } L_1 \text{ on } \lambda\text{-joukko)}$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \lambda(L_1 \cap L_2 \cap A) + \lambda(L_1^c \cap L_2 \cap A) + \lambda(L_2^c \cap A) \\ &= \lambda(L \cap A) + \lambda(L^c \cap A) - \lambda(L_2^c \cap A) + \lambda(L_2^c \cap A), \end{aligned}$$

siis  $L = (L_1 \cap L_2)$  on  $\lambda$ -joukko. Komplementin avulla näemme että myös  $(L_1 \cup L_2)$  on  $\lambda$ -joukko, siis  $\mathcal{L}_0$  on algebra.

Kun  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_0$ ,  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ ,  $A \in \mathcal{A}_0$ , koska  $L_1^c \supseteq L_2$ ,

$$\lambda(A \cap (L_1 \cup L_2)) = \lambda(A \cap (L_1 \cup L_2) \cap L_1) + \lambda(A \cap (L_1 \cup L_2) \cap L_1^c) = \lambda(A \cap L_1) + \lambda(A \cap L_2)$$

Äärellinen additiivisuus seuraa kun  $A = \Omega$   $\square$ .

**Määritelmä 1.1.5.** Olkoon  $(\Omega, \mathcal{A})$  todennäköisyysavaruus.

Kuvaus  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  on ulkomitta (engl. outer measure) jos

1.  $\lambda(\emptyset) = 0$ ,
2.  $A_1 \subseteq A_2$ ,  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\implies \lambda(A_1) \leq \lambda(A_2)$
3.  $\lambda$  on ali- $\sigma$ -additiivinen: kun  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ ,

$$\lambda\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \lambda(A_n)$$

**Lemma 1.1.5** (Caratheodory). Olkoon  $\lambda$ -ulkomitta todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Joukkoperhe

$$\mathcal{L} = \{L \in \mathcal{A} : L \text{ on } \lambda\text{-joukko}\}$$

on  $\sigma$ -algebra ja kuvaus  $\lambda : \mathcal{L} \rightarrow [0, +\infty]$  on  $\sigma$ -additiivinen mitta.

Tod. Lemman (1.1.4) nojalla jää osoitettavaksi että kun  $\{L_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}$ ,  $L_i \cap L_j = \emptyset$  kun  $i \neq j$ , seuraa

$$L = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n \right) \in \mathcal{L} \text{ ja } \lambda(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(L_n) .$$

Koska  $\lambda$  on sub- $\sigma$ -additiivinen, kun  $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) \leq \lambda(A \cap L) + \lambda(A \cap L^c)$$

Olkoon  $M_n := \bigcup_{k \leq n} L_k$ . Lemmasta (1.1.4) seuraa että  $M_n \in \mathcal{L}$  (koska  $\mathcal{L}$  on algebra), eli kaikille  $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \lambda(A \cap M_n^c) + \lambda(A \cap M_n) \geq \lambda(A \cap L^c) + \lambda(A \cap M_n) \\ &= \lambda(A \cap L^c) + \sum_{k=1}^n \lambda(A \cap L_k) \end{aligned}$$

koska  $\lambda$  on ali- $\sigma$ -additiivinen  $\mathcal{A}$ :ssa ja äärellisesti additiivinen  $\mathcal{L}$ :ssa. Tämä pätee jokaiselle  $n \in \mathbb{N}$  eli

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap L^c) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A \cap L_k) \geq \lambda(A \cap L^c) + \lambda(A \cap L)$$

Ali-additiivisuudesta seuraa  $\lambda(A) = \lambda(A \cap L) + \lambda(A \cap L^c)$ , eli  $L \in \mathcal{L}$ . Kun sijoitetaan  $A=L$ ,  $\sigma$ -additiivisuus seuraa

$$\lambda(L) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(L_k) \quad \square$$

*Caratheodoryn laajennuslauseen (1.1.1) todistus:*

Olkoon  $\mathcal{G} = 2^\Omega$ , ja määritellään

$$\lambda(G) := \inf_{\{F_n\}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_0(F_n) \quad \forall G \subseteq \Omega$$

jossa infimum otetaan yli tapahtumien jonot  $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}_0$  jolla  $\bigcup_n F_n \supseteq G$ .

**a)** Kuvaus  $\lambda : 2^\Omega \rightarrow [0, +\infty]$  on ulkomitta.

Tod. Selvästi  $\lambda(\emptyset) = 0$  ja  $\lambda$  on kasvava. Olkoon jono  $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq 2^\Omega$ , ja  $\varepsilon > 0$ . Jokaiselle  $n$ :lle on olemassa jono  $\{F_{n,k} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}_0$  jolla

$$G_n \subseteq \bigcup_k F_{n,k} \quad \text{ja} \quad \lambda(G_n) \leq \sum_k \lambda_0(F_{n,k}) \leq \lambda(G_n) + \varepsilon 2^{-n}.$$

Olkoon  $G = \bigcup_n G_n \subseteq \bigcup_n \bigcup_k F_{n,k}$ . Koska joukot  $\{F_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}$  peittävät  $G$ :n

$$\lambda(G) \leq \sum_n \sum_k \lambda_0(F_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(G_n) + \varepsilon$$

Koska  $\varepsilon > 0$  oli mielivaltainen, ali- $\sigma$ -additiivisuus seuraa.

Lemmasta (1.1.5) seuraa että  $\lambda$  on  $\sigma$ -additiivinen mitta todennäköisyssavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{L})$ , jossa  $\lambda$ -joukkojen  $\sigma$ -algebra on

$$\mathcal{L} = \{L \subseteq \Omega : \lambda(G) = \lambda(G \cap L) + \lambda(G \cap L^c) \forall G \subseteq \Omega\}$$

Osoitan seuraavaksi että **b)**  $\lambda(A) = \lambda_0(A)$  kun  $A \in \mathcal{A}_0$  ja **c)**  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{L}$ . Tästä seuraa että  $\lambda$  on  $\lambda_0$ :n laajennusmitta todennäköisyssavaruuteen  $(\Omega, \mathcal{L})$ , jossa  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{L} \supseteq \sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$ .

**b)** Kun  $A \in \mathcal{A}_0$ ,  $\lambda(A) \leq \lambda_0(A)$ , koska triviaalisti  $A_0 \subseteq A_0 \in \mathcal{A}_0$ . Olkoon  $A \subseteq \bigcup_n A_n$  jossa  $A_n \in \mathcal{A}_0$ . Koska  $\mathcal{A}_0$  on algebra, voidaan olettaa että joukot  $\{A_n\}$  ovat erillisiä,

muuten otetaan  $A'_1 = A_1$ , ja rekursiivisesti  $A'_n = (A_n \setminus A'_{n-1})$ . Silloin  $(\bigcup_n A'_n) = (\bigcup_n A_n) \supseteq A$  ja koska  $\mathcal{A}_0$  on algebra,  $A'_n \in \mathcal{A}_0$ .

$$\lambda_0(A) = \lambda_0\left(\bigcup_n (A \cap A_n)\right) \stackrel{(*)}{=} \sum_n \lambda_0(A \cap A_n) \leq \sum_n \lambda_0(A_n)$$

jossa (\*) kohdalla tulee käyttöön laajennuslauseen oletus,  $\lambda_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, +\infty]$  on  $\sigma$ -additiivinen algebralla  $\mathcal{A}_0$ . Ottamalla infimumin oikealta puolelta seuraa että  $\lambda_0(A) \leq \lambda(A)$ .

**c)** Olkoon  $A \in \mathcal{A}_0$  ja  $G \subseteq \Omega$ .

$\forall \varepsilon > 0$ , on olemassa jono  $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}_0$  jolla  $G \subseteq \bigcup_n A_n$  ja

$$\lambda(G) + \varepsilon \geq \sum_n \lambda_0(A_n).$$

Koska  $A \in \mathcal{A}_0$   $\lambda$ :n-määritelmästä

$$\sum_n \lambda_0(A_n) = \sum_n \lambda_0(A_n \cap A) + \sum_n \lambda_0(A_n \cap A^c) \geq \lambda(G \cap A) + \lambda(G \cap A^c)$$

koska joukot  $\{(A_n \cap A)\}_{n \in \mathbb{N}}$  peittävät  $(G \cap A)$ :n ja joukot  $\{(A_n \cap A^c)\}_{n \in \mathbb{N}}$  peittävät  $(G \cap A^c)$ . Koska  $\varepsilon > 0$  oli mielivaltainen,

$$\lambda(G) \geq \lambda(G \cap A) + \lambda(G \cap A^c)$$

Koska  $\lambda : 2^\Omega \rightarrow [0, +\infty]$  on ulkomitta ja siksi ali-additiivinen, yhtäsuuruus seuraa, eli  $A \in \mathcal{L}$   $\square$

**Esimerkki: Yleinen todennäköisyyssmitta reaaliakselilla** (Kuten esimerkissä 1.1.2) olkoon  $\Omega = \mathbb{R}$  ja  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Olkoon  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  kuvaus joka on

1. ei-vähenevä funktio
2. oikealta jatkuva eli  $F(t+) := \lim_{u \downarrow t} F(u) = F(t) \forall t \in \mathbb{R}$ .
3.  $F(+\infty) := \lim_{t \uparrow +\infty} F(t) = 1$ ,  $F(-\infty) := \lim_{t \downarrow -\infty} F(t) = 0$ .

Seuraa että on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyyssmitta  $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  jolla  $P((a, b]) = (F(b) - F(a))$ ,  $a < b \in \mathbb{R}$ .

Tod. Yksikäsitteisyys seuraa lemmasta (1.1.2) koska  $\{(a, b] : a < b \in \mathbb{R}\}$  on  $\pi$ -luokka. Olkoon  $\mathcal{A}_0$  on kokoelma joukoista joilla on esitys

$$A = \bigcup_{k=1}^m (a_k, b_k]$$

jossa  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a_k \leq b_k \in \mathbb{R}$ .

$\mathcal{A}_0$  on algebra joka virittää Borelin  $\sigma$ -algebran  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Määritellään kuvaus  $P^{(0)} : \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, 1]$

$$P^{(0)}(A) = \sum_{k=1}^m (F(b_k) - F(a_k))$$

silloin kun esityksen joukot ovat erillisiä,  $(a_k, b_k] \cap (a_h, b_h] = \emptyset$   $h \neq k$ .

$P^{(0)}(A)$  ei riipu  $A$ :n esityksestä, ja on additiivinen  $\mathcal{A}_0$  algebrassa.

Kun osoitamme että  $P^{(0)}$  on  $\sigma$ -additiivinen algebrassa  $\mathcal{A}_0$ , Caratheodoryn laajennuslauseesta seuraa että on olemassa laajennus  $P$  koko Borelin  $\sigma$ -algebralle.

**Tod.** Vasta oletus: on olemassa ei-kasvava jono  $A_n \in \mathcal{A}_0$ ,  $A_n \supseteq A_{n+1}$ , ja  $\epsilon$  jolla  $P^{(0)}(A_n) \geq 4\epsilon > 0 \forall n$ .  $\sigma$ -additiivisuus on todistettu kun osoitamme

$$\bigcap_n A_n \neq \emptyset$$

Olkoon

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} (a_k^n, b_k^n]$$

jossa  $-\infty < a_k^n \leq b_k^n \leq a_{k+1}^n \leq b_{k+1}^n < +\infty$ .

Olkoon  $\epsilon > 0$ . Oletuksesta (3) seuraa että on olemassa  $z \geq 0$  jolla  $F(-z) < \epsilon$  ja  $(1 - F(z)) < \epsilon$ .

Muuten olisi olemassa  $\epsilon > 0$  jolla  $\forall z \geq 0$   $F(-z) > \epsilon$  tai  $F(z) < 1 - \epsilon$ , joka on riistiriidassa oletuksen  $F(-\infty) = 0$  ja  $F(+\infty) = 1$  kanssa.

Koska  $F$  on oikealta jatkuva, on olemassa  $x_k^n \in (a_k^n, b_k^n]$  jolla

$$F(x_k^n) \leq F(a_k^n) + \epsilon 2^{-(k+n)}$$

Olkoon

$$B'_n = \left( \bigcup_{k=1}^{m_n} (x_k^n, b_k^n] \cap [-z, z] \right) \subseteq A_n, \quad B_n = \left( \bigcap_{l \leq n} B'_l \right) \subseteq A_n$$

jossa  $B_n \in \mathcal{A}_0$  ja  $B_n \supseteq B_{n+1} \forall n$ . Seuraa

$$A_n \setminus B_n = \bigcup_{l \leq n} (A_n \setminus B'_l) \subseteq \bigcup_{l \leq n} (A_l \setminus B'_l)$$

Koska  $P_0$  on äärellisesti additiivinen  $\mathcal{A}_0$ :ssa ,

$$\begin{aligned} P^{(0)}(A_n \setminus B_n) &\leq P^{(0)}((-z, z]^c) + \sum_{l=1}^n P^{(0)}((A_l \setminus B'_l) \cap (-z, z]) \\ &\leq P^{(0)}((-z, z]^c) + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{m_l} P^{(0)}((a_k^l, x_k^l]) \\ &= F(-z) + (1 - F(z)) + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{m_l} \{F(x_k^l) - F(a_k^l)\} \leq 2\epsilon + \epsilon \sum_{l=1}^n 2^{-l} \sum_{k=1}^{m_l} 2^{-k} \leq 3\epsilon, \end{aligned}$$

jossa geometriselle sarjalle pätee  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ . Tästä seuraa

$$P^{(0)}(B_n) = P^{(0)}(A_n) - P^{(0)}(A_n \setminus B_n) \geq (4 - 3)\varepsilon \quad \forall n$$

josta seuraa  $B_n \neq \emptyset$ . Olkoon  $\bar{B}_n$  joukon  $B_n$  sulkeuma. Koska  $[x_k^n, b_k^n] \subseteq (a_k^n, b_k^n]$ ,  $\forall n$   $A_n \cap [-z, z] \supseteq \bar{B}_n \supseteq B_n \neq \emptyset$ , ja koska  $B_n \supseteq B_{n+1}$ , myös  $\bar{B}_n \supseteq \bar{B}_{n+1}$ . Tästä seuraa

$$\bigcap_n A_n \supseteq \bigcap_n \bar{B}_n \neq \emptyset$$

muuten kokoelma  $\{(\bar{B}_n)^c = (\mathbb{R} \setminus \bar{B}_n) : n \in \mathbb{N}\}$  olisi kompaktin joukon  $[-z, z]$  avoin peite ilman äärellistä alipeitettä:

$$[-z, z] \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bar{B}_n)^c$$

jossa  $[-z, z] \supseteq \bar{B}_n \supseteq \bar{B}_{n+1} \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$

**Esimerkki 1.1.4.** *Kun*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , -\infty < x \leq 0 \\ x & , 0 < x \leq 1 \\ 1 & , 1 < x < \infty \end{cases}$$

$P$  on tasainen jakauma välissä  $[0, 1]$ , jolla

$$P((a, b]) = F(b) - F(a) = \min(b, 1) - \max(a, 0), \quad a < b.$$

Voidaan myös määritellä Lebesguen mitan koko reaali-akselille:

$$\lambda(A) := \sum_{z \in \mathbb{Z}} P(A + z), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

jolla  $\lambda((a, b]) = (b - a)$ ,  $a < b$ . Lebesguen mitta on  $\sigma$ -äärellinen ja siirtoinvariantti  $\lambda(A + x) = \lambda(A)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . **Todistus** Olkoon

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \lambda(B) = \lambda(x + B) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Koska  $(a, b] \in \mathcal{D}$  ja välit muodostuvat  $\pi$ -luokkaa, jos osoitamme että  $\mathcal{D}$  on  $d$ -luokka, siitä seuraa että  $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  ja väite on todistettu.

Koska  $(\mathbb{R} + x) = \mathbb{R}$ , on selvää että  $\mathbb{R} \in \mathcal{D}$ .

Jos  $B \supseteq A$  ja  $A, B \in \mathcal{D}$ , koska  $(A + x) \setminus (B + x) = (A \setminus B) + x$ , seuraa

$$\begin{aligned} \lambda((B \setminus A) + x) &= \lambda((B + x) \setminus (A + x)) \\ &= \lambda(B + x) - \lambda(A + x) = \lambda(B) - \lambda(A) = \lambda(B \setminus A). \end{aligned}$$

Olkoon  $A_n \subseteq A_{n+1}$ , jossa  $A_n \in \mathcal{D} \forall n$ , ja  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Huomataan että

$$x + A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n + x)$$

ja  $(x + A_n) \uparrow (x + A)$ . Tästä seuraa

$$\lambda(x + A) = \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n + x)\right) = \lim_n \lambda(A_n + x) = \lim_n \lambda(A_n) = \lambda(A),$$

eli  $A \in \mathcal{D}$  joka on sitten  $d$ -luokka.

## 1.2 Sovellus: Tulo $\sigma$ -algebra ja tulo-todennäköisyys

Olkoon  $(\Omega', \mathcal{F}', P')$  ja  $(\Omega'', \mathcal{F}'', P'')$  todennäköisyyskolmikot, ja olkoon  $\Omega = \Omega' \times \Omega''$ .

Tuloavaruus  $\Omega$  varustetaan tulo- $\sigma$ -algebralla

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}'_1 \otimes \mathcal{F}'_2 := \sigma(A \times B : A \in \mathcal{F}', B \in \mathcal{F}'',)$$

eli mitallisten joukkojen tulojen virittämä  $\sigma$ -algebra.

Olkoon

$$\mathcal{A} = \left\{ C \subseteq \tilde{\Omega} : C = \bigcup_{k=1}^m (A_k \times B_k) \text{ jossa } A \in \mathcal{F}', B \in \mathcal{F}'' \right\}$$

Selvästi  $\mathcal{A}$  on algebra ja  $\sigma(\mathcal{A}) = \tilde{\mathcal{F}}$ .

Määritellään ensin additiivinen kuvaus  $P^{(0)} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ : kun

$$C = \bigcup_{k=1}^m (A_k \times B_k)$$

jossa  $(A_k \times B_k) \cap (A_l \times B_l) = \emptyset$  kun  $l \neq k$ ,

$$P^{(0)}(C) = \sum_{k=1}^m P'(A_k)P''(B_k),$$

joka ei riipu  $C$ :n esityksestä (harjoitustehtävä). Kun osoitamme että kuvaus  $P^{(0)} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow [0, 1]$  on myös  $\sigma$ -additiivinen, Caratheodoryn laajennuslauseesta seuraa että on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitan  $\tilde{P}^{(0)}$  laajennus  $\tilde{P} = (P_1 \otimes P_2) : \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \rightarrow [0, 1]$  jolla  $\tilde{P}^{(0)}(\tilde{A}) = \tilde{P}(\tilde{A})$  kun  $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ .  $(P_1 \otimes P_2)$  kutsutaan tulo-todennäköisydeksi. Tulo mitan konstruktio yleistyy suora-induktiolla myös äärellisiin tuloavaruuksiin  $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ , ja myös silloin kun mitat ovat  $\sigma$ -äärellisiä (harjoitustehtävä).

Äärettömän ulotteisen tulomitan konstruktio myös onnistuu Kolmogorovin laajennuslauseen seurauksena, ainakin kun  $\Omega = \mathbb{R}$  (tai yleisemmin kun  $\Omega$  on Borelin avaruus, kts. luku 2).

**Todistus** Osoittaakseen että  $P^{(0)}$  on  $\sigma$ -additiivinen tapahtumien algebrassa  $\mathcal{A}$ ,

näytämme että kun jono  $C_n \in \mathcal{A}$  ja  $C_n \downarrow \emptyset$ , siitä seuraa  $P^{(0)}(C_n) \downarrow 0$ . Olkoon

$$C_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} (A_{nk} \times B_{nk}) \in \mathcal{A} \quad (1.2.1)$$

jossa  $A_{nk} \in \mathcal{F}_1$  ja  $B_{nk} \in \mathcal{F}_2$  ja joukot  $(A_{nk} \times B_{nk})$   $k = 1, \dots, m_n$  ovat erillisiä.

Huomataan että

- esitys (1.2.1) tapahtumalle  $C_n$  ei ole yksikäsitteinen,
- kuitenkin, tapahtuman tulo-mitta

$$P^{(0)}(C_n) = \sum_{k=1}^{m_n} P_1(A_{nk})P_2(B_{nk})$$

ei riipu tapahtuman esityksestä,

- on olemassa esitys jossa joukot  $A_{nk} \in \mathcal{F}_1$  ovat erillisiä.

Määritellään funktio  $f_n : \Omega' \rightarrow [0, 1]$

$$f_n(\omega') = \sum_{k=1}^{m_n} P_2(B_{nk}) \mathbf{1}_{A_{nk}}(\omega')$$

jossa  $A_{nk}$  ovat erillisiä. Huomataan että  $\forall \omega' \in \Omega', f_n(\omega') \downarrow 0$  kun  $n \uparrow \infty$ , koska  $C_n \downarrow \emptyset$  ja siksi

$$\{\omega'' \in \Omega_2 : (\omega', \omega'') \in A_n\} \downarrow \emptyset.$$

Tästä seuraa että  $\forall \varepsilon > 0$

$$D_{n,\varepsilon} := \{\omega' \in \Omega_1 : f_n(\omega') > \varepsilon\} \downarrow \emptyset.$$

jossa  $D_n$  on yhdiste joistakin  $A_{nk}$  joukoista. Koska  $P_1$  on  $\sigma$ -additiivinen, ja  $D_{n,\varepsilon} \downarrow \emptyset$ , seuraa  $P_1(D_{n,\varepsilon}) \downarrow 0$  kun  $n \uparrow \infty$ .

Tästä seuraa  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} P^{(0)}(C_n) &= \sum_{k=1}^{m_n} P_1(A_{nk}) \times P_2(B_{nk}) \\ &\leq P_1(D_{n,\varepsilon})P_2(\Omega_2) + P_1(\Omega_1)\varepsilon \downarrow \varepsilon, \quad \text{kun } n \uparrow \infty \end{aligned}$$

eli  $P^{(0)}(C_n) \downarrow 0 \quad \square$

**Esimerkki Yleinen Todennäköisyyssmitta ( $\mathbb{R}^d$ )-avaruudessa** Voidaan osoittaa (harjoitustehtävä) että

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} := \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{d\text{-kertaa}}$$

Kun  $s = (s_1, \dots, s_d), t = (t_1, \dots, t_d) \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^d$ , merkitään

$$s \leq t \iff s_i \leq t_i, \quad i = 1, \dots, d, \quad s < t \iff s_i < t_i, \quad i = 1, \dots, d,$$

$$(s, t] = \{x \in \mathbb{R}^d : s < x \leq t\} = (s_1, x_1] \times \cdots \times (s_d, t_d]$$

Kun  $d > 1$ , järjestys-relaatio  $\leq$  ei ole täydellinen, eivät kaikki parit  $s, t \in \mathbb{R}^d$  ovat verrattavissa.

Voidaan osoittaa että  $\sigma((-\infty, q] : q \in \mathbb{Q}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  (harjoitustehtävä).

Olkoon  $P$  todennäköisyys  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ :ssa.

Määritellään kertymäfunktio

$$F(t) = P((-\infty, t]) = P(\{x \in \mathbb{R}^d : x_i \leq t_i, i = 1, \dots, d\}), \quad t \in \mathbb{R}^d$$

Seuraa että

1.  $F(t)$  on ei vähenevä  $\leq$  osittais-järjestyksen suhteen,
2.  $F(t)$  on oikealta jatkuva, eli kun  $t_n \downarrow t$ ,  $F(t_n) \downarrow F(t)$ ,
3.  $F(-\infty) := \lim_{t \downarrow -\infty} F(t) = 0$  ja  $F(+\infty) := \lim_{t \uparrow +\infty} F(t) = 1$ .

Toisinpäin, jos funktio  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  toteuttaa (1), (2), (3), On olemassa todennäköisyysmitta  $P(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ :ssa jolla  $F(t) = P((-\infty, t]) \forall t \in \mathbb{R}^d$ . Lauseen 1.1 todistus yleistyy suoraan äärellis-ulotteiseen tilanteeseen.

**Esimerkki 1.2.1.** Jos  $P_1, \dots, P_d$  ovat todennäköisyysmittoja  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  avaruudessa, ja  $F_1(t_1), \dots, F_d(t_d)$  niiden kertymäfunktio, on olemassa tulotodennäköisyys  $\mathbb{P} = (P_1 \otimes P_2 \otimes \dots \otimes P_d)(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  avaruudessa, jolla on kertymäfunktio

$$\mathbb{F}(t) := F_1(t_1)F_2(t_2) \dots F_d(t_d), \quad t \in \mathbb{R}^d$$

ja jos  $B_1, \dots, B_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$\mathbb{P}(B_1 \times \dots \times B_d) = P_1(B_1) \times \dots \times P_d(B_d)$$



## Luku 2

# Todennäköisyys äärettömissä tulo-avaruuksissa ja Kolmogorovin laajennuslause

Jatkossa työskentelemme todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  joka on tarpeeksi rikas sisältämään  $P$ -riippumattomien satunnaismuuttujien jonoja  $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ . Haluamme varmistaa ensin että selläinen on olemassa.

Vaikka tässä kurssissa todennäköisyysmittojen jonon tulomitan olemassaolo tuloavaruudessa riittäisi meille hyvin pitkälle, todistamme samantien Kolmogorovin laajennuslauseetta, joka koskee mielivaltaisia tuloavaruuksia, eikä rajoitu tulomittoihin. Todistuksessa ei käytetä muuta kun Caratheodoryn laajennuslauseetta ja pientä kompaktisuuden argumenttia.

**Määritelmä 2.0.1.** *Todennäköisyysavaruudella  $(\Omega, \mathcal{F})$  satunnaisprosessi on satunnaismuuttujien perhe  $(X_t : t \in \mathbb{T})$  jossa  $\mathbb{T}$  on mielivaltainen indeksijoukko, ja  $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ .*

Esimerkiksi  $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  voidaan tulkita aikaparametriksi, joka voi olla diskreetti tai jatkuva.

**Määritelmä 2.0.2.** *Äärellisulotteisten todennäköisyysmittojen perhe  $\mathbb{R}$ :ssa on*

$$\left( P_{t_1, \dots, t_n} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T} \right)$$

## 46 LUKU 2. TODENNÄKÖISYYS ÄÄRETTÖMISSÄ TULO-AVARUUKSISSA JA KOLMO

on yhteensopiva, jos

1.

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n) = P_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}}(A_{t_{\pi(1)}} \times \dots \times A_{t_{\pi(n)}})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}, \quad \forall \text{permutaatiolle } \pi$$

2.

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n) = P_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(A_1 \times \dots \times A_n \times \mathbb{R})$$

Korostamme että seuraavassa lauseessa indeksijoukko  $\mathbb{T}$  on mielivaltainen.

**Teoreema 2.0.1.** (Daniell-Kolmogorov, 1933) Olkoon

$$\left( P_t : t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}^n \right)$$

yhteensopiva perhe äärellisulotteisista todennäköisyysjakaumoista  $\mathbb{R}$ :ssa, indeksijoukolla  $\mathbb{T}$ .

On olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta  $\mathbb{P}$  tuloavaruudella  $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$  varustettuna tulo-topologian virittämällä sylinterien  $\sigma$ -algebralla  $\sigma(\mathcal{C})$ , jolla  $\forall n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in B_n \right\} \right) = P_{t_1, \dots, t_n}(B_n) \quad (2.0.1)$$

### Todistus

Tuloavaruuden  $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$  jäsenet ovat kuvaukset  $t \mapsto \omega_t \in \mathbb{R}$ .

Määritellään algebra  $\mathcal{C}$  joka koostuu sylintereistä

$$C = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in B_n \right\}$$

jossa  $n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

Kaava (2.0.1) määrittelee kuvauksen  $\mathbb{P}_0 : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ .

Yhteensopivuuden oletuksesta seuraa että  $\mathbb{P}_0(C)$  on hyvin määritelty, siis ei riipu sylinterin  $C$ :n esityksestä.

Koska kahdelle sylinterille löytyy esityksiä yhteisellä indeksijoukolla, ja koska äärellis-ulotteiset jakaumat ovat todennäköisyydet, ei ole vaikea osoittaa että kuvaus  $\mathbb{P}_0 : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  on äärellisesti additiivinen. (harjoitus tehtävä).

Kun osoitamme että  $\mathbb{P}_0$  on myös  $\sigma$ -additiivinen  $\mathcal{C}$  algebrassa, Charatheodoryn laajennuslause astuu voimaan ja  $\mathbb{P}_0$  voidaan laajentaa yksikäsitteisesti  $\sigma$ -additiiviseksi todennäköisyysmitaksi  $\sigma$ -algebralle  $\sigma(\mathcal{C})$ .

Eli jää osoitettavaksi väite:

jos  $\{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$  on sylinterien jono jolla

$$C_n \supseteq C_{n+1} \forall n, \text{ ja } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \emptyset,$$

seuraa  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(C_n) = 0$ .

Vastaoletuksen kautta, oletamme että on olemassa cylinterien jono  $\{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$  jolla  $C_n \supseteq C_{n+1}$  ja  $\mathbb{P}_0(C_n) \geq \varepsilon \forall n$  jollekin  $\varepsilon > 0$ , näytämme että  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$ .

Valitsemalla sopivasti sylinterien esityksiä ja mahdollisesti toistaamalla sylintereita jonossa, voidaan aina rakentaa indeksijonoa  $(t_n) \subseteq \mathbb{T}$  ja sylinterijono  $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$  jolla on esitys

$$D_n = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in A_n \right\}$$

jossa  $D_n \supseteq D_{n+1} \forall n$ ,  $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $A_n \times \mathbb{R} \supseteq A_{n+1} \forall n$ , ja kaikille  $m \in \mathbb{N}$  on olemassa  $n$  jolla  $D_n = C_m$ .

Seuraa että  $\mathbb{P}_0(D_n) \geq \varepsilon > 0 \forall n$  ja

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n.$$

Koska  $P_{t_1, \dots, t_n}$  on todennäköisyysmitta  $\mathbb{R}^n$ :ssa ja siksi  $\sigma$ -additiivinen, ja  $A_n$  on Borel mitallinen, on olemassa suljettu joukko  $F_n \subseteq A_n$  jolla

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A_n \setminus F_n) < \varepsilon 2^{-n}.$$

48LUKU 2. TODENNÄKÖISYYS ÄÄRETTÖMISSÄ TULO-AVARUUKSISSA JA KOLMO

Valitsemalla tarpeeksi suurta origo-keskeistä palloa  $B(0, r_n)$ , löytyy myös kompakti  $K_n = (F_n \cap B(0, r_n)) \subseteq A_n$  jolla edelleen

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A_n \setminus K_n) = \mathbb{P}_0(D_n \setminus G_n) < \varepsilon 2^{-n}$$

jossa

$$G_n := \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in K_n \right\}$$

Koska nämä eivät välttämättä muodosta vähenevää jonoa, otamme leikkaukset

$$G'_n = \bigcap_{m=1}^n G_m = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in K'_n \right\}$$

jossa

$$K'_n := K_n \cap (K_{n-1} \times \mathbb{R}) \cap \dots \cap (K_1 \times \mathbb{R}^{n-1}) \subseteq K_n$$

ovat kompakteja (kompakti ja suljetun joukon leikkaus on kompakti).

Seuraa  $G'_n \supseteq G'_{n+1}$ , ja  $(K'_n \times \mathbb{R}) \supseteq K'_{n+1}$ .

Tästä seuraa

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n}(K'_n) &= \mathbb{P}_0(G'_n) = \mathbb{P}_0(D_n) - \mathbb{P}_0(D_n \setminus G'_n) = \\ &= P_{t_1, \dots, t_n}(A_n) - P_{t_1, \dots, t_n}\left(\bigcup_{m=1}^n A_n \setminus (K_m \times \mathbb{R}^{(n-m)})\right) \\ &\geq P_{t_1, \dots, t_n}(A_n) - P_{t_1, \dots, t_n}\left(\bigcup_{m=1}^n (A_m \setminus K_m) \times \mathbb{R}^{(n-m)}\right) \\ &\quad (\text{koska } A_m \times \mathbb{R}^{(n-m)} \supseteq A_n \text{ kun } n \geq m) \\ &= \mathbb{P}_0(D_n) - \mathbb{P}_0\left(\bigcup_{m=1}^n D_m \setminus G_m\right) \\ &\geq \mathbb{P}_0(D_n) - \sum_{m=1}^n \mathbb{P}_0(D_m \setminus G_m) \geq \varepsilon - \sum_{m=1}^n \varepsilon 2^{-m} > \frac{\varepsilon}{2} > 0 \end{aligned}$$

jossa käytettiin vasta oletusta  $\mathbb{P}_0(D_n) > \varepsilon$ .

Siksi  $\forall n, \exists (x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \in K'_n \neq \emptyset$ .

Koska jono  $G'_n$  ei kasva, seuraa että  $(x_1^{(n)}) \subseteq K'_1 \subseteq \mathbb{R}$ .

Koska  $K'_1$  on kompakti, Heine-Borelin lauseesta seuraa että on olemassa suppeneva alijono  $x_1^{(n_i)} \rightarrow x_1^* \in K'_1$ .

Myös alijono  $(x_1^{(n_i)}, x_2^{(n_i)}) \subseteq K'_2$ , ja on olemassa suppeneva alijonon alijono jolla on raja  $(x_1^*, x_2^*) \in K'_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Induktiivisesti löytyy jono  $(x_n^*)$  jolla  $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in K'_n \subseteq \mathbb{R}^n \forall n$ .

Joukot

$$D^* = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : \omega_{t_n} = x_n^* \quad \forall n \right\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G'_n \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

eivät ole tyhjiä  $\square$

**Huomautus 2.0.1.** Näytämme pian että Kolmogoroviin lause on voimassa ei pelkästään kun  $\Omega_t = \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{T}$  mutta myös hyvin yleisemmilla Borelin todennäköisyysavaruuksilla.

50 LUKU 2. TODENNÄKÖISYYS ÄÄRETTÖMISSÄ TULO-AVARUUKSISSA JA KOLMO

# Luku 3

## Satunnaismuuttujat

Olkoon  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$  kuvaus todennäköisyysavaruuksien välillä.  $X$  on mitallinen kuvaus, todennäköisyyskielellä *satunnaismuuttuja*, kun  $\forall B \in \mathcal{E}$ , mitallisen joukon alkukuva on mitallinen, eli

$$X^{-1}(B) := \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Tyypillisesti  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  jossa  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  on avoimien joukkojen viritämä  $\sigma$ -algebra. Kun  $X$  on satunnaismuuttuja, merkitään  $X \in L^0(\Omega, \mathcal{F})$  tai lyhyesti  $X \in \mathcal{F}$  silloin kun kontekstista on selvää että  $X$  on funktio  $\omega$ :sta eikä  $\Omega$ :n alijuokko.

**Huomautus 3.0.1.** Huomataan samankaltaisuus jatkuvan funktion määrittelyn kanssa: olkoon  $(S_i, \mathcal{S}_i)$ ,  $i = 1, 2$  topologiset avaruudet, jossa  $S_i$  ovat avointen joukkojen kokoelmat. Sanotaan että  $f : (S_1, \mathcal{S}_1) \rightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$  on jatkuva jos ja vain jos kaikille avoimille  $U \in \mathcal{S}_2$  pätee

$$f^{-1}(U) = \{x \in S_1 : f(x) \in U\} \in \mathcal{S}_1,$$

eli se on avoin  $S_1$ :n topologiassa.

**Lemma 3.0.1.** Jos  $X : \Omega \mapsto E$  on kuvaus, (ei välttämättä mitallinen)

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X^{-1}(A_i), \quad X^{-1}(A^c) = \left(X^{-1}(A)\right)^c$$

jossa  $A, A_i \subseteq E$  ja  $\mathcal{I}$  on mielivaltainen indeksi joukko (ei välttämättä numeroituva).

**Lemma 3.0.2.** *Olkoon  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$  ja  $Y : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (G, \mathcal{G})$  mitalliset kuvaukset todennäköisyysavaruuksien välissä. Silloin kuvaus  $(Y \circ X)(\omega) := Y(X(\omega))$  on mitallinen  $(\Omega, \mathcal{F})$  ja  $(G, \mathcal{G})$  välissä.*

Tod. Kun  $B \in \mathcal{G}$ ,

$$(Y \circ X)^{-1}(B) = \{\omega : Y(X(\omega)) \in B\} = \{\omega : X(\omega) \in Y^{-1}(B)\} \in \mathcal{F}$$

koska  $Y^{-1}(B) \in \mathcal{E}$  ja  $X$  on  $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ -mitallinen.

**Lemma 3.0.3.** *Olkoon  $f : E \rightarrow H$ , jatkuva funktio topologisten avaruuksien välissä, ja olkoon  $\mathcal{B}(E)$  ja  $\mathcal{B}(H)$  vastaavat avointen joukkojen virittämiä Borelin  $\sigma$ -algebrat. Silloin*

- *kuvaus  $f : (E, \mathcal{B}(E)) \rightarrow (H, \mathcal{B}(H))$  on mitallinen.*
- *$f^{-1}(\mathcal{B}(H)) = \sigma\{f^{-1}(U) : U \subseteq H \text{ avoin}\}$ , on pienin  $E$ :n  $\sigma$ -algebra jonka suhteen  $f$  on Borel-mitallinen.*

Tod. Kun  $U \subseteq H$  avoin, seuraa että  $f^{-1}(U) \subseteq E$  on avoin  $E$ :ssä. Tästä seuraa

$$\sigma\{f^{-1}(U) : U \subseteq H \text{ avoin}\} \subseteq \mathcal{B}(E)$$

Joukko perheet

$$\{U \subseteq H \text{ avoin}\} \text{ ja } \{f^{-1}(U) : U \subseteq H \text{ avoin}\}$$

ovat  $\pi$ -luokkia koska avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin.

Kun  $\mathcal{D}$  on  $d$ -luokka  $H$ :ssa,

$$f^{-1}(\mathcal{D}) = \{f^{-1}(D) : D \in \mathcal{D}\}$$

on  $d$ -luokka  $E$ :ssa:

$E = f^{-1}(H) \in f^{-1}(\mathcal{D})$  koska  $H \in \mathcal{D}$ .

Jos  $A_1 = f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$  jossa  $B_i \in \mathcal{D}$ , seuraa  $B_1 \subseteq B_2$  ja  $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{D}$  josta seuraa  $f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2 \setminus B_1) \in f^{-1}(\mathcal{D})$ .

Jos  $A_n = f^{-1}(B_n) \in f^{-1}(\mathcal{D})$  ja  $A_n \uparrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ,

seuraa  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \in f^{-1}(\mathcal{D})$ .

Koska  $\mathcal{B}(H)$  on pienin  $d$ -luokka joka sisältää  $\pi$ -luokan  $\{U \subseteq H \text{ avoin}\}$ ,

$f^{-1}(\mathcal{B}(H))$  on pienin  $d$ -luokka joka sisältää  $\pi$ -luokan

$\{f^{-1}(U) : U \subseteq H \text{ avoin}\}$ , ja lemmasta 1.1.3 seuraa

$f^{-1}(\mathcal{B}(H)) = \sigma\{f^{-1}(U) : U \subseteq H \text{ avoin}\} \square$

**Seuraus 3.0.1.** *Olkoon  $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ,  $i = 1, \dots, d$   $\mathbb{R}$ -arvoisia satunnaismuuttuja. Silloin vektori-arvoinen kuvaus  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  jolla  $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_d(\omega))$  on  $\mathbb{R}^d$ -arvoinen satunnaismuuttuja.*

**Tod.** Kun  $B_i \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, d$ ,

$$\{\omega : X(\omega) \in B_1 \times \dots \times B_d\} = \left( \bigcap_{i=1}^d \{\omega : X_i(\omega) \in B_i\} \right) \in \mathcal{F}$$

ja väite seuraa koska  $\sigma(B_1 \times \dots \times B_d : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

Tarkemmin, olkoon

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X_1(\omega), \dots, X_d(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \supseteq \mathcal{I} = \{B_1 \times B_2 \times \dots \times B_d : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

jossa  $\mathcal{D}$  on  $\sigma$ -algebra ja  $\mathcal{I}$  on  $\pi$ -luokka. Mutta  $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , josta seuraa että  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .  $\square$

**Seuraus 3.0.2.** *Olkoon  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  satunnaisvektori ja  $f : X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva kuvaus.*

*Seuraa että kuvaus  $\omega \mapsto (f \circ X)(\omega) = f(X(\omega))$  on satunnaismuuttija.*

*Erityisesti jos  $(X, Y)$  ovat s.m.  $\rightarrow (X + Y), (XY)$  ovat s.m.*

*Jos  $Y(\omega) \neq 0 \quad \forall \omega$ , seuraa että  $(X/Y)$  on satunnaismuuttuja.*

**Lemma 3.0.4.** *Jos  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  on s.m. jono todennäköisyysvaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,*

$$X^*(\omega) := \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega)$$

*on satunnaismuuttuja.*

Tod.  $\mathcal{D} = \{B \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) : (X^*)^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$  on  $\sigma$ -algebra. Koska jokaiselle  $t \in \mathbb{R}$

$$(X^*)^{-1}((-\infty, t]) := \{\omega : X^*(\omega) \leq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : X_n(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F},$$

seuraa että  $(-\infty, t] \in \mathcal{D}$ . Koska nämät muodostuvat  $\pi$ -luokan, seuraa että  $\mathcal{D}$  on niiden virittämä  $\sigma$ -algebra, joka on  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Seuraus 3.0.3.** *Myös  $\liminf_n X_n(\omega)$  ja  $\limsup_n X_n(\omega)$  ovat satunnaismuuttujia (harjoitustehtävä).*

Seuraava lause on Dynkinin lemmän (1.1.3) vastine satunnaismuuttujille:

**Teoreema 3.0.1.** *(Monotonisen luokan lause) Olkoon  $\mathcal{C}$  kokoelma rajoitetuista funktioista  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Sanotaan että  $\mathcal{C}$  on **monotoninen luokka** kun*

1.  $\mathcal{C}$  on vektoriavaruus.
2. vakio funktio  $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ .
3.  $\mathcal{C}$  on suljettu monotonisen rajankäynnin suhteen:

kaikille jonoille  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$  joilla

$$0 \leq X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}, \text{ ja}$$

$$X(\omega) := \lim_{n \uparrow \infty} X_n(\omega) \text{ on rajoitettu funktio,}$$

seuraa  $X \in \mathcal{C}$ .

Kun  $\mathcal{C} \supseteq \{ \mathbf{1}_A(\omega) : A \in \mathcal{I} \}$  jossa  $\mathcal{I} \subseteq 2^\Omega$  on  $\pi$ -luokka (suljettu joukkojen leikkauksen suhteen), seuraa

$$\mathcal{C} \supseteq \left\{ \text{rajoitetut ja } (\Omega, \sigma(\mathcal{I})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ mitalliset funktiot} \right\}$$

**Tod.** Olkoon  $\mathcal{D} = \{A \subseteq \Omega : \mathbf{1}_A \in \mathcal{C}\}$ .

Seuraa monotonisen luokan määritelmästä että  $\mathcal{D}$  on  $d$ -luokka joka sisältää  $\pi$ -luokan  $\mathcal{I}$ , ja Dynkinin lemmasta (1.1.3) seuraa myös  $\mathcal{D} \supseteq \sigma(\mathcal{I})$ .

Olkoon  $X(\omega)$   $\sigma(\mathcal{I})$ -mitallinen satunnaismuuttuja jolla

$$0 \leq X(\omega) \leq K < \infty \quad \forall \omega \in \Omega .$$

Määritellään kuvausten jono

$$X^{(n)}(\omega) := \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{K\ell}{n} \mathbf{1} \left\{ X(\omega) \in \left( \frac{K\ell}{n}, \frac{K(\ell+1)}{n} \right] \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Koska  $\mathcal{C}$  on vektoriavaruus, seuraa  $\{X^{(n)}\} \subseteq \mathcal{C}$ , ja koska

$$0 \leq X^{(n)}(\omega) \uparrow X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

jossa oletetusti  $X(\omega)$  on rajoitettu, seuraa että  $X(\omega) \in \mathcal{C}$   $\square$

Seuraava lause on esimerkki monotonisen luokan lauseen käytöstä.

**Teoreema 3.0.2.** *Olkoon kuvaus  $Y : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (S, \mathcal{S})$   $S$ -arvoinen satunnaismuuttuja, esimerkiksi  $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ .*

*Olkoon*

$$\sigma(Y) := \{ Y^{-1}(A) : A \in \mathcal{S} \}.$$

- $\sigma(Y)$  on pienin  $\Omega$ :n  $\sigma$ -algebra jonka suhteen  $Y(\omega)$  on mitallinen.
- $\sigma(Y)$  kutsutaan satunnaismuuttujan  $Y$  virittämän  $\sigma$ -algebraksi.
- Toinen satunnaismuuttuja  $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  on  $\sigma(Y)$ -mitallinen jos ja vain jos on olemassa mitallinen kuvaus  $f : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  jolla  $X(\omega) = f(Y(\omega))$ .

**Proof**  $\Leftarrow$  implikaatio on jo osoitettu (lemma 3.0.2).

Olkoon

$$\mathcal{C} = \{ f(Y(\omega)) : f \text{ on Borel-mitallinen ja } |f(Y(\omega))| \text{ on rajoitettu} \}$$

Selvästi  $\mathcal{C}$  on vektoriavaruus joka sisältää vakiot. Olkoon  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  Borel-mitallisten funktioiden jono jolla

$$0 \leq f_n(Y(\omega)) \leq f_{n+1}(Y(\omega)) \leq K < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega_i,$$

ja  $f(y) := \limsup_n f_n(y) \forall y \in S$ . Seuraa että  $f : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  on mitallinen, ja

$$0 \leq f_n(Y(\omega)) \uparrow f(Y(\omega)) \leq K < \infty \quad \text{kun } n \uparrow \infty .$$

Siis  $\mathcal{C}$  on monotoninen luokka. Koska  $\mathbf{1}_A(Y(\omega)) \in \mathcal{C} \forall A \in \mathcal{S}$ , ja

$$\sigma(Y) = \{ Y^{-1}(A) : A \in \mathcal{S} \}$$

seuraa että  $\mathcal{C}$  sisältää kaikki  $\sigma(Y)$ -mitallisia ja rajoitettuja  $\mathbb{R}$ -arvoisia satunnaismuuttujia.

Yleisemmin, jos  $X(\omega)$  on  $\sigma(Y)$ -mitallinen  $\mathbb{R}$ -arvoinen satunnaismuuttuja joka ei ole rajoitettu, koska  $\arctan(x)$  on jatkuva bijektio  $\mathbb{R}$  ja avoimen välin  $(-\pi/2, \pi/2)$  välissä, satunnaismuuttuja  $\arctan(X(\omega))$  on rajoitettu ja  $\sigma(Y)$ -mitallinen.

Tästä seuraa että  $\arctan(X(\omega)) = f(Y(\omega))$  jollekin Borel-mitalliselle funktiolle  $f(y)$ , ja silloin  $X(\omega) = \tan(f(Y(\omega)))$  jossa  $\tan(f(y))$  on myös Borel mitallinen funktio  $\square$

## Luku 4

# Odotusarvo ja Integraali

**Määritelmä 4.0.1.** Satunnaismuuttuja  $X(\omega) : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  on yksinkertainen jos

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{R}, A_k \in \mathcal{F}$$

Merkitään  $X \in \mathcal{YF}$ . Jos  $X(\omega) \geq 0 \forall \omega$ , merkitään  $X \in \mathcal{YF}^+$ . Tällöin määritellään satunnaismuuttujan odotusarvo todennäköisyyksimitan  $P$ :n suhteen

$$E_P(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k)$$

De Finettin mukaan, odotusarvo  $E_P(X)$  tulkitaan vedonlyönnin sopimuksen  $X$ :n johdonmukaiseski hinnaksi, hinta-systeemissä jossa indikaattorit  $\mathbf{1}_{A_k}$  saavat hintoja  $P(A_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Harjoitustehtäväkasi tarkistetaan että yksinkertaisen satunnaismuuttujan odotusarvo ei riipu sattunnaismuuttujan esityksestä ja

$$E_P(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P(\{\omega : X(\omega) = x\})$$

**Lemma 4.0.1.** Olkoon  $X, Y \in \mathcal{YF}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (deterministinen).

- Kun  $X(\omega) \geq 0, \forall \omega$ , seuraa että  $E_P(X) \geq 0$  (positiivisuus).
- $E_P(X + Y) = E_P(X) + E_P(Y)$  ja  $E_P(\lambda X) = \lambda E_P(X)$ .

Odotusarvon määritelmä yleistetään seuraavalla tavalla:

**Määritelmä 4.0.2.** *Olkoon  $X(\omega) \geq 0 \forall \omega$ . Silloin*

$$E_P(X) := \sup\{E_P(Y) : Y \in \mathcal{YF}^+, 0 \leq Y(\omega) \leq X(\omega) \quad \forall \omega\}$$

Yleisemmin käytämme hajotelmaa  $X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega)$ , jossa satunnaisuuttujat  $X^+(\omega) := \max\{X(\omega), 0\}$ ,  $X^-(\omega) := \max\{-X(\omega), 0\}$  ovat ei-negatiivisia, ja määritellään

$$\int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega) := E_P(X) := E_P(X^+) - E_P(X^-).$$

Kun  $E_P(|X|) = E_P(X^+) + E_P(X^-) < +\infty$ , sanomme että  $X$  on integroitava satunnaisuuttuja ja merkitsemme  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Kun  $E_P(X^+) = \infty$  ja  $E_P(X^-) < +\infty$ , määritellään  $E_P(X) = +\infty$ , vastavasti jos  $E_P(X^+) < \infty$  ja  $E_P(X^-) = \infty$ ,  $E_P(X) := -\infty$ .

Kun  $E_P(X^+) = E_P(X^-) = \infty$  odotusarvo  $E_P(X)$  ei ole määriteltävissä.

**Lemma 4.0.2.** *Olkoon  $X(\omega) \geq 0, \forall \omega$ .*

*Kun  $E_P(X) = 0$ , seuraa  $P(\{\omega : X(\omega) > 0\}) = 0$ .*

*Tod.* Olkoon  $Y_n(\omega) = n^{-1}\mathbf{1}(X(\omega) > n^{-1})$ . Silloin

$$Y_n \in \mathcal{YF}^+ \text{ ja } Y_n(\omega) \leq X(\omega), \quad \forall \omega.$$

Odotusarvon määritelmästä seuraa

$$0 = E_P(X) \geq E_P(Y_n) = n^{-1}P(X(\omega) > n^{-1}) \geq 0, \quad \text{ja}$$

$$P(X(\omega) > 0) = P\left(\bigcup_n \{\omega : X(\omega) > n^{-1}\}\right) \leq \sum_n P(X(\omega) > n^{-1}) = 0 \quad \square$$

**Lemma 4.0.3.** *Kun  $X(\omega)$  ja  $B \in \mathcal{F}$  jolla  $P(B) = 1$ , seuraa*

$$E_P(X\mathbf{1}_B) = E_P(X).$$

*Tod.* Väite on tosi kun  $X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$ ,

$$E_P(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) = E_P(\mathbf{1}_{A \cap B}) = P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c) = P(A),$$

koska  $P(A \cap B^c) \leq P(B^c) = 1 - P(B) = 0$ , ja lineaarisuudesta seuraa myös kaikille  $X \in \mathcal{YF}$ .

Olkoon  $X(\omega) \geq 0$ , ja  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{YF}^+$  jolla  $0 \leq X_n(\omega) \leq X(\omega)$  ja  $E_P(X_n) \uparrow E_P(X)$ . Silloin koska  $\mathbf{1}_B(\omega)X_n(\omega) \leq \mathbf{1}_B(\omega)X(\omega)$  ja odotusarvo on positiivinen,

$$E_P(\mathbf{1}_B X) \geq E_P(\mathbf{1}_B X_n) = E_P(X_n) \uparrow E_P(X) \geq E_P(\mathbf{1}_B X) \quad \square$$

**Seuraus 4.0.1.** Jos  $P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$ , eli  $X(\omega) = Y(\omega)$   $P$ -melkein varmasti, seuraa  $E_P(X) = E_P(Y)$ .

**Riemann-Stieltjesin ja Lebesgue-Stieltjesin integraalit** Olkoon  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $\Omega = (a, b]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}((a, b])$ ,

$P = P_G$  jossa  $G : (a, b] \rightarrow [0, 1]$  on ei-vähenevä oikealta jatkuva funktio jolla  $G(a) = 0$ ,  $G(b) = 1$ .

Caratheodoryn lauseen mukaan on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta  $P_G : \mathcal{B}((a, b]) \rightarrow [0, 1]$  jolle  $P_G((a, x]) = G(x) - G(a)$ .

Olkoon  $H : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  ei-negatiivinen mitallinen funktio. Osoitamme että

$$E_{P_G}(H) = \int_a^b H(x)G(dx) \text{ (Lebesgue-Stieltjesin integraali)}$$

jossa oikean puolen integraali on Riemann-Stieltjesin integraalin yleistys.

**Määritelmä 4.0.3.** Olkoon  $\Pi$  välin  $(a, b]$  ositus äärellisellä välipistemäärällä:

$$\Pi = (a = x_0 \leq \xi_0 \leq x_1 \leq \xi_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{N-1} \leq \xi_{N-1} \leq x_N = b), \quad n \in \mathbb{N}$$

Merkitään  $\Delta(\Pi) = \max_{0 < i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ . Määritellään Riemannin Stieltjesin integraali

$$\begin{aligned} \text{(Riemann-Stieltjes)-} \int_a^b H(x)G(dx) &:= \lim_{\Delta(\Pi) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{N(\Pi)} H(\xi_k)(G(x_{k+1}) - G(x_k)) \\ &= \lim_{\Delta(\Pi) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{N(\Pi)} H(\xi_k)P_G((x_k, x_{k+1}]) = \lim_{\Delta(\Pi) \rightarrow 0} E_P(H^{(\Pi)}) \quad \text{jossa} \\ H^{(\Pi)}(u) &:= \sum_{k=1}^{N(\Pi)} H(\xi_k)\mathbf{1}_{(x_k, x_{k+1}]}(u) \end{aligned}$$

silloin kun raja-arvo on olemassa ja on yksikäsitteinen riippumatta ositusten jonon ja välipisteiden  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$  välinnästä.

**Lause 4.0.1.** Kun  $H(x)$  (palottain) jatkuva, ja  $G(x)$  on ei-vähenevä, Riemann-Stieltjesin integraali  $\int_a^b H(x)G(dx)$  on olemassa.

**Todistus** Olkoon  $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio, ja  $H^{(\Pi)}$  sen yksinkertainen approksimaatio osituksen  $\Pi$ :n mukaan. Määritelmään mukaan

$$\int_a^b H(y)G(dy) = \lim_{\Delta(\Pi) \rightarrow 0} \int_a^b H^{(\Pi)}(y)G(dy)$$

kun raja-arvo on olemassa eikä riippuu ositusten jonosta.

Olkoon  $(\Pi_n : n \in \mathbb{N})$   $[a, b]$  välin ositusten jono joilla  $\Delta(\Pi_n) \rightarrow 0$ . Osituksille  $\Pi_n, \Pi_m$  pätee

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b H^{(\Pi_n)}(y)G(dy) - \int_a^b H^{(\Pi_m)}(y)G(dy) \right| \leq \int_a^b |H^{(\Pi_n)}(y) - H^{(\Pi_m)}(y)|G(dy) \\ & = \sum_{i=0}^{N-1} |H(\xi_i) - H(\eta_i)|(G(x_{i+1}) - G(x_i)) \end{aligned}$$

joillekin  $x_0 < x_1 < \dots < x_N$  ja  $|\xi_i - \eta_i| \leq (\Delta(\Pi_n) + \Delta(\Pi_m))$ . Koska  $H$  on jatkuva kompaktissa  $[a, b]$  se on siinä tasaisesti jatkuva, eli  $\forall \varepsilon > 0$  on olemassa  $\delta$  joilla kun  $|\xi - \eta| \leq \delta \implies |H(\xi) - H(\eta)| < \varepsilon$ .

Tästä seuraa että kun  $n, m$  ovat tarpeeksi suuria

$$\left| \int_a^b H^{(\Pi_n)}(y)G(dy) - \int_a^b H^{(\Pi_m)}(y)G(dy) \right| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} (G(x_{i+1}) - G(x_i)) = \varepsilon(G(b) - G(a))$$

Tästä seuraa että  $\left( \int_a^b H^{\Pi_n}(y)G(dy) : n \in \mathbb{N} \right)$  on Cauchy jono joka suppenee.

Seuraa myös että jos  $(\Pi'_n)$  on toinen ositusten jono jolla  $\Delta(\Pi'_n) \rightarrow 0$ , kun määritellään jono  $(\Pi''_n)$  jolla  $\Pi''_{2n} = \Pi_n$  ja  $\Pi''_{2n+1} = \Pi'_n$ , seuraa että myös  $\int_a^b H^{(\Pi''_n)}(y)G(dy)$  suppenee kun  $n \rightarrow \infty$ , ja siksi raja-arvo ei riipu ositusten jonosta  $\square$

**Tehtävä 4.0.1.** Osoita että Riemann-Stieltjesin integraali on olemassa kun funktio  $H(y)$  on ei-vähenevä. Vihje: Osoita ensin että epäjatkuvuus pisteiden joukko

$$D := \left\{ y : H(y-) := \lim_{x \uparrow y} H(x) < H(y+) = \lim_{x \downarrow y} H(x) \right\}$$

on korkeintaan numeroituva. Käytä sitten hajotelma

$$H(x) = \left( H^c(x) - \sum_{y \leq x} \Delta H(y) \right) \quad \text{jossa} \quad \Delta H(y) := H(y+) - H(y-)$$

jossa näytät että  $H_c(x)$  on ei-vähenevä ja jatkuva. Tämä yleistyy suoraan tapaukseen jossa  $H(y) = (H^\oplus(y) - H^\ominus(y))$ ,  $G(y) = (G^\oplus(y) - G^\ominus(y))$ , jossa  $H^\oplus, H^\ominus, G^\oplus, G^\ominus$ , ovat ei-väheneviä.

**Tehtävä 4.0.2.** Osoite että jos  $H(x)$  on (palottain) jatkuva ja  $G(x)$  on derivoituva jatkuvalla derivaatalla  $G'(x)$ , Riemannin Stieltjes integraaleille pätee

$$\int_a^b H(x)G(dx) = \int_a^b H(x)G'(x)dx$$

Kun  $H(x)$  on pelkästään Borel- mitallinen mutta ei palottain-jatkuva, on olemassa ositusten jonot ja välipisteiden valinnat joilla approksimaation raja ei ole olemassa, siinä tapauksessa Riemann-Stieltjes integrointitapa ei toimi.

Vuonna 1902 ranskalainen Henri Lebesgue keksi omassa väitöskirjassa uuden integrointitavan jossa funktio  $y = H(x)$  integraalin approksimoidaan osittamaalla  $y$ -akselin  $x$ -akselin sijaan. Olkoon ensin  $H$  Borel-mitallinen funktio jolla  $H(x) \geq 0 \forall x$ . Määritellään kuvaus  $\alpha^{(N)} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  jossa

$$\alpha^{(N)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{kun } 0 \leq y \leq N^{-1} \\ \left(\frac{k}{N}\right) & \text{kun } kN^{-1} < y \leq (k+1)N^{-1}, \quad k = 1, \dots, (N^2 - 1) \\ N & \text{kun } y \geq N \end{cases} \quad (4.0.1)$$

$$\text{siis } \alpha^{(N)}(y) = \sum_{k=1}^{(N^2-1)} \left(\frac{k}{N}\right) \mathbf{1}_{\left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]}(y) + N \mathbf{1}_{[N, +\infty)}(y)$$

Huomataan että kuvaus  $\alpha^{(N)}$  on vasemmalta jatkuva kuten indikaattori-kuvaukset  $\mathbf{1}_{(a,b]}(y)$ .

Approksimoidaan alhaalta satunnaismuuttuja  $H(x) \geq 0$  yksinkertaisella satunnaismuuttujalla  $H^{(N)}(x) := \alpha^{(N)}(H(x))$ . Koska

$$0 \leq H(x) - H^{(N)}(x) \leq 1/N \quad \text{kun } 0 \leq H(x) \leq N,$$

ja  $H^{(N)}(x) \leq H^{(N+1)}(x)$ , seuraa että  $H^{(N)}(x) \uparrow H(x)$  kun  $N \uparrow \infty$ .

Koska  $H^{(N)}(x)$  on yksinkertainen satunnaismuuttuja, sen  $P_G$ -odotusarvo on summa

$$\begin{aligned} E_P(H^{(N)}) &= \sum_{y \in \mathbb{R}} y P_G(H^{(N)} = y) = \\ &= \sum_{k=0}^{(N^2-1)} \frac{k}{N} P_G\left(\left\{x : H(x) \in \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]\right\}\right) = \int_a^b H^{(N)}(x) G(dx) \end{aligned}$$

jossa viimeinen integraali on yksinkertaisen funktion Lebesgue-Stieltjes integraali eikä Riemannin integraali. Yksinkertainen funktio  $H^{(N)}(x)$  ei ole välttämättä palottain jatkuva.

Huomataan myös että kun funktio  $H(x)$  on jatkuva välissä  $(a, b]$ , käänteiskuva

$$H^{-1}\left(\left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]\right) := \left\{x : H(x) \in \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]\right\}$$

on äärellinen yhdiste väli-joukoista, mutta näin ei tarvitse olla kun  $H(x)$  on pelkästään Borel-mitallinen. Silloin  $y$ -akselin osituksen vastaa  $x$ -akselin ositus ja sen takia siinä tapauksessa Lebesgue ja Riemann integraalit yhtyvät.

Osoitamme että kun  $H(x) \geq 0$  on mitallinen, raja-arvo  $\lim_{N \rightarrow \infty} E_{P_G}(H^{(N)})$  on olemassa kaikille yksinkertaisten satunnaismuuttujien jonoille joilla  $H^{(N)}(x) \uparrow H(x)$ , ja sen arvo on

$$E_{P_G}(H) = \int_0^\infty y P_G(x : H(x) \in dy) := (\text{Lebesgue-Stieltjes})- \int_a^b H(x) G(dx),$$

approksimoivasta jonosta riippumatta.

## 4.1 Monotonisen konvergenssin lause.

Odotusarvon määritelmän mukaan, kun  $X \in \mathcal{F}$  on olemassa jono  $(X_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{YF}^+$  jolla  $0 \leq X_n(\omega) \leq X(\omega)$  ja  $E(X_n) \rightarrow E(X)$ .

Osoitamme että  $E(X_n) \uparrow E(X)$  kaikille satunnaismuuttujien jonoille jolla  $0 \leq X_n \uparrow X$ .

**Lemma 4.1.1.** *Olkoon jono  $\{a_n^k : k, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$  joka on ei-vähenevä molempien indeksien  $(k, n)$  suhteen,*

$$a_{n-1}^k \leq a_n^k \leq a_{k+1}^n \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$$

*Silloin jonon raja-arvo on olemassa riippumatta rajankäynnin järjestyksestä*

$$\exists a := \lim_n (\lim_k a_n^k) = \lim_k (\lim_n a_n^k), \quad a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

*Myös jokaiselle indeksijonolle  $\{n(l), k(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$  jossa  $n(l), k(l) \rightarrow \infty$*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} a_{n(l)}^{k(l)} = a$$

*Tod. monotonisuudesta seuraa että  $\forall k$  kun  $n \uparrow \infty$*

$$\begin{array}{ccc} a_n^k & \uparrow & a_\infty^k \\ |\wedge & & |\wedge \\ a_n^{k+1} & \uparrow & a_\infty^{k+1} \end{array}$$

*Tästä seuraa että  $a_\infty^k$  on monotoninen jono ja on olemassa  $a' = \lim_{k \rightarrow \infty} a_\infty^k$ .*

*Samoin,  $\forall n$  kun  $k \uparrow \infty$ ,  $a_n^k \uparrow a_n^\infty$  ja  $a_n^\infty \leq a_{n+1}^\infty$ , ja seuraa että on olemassa monotoninen raja  $a'' = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\infty$ .*

*Kun  $a' = a'' = +\infty$  väite on tosi.*

*Jos olisi  $a' < a'' = +\infty$ , seuraisi ristiriita, koska silloin jokaiselle  $N, \varepsilon > 0$  olisi olemassa  $n, k$  tarpeeksi suurilla joilla*

$$N \leq a_n^\infty \leq a_n^k + \varepsilon \leq a_\infty^k + \varepsilon \leq a' + \varepsilon$$

*Kun molemmat  $a', a'' < \infty$ , seuraa että  $\forall \varepsilon > 0$  on olemassa  $\bar{n}, \bar{k}$  jolla*

$$a'' < a_{\bar{n}}^\infty + \varepsilon, \quad a_\infty^{\bar{k}} < a_{\bar{n}}^{\bar{k}} + \varepsilon$$

Tästä seuraa

$$a' \geq a_{\infty}^{\bar{k}} \geq a_{\bar{n}}^{\bar{k}} \geq a_{\bar{n}}^{\infty} - \varepsilon \geq a'' - 2\varepsilon$$

Koska  $\varepsilon$  on mielivaltainen seuraa että  $a' \geq a''$ . Samoin seuraa  $a'' \geq a'$ .

Kun  $n(l), k(l) \uparrow (+\infty)$  ovat kasvavia indeksijonoja,

$$\begin{aligned} a' &= \lim_{l \rightarrow \infty} a_{\infty}^{k(l)} \geq \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n(l)}^{k(l)} \geq \lim_{l \rightarrow \infty} a_n^{k(l)} \quad \forall n, \\ a' &\geq \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n(l)}^{k(l)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} a_n^k = a'' = a' \quad \square \end{aligned}$$

**Huomautus 4.1.1.** Yleisesti, ilman samasuuntaisen monotonisuuden oletusta tämä ei päde. Esimerkiksi, kun  $g : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  aina

$$\sup_x \inf_y g(x, y) \leq \inf_y \sup_x g(x, y),$$

mutta päinvastainen epäyhtälö ei päde ilman lisäoletuksia.

**Lemma 4.1.2.** Monotoninen konvergenssi lause yksinkertaisille satunnaismuuttujille

Olkoon  $X, X_n \in \mathcal{Y}F^+$  jossa  $0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ .

Silloin  $E_P(X_n) \uparrow E_P(X)$ .

Olkoon ensin  $X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$ ,  $A \in \mathcal{F}$ . Kun  $0 < \varepsilon < 1$ , olkoon

$$A_n^\varepsilon = \{\omega : X_n(\omega) \geq (1 - \varepsilon)\} \subseteq A_{n+1}^\varepsilon \subseteq A$$

koska  $X_n(\omega)$  on ei vähenevä ja  $X_n(\omega) = 0$  kun  $\omega \notin A$ .

Seuraa  $A_n^\varepsilon \uparrow A$ , eli kun  $\omega \in A$ , myös  $\omega \in A_n$  kun  $n$  on tarpeeksi suuri, eli  $\forall \omega \exists \bar{n}(\omega)$  jolla  $\forall n > \bar{n}(\omega)$

$$\begin{aligned} X_n(\omega) &> (\mathbf{1}_A(\omega) - \varepsilon) = \\ &, \text{ eli } (1 - \varepsilon), \text{ kun } \omega \in A. \end{aligned}$$

$\sigma$ -additiivisuudesta seuraa  $P(A_n^\varepsilon) \uparrow P(A)$  ja koska  $X_n(\omega) \geq (1 - \varepsilon)\mathbf{1}_{A_n^\varepsilon}(\omega)$  seuraa

$$P(A) \geq E_P(X_n) \geq (1 - \varepsilon)P(A_n^\varepsilon) \uparrow (1 - \varepsilon)P(A)$$

Koska  $\varepsilon$  oli mielivaltainen  $E_P(X_n) \uparrow P(A) = E_P(X)$ . Odotusarvon lineaarisuuden nojalla väite seuraa myös kun  $X \in \mathcal{Y}F$ .

**Lemma 4.1.3.** *Olkoon  $X(\omega) \in \mathcal{F}^+$ . Jos  $\{X_n\}, \{Y_n\} \subseteq \mathcal{YF}^+$ ,  $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$  ja  $Y_n(\omega) \uparrow X(\omega) \forall \omega$ , seuraa*

$$\lim_n E_P(X_n) = \lim_n E_P(Y_n)$$

Tod. Jono  $Z_m^n(\omega) = \min\{X_n(\omega), Y_m(\omega)\}$  on ei-vähenevä molempien indeksien  $n, m$  suhteen.

Koska  $Y_n(\omega) \uparrow X(\omega) \geq X_n(\omega) \uparrow X(\omega) \geq Y_n(\omega)$  seuraa että

$$Z_m^n(\omega) \uparrow X_n(\omega) \text{ kun } m \uparrow \infty, \text{ ja } Z_m^n(\omega) \uparrow Y_m(\omega) \text{ kun } n \uparrow \infty$$

Kun otamme odotusarvoa, koska  $Z_m^n, X_n$  ja  $Y_m$  ovat yksinkertaisia seuraa lemmasta (4.1.2)

$$E_P(Z_m^n) \uparrow E_P(X_n) \text{ kun } m \uparrow \infty, \text{ ja } E_P(Z_m^n) \uparrow E_P(Y_m) \text{ kun } n \uparrow \infty,$$

lemmasta (4.1.1) seuraa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_P(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} E_P(Z_m^n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} E_P(Z_m^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_P(Y_n) \quad \square$$

**Seuraus 4.1.1.** *Kun  $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$  jossa  $\{X_n\} \subseteq \mathcal{YF}^+$  ja  $X \in \mathcal{F}^+$ , seuraa  $E_P(X_n) \uparrow E_P(X)$ .*

Tod.  $E_P(Y)$ :n määritelmästä seuraa että on olemassa  $\{Y_n\} \subseteq \mathcal{YF}^+$  jolla  $0 \leq Y_n(\omega) \leq X(\omega)$  ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_P(Y_n) = E_P(Y)$ . Tässä väihteessä  $Y_n(\omega)$  ei välttämättä kasvaa monotonisesti kaikille  $\omega$ :lle.

Olkoon  $X^{(n)}(\omega) := \alpha^{(n)}(X(\omega)) \uparrow X(\omega)$  (kts. 4.0.1), ja määritellään ei-vähenevä satunnaismuuttujien jono

$$Z_n(\omega) = \max\{X^{(n)}(\omega), Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega)\} \in \mathcal{YF}^+.$$

Koska  $Z_n(\omega) \geq X^{(n)}(\omega) \uparrow X(\omega)$  seuraa että myös  $Z_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ .

Koska  $Y_n(\omega) \leq Z_n(\omega) \leq X(\omega)$  ja odotusarvo  $E_P : \mathcal{YF}^+ \rightarrow [0, +\infty]$  on positiivinen ja lineaarinen operaattori

$$0 \leq E_P(Y_n) \leq E_P(Z_n(\omega)) \leq E_P(X(\omega)),$$

ja koska  $\lim_n E_P(Y_n) = E_P(X(\omega))$  seuraa että  $E_P(Z_n(\omega)) \uparrow E_P(X(\omega))$ .

Lemmasta (4.1.3) seuraa nyt että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_P(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_P(Z_n) = E_P(X) \quad \square$$

**Teoreema 4.1.1.** *Monotoninen konvergenssilause.*

*Olkoon  $X, X_n \in \mathcal{F}^+$  jossa  $0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$   $P$ -melkein varmasti, Silloin  $E_P(X_n) \uparrow E_P(X)$ .*

Oletetaan ensin että jokaiselle  $\omega$ :  $0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ . Jokaiselle  $n$ :lle määritellään yksinkertaisten satunnaismuuttujien jono  $X_n^{(k)}(\omega) = \alpha^{(k)}(X_n(\omega)) \in \mathcal{YF}^+$  jolla  $0 \leq X_n^{(k)}(\omega) \uparrow X_n(\omega)$  kun  $k \uparrow \infty$ . Seuraa lemmasta (4.1.2) että  $E_P(X_n^{(k)}) \uparrow E_P(X_n)$  kun  $k \uparrow \infty$ .

Huomataan myös että kun  $n \rightarrow \infty$ , koska funktio  $\alpha^{(k)}(x)$  on vasemmalta jatkuva ja  $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$  seuraa että

$$X_n^{(k)}(\omega) \uparrow X^{(k)}(\omega) := \alpha^{(k)}(X(\omega)) \in \mathcal{YF}^+.$$

Koska funktiot  $\alpha^{(k)}(x)$  ovat ei-väheneviä, seuraa myös että  $X_n^{(k)}(\omega) \leq X_n^{(k+1)}(\omega)$ . Koska odotusarvo  $E_P : \mathcal{YF}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup [0, +\infty]$  on positiivinen operattori, jono  $\{E_P(X_n^{(k)}) : n, k \in \mathbb{N}\}$  on ei-vähenevä molempien indeksien suhteen ja lemmasta (4.1.1) seuraa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_P(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} E_P(X_n^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} E_P(X_n^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} E_P(X^{(k)}) = E_P(X)$$

jossa vasemmanpuolen yhtälö seuraa väitteestä (4.1.1).

Kun  $0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$   $P$ -melkein varmasti, on olemassa joukko  $B \in \mathcal{F}$  jolla  $P(B) = 1$  ja  $0 \leq X_n(\omega)\mathbf{1}_B(\omega) \uparrow X(\omega)\mathbf{1}_B(\omega) \forall \omega$ . Seuraa lauseista (4.0.3), (4.1.1) että

$$E_P(X_n) = E_P(X_n\mathbf{1}_B) \uparrow E_P(X\mathbf{1}_B) = E_P(X) \quad \square$$

**Seuraus 4.1.2.** *Odotusarvo  $E_P : L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  on positiivinen ja lineaarinen operattori.*

Tod. Harjoitustehtävä, approksimoivien yksinkertaisten satunnaismuuttujien avulla.

**Lemma 4.1.4.** *(Fatou lemma) Kun  $X_n(\omega) \geq 0$   $P$ -melkein varmasti  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,*

$$0 \leq E_P(\liminf_n X_n) \leq \liminf_n E_P(X_n)$$

*Tämä seuraa myös kun  $X_n(\omega) \geq Z(\omega) \forall n \in \mathbb{N}$   $P$ -melkein varmasti, jossa  $E_P(Z^-) < +\infty$ .*

Tod. Olkoon  $Y_n(\omega) := \inf_{k \geq n} X_k(\omega)$ , joka on ei-vähenevä  $\forall \omega$ , jolla  $X_n(\omega) \geq Y_n(\omega) \uparrow \liminf_n X_n(\omega)$ . Koska oletuksesta  $Y_n(\omega) \geq 0$   $P$ -m.v. monotonisesta konvergenssista seuraa

$$\liminf_n E_P(X_n) \geq \liminf_n E_P(Y_n) = \lim_n E_P(Y_n) = E_P(\liminf_n X_n)$$

Kun  $X_n(\omega) \geq Z(\omega) \geq -(Z^-(\omega))$ , jolla  $E_P(Z^-) < +\infty$ .

Koska  $(X_n(\omega) + Z^-(\omega)) \geq 0$ , ja odotusarvon lineaarisuudesta,

$$\begin{aligned} \liminf_n E(X_n) + E_P(Z^-) &= \liminf_n E_P(X_n + Z^-) \geq E_P(\liminf_n (X_n + Z^-)) \\ &= E_P(\liminf_n X_n) + E_P(Z^-) \geq 0 \end{aligned}$$

ja väite seuraa kun  $E_P(Z^-) < \infty$ .

**Lemma 4.1.5.** (käänteis-Fatou lemma) Jos  $X_n(\omega) \leq Z(\omega) \leq Z^+(\omega) \forall n \in \mathbb{N}$   $P$ -melkein varmasti jossa  $E_P(Z^+) < \infty$ , seuraa että

$$\limsup_n E_P(X_n) \leq E_P(\limsup_n X_n) \leq E(Z)$$

Tod. Sovelletaan Fatou lemmaa jonolle  $X'_n(\omega) := -X_n(\omega) \geq -Z^+(\omega)$ , ja väite seuraa koska  $(\limsup_n a_n) = -(\liminf_n (-a_n)) \quad \square$

**Lause 4.1.1.** Lebesgue'n dominoidun konvergenssin lause. Kun

- $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$
- $\sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n(\omega)| \leq Z(\omega)$  jossa  $E_P(Z) < \infty$ ,

$P$ -melkein varmasti (eli  $\forall \omega \in N^c$  jossa  $P(N) = 0$ ), siitä seuraa  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_P(X_n) = E_P(X)$

**Todistus.** Koska  $|X_n| \leq Z$  ja  $E_P(Z) < \infty$ , Fatoun ja käänteis-Fatoun lemmat astuvat voimaan

$$E_P(X) = E_P(\liminf_n X_n) \leq \liminf_n E_P(X_n) \leq \limsup_n E_P(X_n) \leq E_P(\limsup_n X_n) = E_P(X) \quad \square$$

Lebesgue'n dominoidun konvergenssin lause pätee myös kun integroidaan  $\sigma$ -äärellisen mitan suhteen, esimerkiksi  $\mathbb{R}^d$  avarudessa Lebesguen mitalla varustettuna.

**Lause 4.1.2.** Olkoon  $(\Omega, \mathcal{F})$  mitallinen avaruus varustettu  $\sigma$ -äärellisellä mitalla  $\lambda(d\omega)$ ,  $(f_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f(\omega)$  mitalliset funktiot jossa

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad \forall \omega \in N^c$$

jossa  $N \subset \Omega$  ja  $\mu(N) = 0$ .

• On olemassa integroituva yläraja  $g(\omega) \geq 0$  jolla

$$|f_n(\omega)| \leq g(\omega) \quad \forall \omega \in N^c, n \in \mathbb{N} \text{ ja } \int_{\Omega} g(\omega) \lambda(d\omega) < \infty$$

Silloin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(\omega) \lambda(d\omega) = \int_{\Omega} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) \right) \lambda(d\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) \lambda(d\omega)$$

Tod. Voidaan olettaa  $f_n(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}$ , muuten hajotetaan  $f_n(\omega) = f_n(\omega)^+ - f_n(\omega)^-$  ja integroidaan erikseen.

Koska  $\lambda$  on  $\sigma$ -äärellinen, on olemassa numeroituva mitallinen ositus  $(\Omega_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{F}$  jolla  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  kun  $i \neq j$ ,  $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$  ja  $0 < \lambda(\Omega_i) < \infty \quad \forall i \in \mathbb{N}$ .

Määritellään todennäköisyyssmittojen jono

$$P_i(A) := \frac{\lambda(A \cap \Omega_i)}{\lambda(\Omega_i)}, \quad A \in \mathcal{F}$$

Huomataan että

$$\int_{\Omega} g(\omega) \lambda(d\omega) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(\Omega_i) \int_{\Omega} g(\omega) P_i(d\omega) < \infty$$

josta seuraa  $g(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P_i) \quad \forall i$ . Lebesgue dominoidun konvergenssin lause 4.1.1 soveltuu jokaisen  $P_i$  mitan suhteen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(\omega) P_i(d\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) P_i(d\omega)$$

Väite seuraa koska

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(\omega) \lambda(d\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} f_n(\omega) \lambda(d\omega) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_i} f_n(\omega) \lambda(d\omega) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) \right) \lambda(d\omega) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} f(\omega) \lambda(d\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) \lambda(d\omega) \end{aligned}$$

jossa käytettiin lemma (4.1.1) jonolle  $\left\{ \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} f_m(\omega) \lambda(d\omega) : m, n \in \mathbb{N} \right\}$  □

**Esimerkki 4.1.1.** Olkoon  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ , ja  $P$  on tasainen jakauma jolla  $P((a, b]) = (b - a)$  kun  $0 \leq a \leq b \leq 1$ .

Olkoon  $X_n(\omega) = n \mathbf{1}(\omega \leq 1/n)$ .

Huomataan että kun  $\omega \neq 0$ ,  $X_n(\omega) \rightarrow 0$  kun  $n \rightarrow \infty$ , koska  $X_n(\omega) = 0$  kun  $n > 1/\omega$ . Koska  $P((0, 1]) = 1$ ,  $X_n(\omega) \rightarrow 0$   $P$ -melkein varmasti.

Toisaalta  $E_P(X_n) = nn^{-1} = 1 > 0 = E_P(\lim_n X_n)$ .

Lebesguen dominoidun konvergenssi lauseen hypoteesi ei päde.

$$\begin{aligned} X^*(\omega) &= \sup_n X_n(\omega) = n \text{ kun } \omega \in \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \iff \omega^{-1} \in [n, n+1) \\ \text{eli } X^*(\omega) &= \lfloor \omega^{-1} \rfloor \text{ ja } (\omega^{-1} - 1) < X^*(\omega) < \omega^{-1} \end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$E_P(X^*) > \left( \int_0^1 x^{-1} dx \right) - 1 = \int_0^1 d \log(x) - 1 = \log(1) - \log(0) - 1 = +\infty$$

eli  $X^*$  ei ole integroitava ja dominoidun konvergenssin lause ei pysty soveltamaan.

## 4.2 Satunnaismuuttujan jakauma

**Määritelmä 4.2.1.** Olkoon  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$  satunnaismuuttuja, esimerkiksi  $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ , ja olkoon  $P$  todennäköisyys  $(\Omega, \mathcal{F})$ -avaruudessa.

Todennäköisyyksmitta

$$P_X(B) := (P \circ X^{-1})(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}), \quad \forall B \in \mathcal{S}$$

kutsutaan satunnaismuuttujan  $X$  jakaumaksi tai pushforward-todennäköisyyksmitaksi.

**Esimerkki 4.2.1.** Osoita että  $P_X$  on todennäköisyys  $(S, \mathcal{S})$  avaruudessa.

**Lemma 4.2.1.** Olkoon s.m.  $X(\omega) \in \mathbb{R}^d$ , ja  $Y(\omega) = g(X(\omega)) \in \mathbb{R}$ ,  
jossa  $g : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  on mitallinen kuvaus. Silloin

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)P_X(dx) = E_P(g(X)) = \int_{\Omega} g(X(\omega))P(d\omega) = E_P(Y) = \int_{\mathbb{R}} yP_Y(dy)$$

jossa  $P_Y(D) = P(Y^{-1}(D)) = P_X(g^{-1}(D))$  kun  $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Tod. kun  $g(x) = \mathbf{1}_B(x)$  jossa  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  väite seuraa suoraan  $P_X$  ja  $P_Y$  mittojen määritelmästä, ja siksi väite on totta myös kun kuvaus  $g(x)$  saa äärellistä monta arvoa.

Voidaan olettaa että  $g(x) \geq 0$ , muuten hajotetaan ensin  $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$ . Silloin on olemassa yksinkerteaisten kuvausten jono  $g^{(N)}(x) \uparrow g(x) \forall x \in \mathbb{R}^d$  (kts. 4.0.1), jolla myös  $g^{(N)}(X(\omega)) \uparrow g(X(\omega))$ . Monotonisen konvergenssilauseesta seuraa että

$$\int_{\Omega} g^{(N)}(X(\omega))P(d\omega) \uparrow \int_{\Omega} g(X(\omega))P(d\omega) \text{ ja } \int_{\mathbb{R}^d} g^{(N)}(x)P_X(dx) \uparrow \int_{\mathbb{R}^d} g(x)P_X(dx),$$

jossa  $\int_{\Omega} g^{(N)}(X(\omega))P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} g^{(N)}(x)P_X(dx) \quad \square$

**Esimerkki 4.2.2.** Jos satunnaismuuttujan  $X$  jakauman kertymäfunktio  $F_X(x) = P(X \leq x)$  on derivoituva derivaatalla  $f_X(x)$  (joka kutsutaan jakauman tiheysfunktiksi), ja  $g(x) \geq 0$  on Borel mitallinen funktio,

$$E_P(g(X)) = \int_{\Omega} g(X(\omega))P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x)F'(dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_X(x)dx$$

Erityisesti olkoon  $X(\omega) \geq 0$   $\lambda$ -eksponentiaalinen satunnaismuuttuja, jossa  $\lambda > 0$  on parametri, ja kertymäfunktio  $P(X \leq x) = F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x^+)$  jossa  $\lambda > 0$ ,  $x^+ = x \vee 0$ . Lasketaan

$$E_P(X) = \int_0^{\infty} xF_X(dx) = \int_0^{\infty} x \frac{d}{dx} F_X(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda \exp(-\lambda x) dx =$$

$$\lambda \left[ x \exp(-\lambda x) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) dx = 0 - 0 - \frac{1}{\lambda} \left[ \exp(-\lambda x) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

### 4.3 Odotusarvon sovellus: mitan vaihto

Todennäköisyys avaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , olkoon  $Z$  satunnaismuuttuja jolla  $Z(\omega) \geq 0$   $P$ -melkein varmasti ja  $0 < E_P(Z) < \infty$  (tästä seuraa  $P(\{\omega : Z(\omega) > 0\}) > 0$ ).

Määritellään uusi todennäköisyysmitta  $Q : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$

$$Q(A) := \frac{E_P(Z\mathbf{1}_A)}{E_P(Z)} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$Q$  on todennäköisyysmitta: Selvästi on additiivinen ja  $Q(\Omega) = 1$ . Osoitamme että on myös  $\sigma$ -additiivinen: kun  $A_n \uparrow \Omega$ , myös  $Z(\omega)\mathbf{1}_{A_n}(\omega) \uparrow Z(\omega)$   $P$ -melkein varmasti. Monotonisen konvergenssin lauseesta (4.1.1) seuraa

$$Q(A_n)E_P(Z) = E_P(Z\mathbf{1}_{A_n}) \uparrow E_P(Z) = Q(\Omega)E_P(Z) \implies Q(A_n) \uparrow 1$$

Voidaan myös käyttää normalisoitua muuttujaa

$$\tilde{Z}(\omega) := \frac{Z(\omega)}{E_P(Z)}$$

jolla  $E_P(\tilde{Z}) = 1$ , ja kirjoittaa  $Q(A) = E_P(\tilde{Z}\mathbf{1}_A)$ .

**Teoreema 4.3.1.**  $\forall A \in \mathcal{F} P(A) = 0 \implies Q(A) = 0$ . Sanotaan että  $Q$  on *absoluttisesti jatkuva*  $P$ :n suhteen, ja merkitään  $Q \ll P$ .

Tod. kun  $P(A) = 0$ ,  $Z(\omega)\mathbf{1}_A(\omega) = 0$   $P$ -melkein varmasti.

**Teoreema 4.3.2.** Kun  $X \in \mathcal{F}^+$ ,

$$E_Q(X) = \frac{E_P(XZ)}{E_P(Z)},$$

ja  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$  jos ja vain jos  $(XZ) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Tod. Kun  $X(\omega) \in \mathcal{Y}F^+$ , väite seuraa suoraan määritelmästä ja odotusarvon lineaarisuudesta. Kun  $X \in \mathcal{F}^+$  on olemassa jono  $\{X_n\} \subseteq \mathcal{Y}F^+$  jolle  $0 \leq X_n(\omega) \leq X(\omega) \forall \omega$ . Soveltamalla Monotonisen konvergenssin lauseen kaksi kertaa  $Q$  mitan alla ja  $P$  mitan alla, seuraa että  $E_Q(X_n) \uparrow E_Q(X)$  ja

$$E_Q(X_n) = \frac{E_P(X_n Z)}{E_P(Z)} \uparrow \frac{E_P(XZ)}{E_P(Z)} \quad \square$$

### 4.3.1 Uskottavuusosamäärä

Olemme rakentaneet mitan  $Q \ll P$  satunnaismuuttujan  $Z \in L^1(P)$  avulla. Tämä tulos kääntyy toisinpäin, kun  $Q \ll P$  on olemassa  $0 \leq Z(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  jolle mitanvaihto kaava  $Q(A) = E_P(Z\mathbf{1}_A)$  on voimassa.

**Teoreema 4.3.3.** (Radon-Nikodym lause) Todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F})$  olkoon  $P, Q$  todennäköisyysmittoja (yleisemmin  $P$  voisi olla  $\sigma$ -äärellinen mitta), joilla  $Q(A) = 0$  aina kun  $A \in \mathcal{F}$  ja  $P(A) = 0$  (merkintä:  $Q \ll_{\mathcal{F}} P$ ). Silloin on olemassa satunnaismuuttuja  $0 \leq Z(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  jolle  $E_P(Z) = 1$  ja

$$Q(A) = E_P(Z\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$Z(\omega)$  on yksikäsitteinen vailla  $P$ -nolla joukkoja. Merkitään

$$Z(\omega) = \frac{dQ}{dP}(\omega),$$

joka kutsutaan uskottavuus-osamääräksi (engl. likelihood ratio) tai Radon-Nikodym derivaataksi.

R-N lause todistetaan kurssin loppupuolella martingaalien avulla.

Mitanvaihto-kaava saa muotoa

$$E_Q(X) = \int_{\Omega} X(\omega)Q(d\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) \frac{dQ}{dP}(\omega) P(d\omega)$$

**Määritelmä 4.3.1.** Todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F})$  todennäköisyysmitat  $P$  ja  $P'$  ovat singulaarisia (merkintä:  $P \perp P'$ ), kun on olemassa  $A \in \mathcal{F}$  jolla  $P(A) = 0$  ja  $P'(A) = 1$ .

**Esimerkki 4.3.1.** Todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  olkoon  $\mathcal{F} = \sigma(X)$  jossa  $X(\omega)$  on standardi-gaussinen satunnaismuuttuja jolla  $E(X) = 0$ ,  $E(X^2) = 1$ , eli

$$P(X \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

Olkoon  $P'$  toinen todennäköisyysmitta jolla

$$P'(X_i \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2}\right)dx$$

Laskemme uskottavuusosamäärät

$$Z'(\omega) = \frac{dP'}{dP}(\omega) \quad \text{ja} \quad Z(\omega) = \frac{dP}{dP'}(\omega) = \frac{1}{Z'(\omega)}$$

R-N lauseesta seuraa että  $Z'(\omega)$  on  $\sigma(X)$  mitallinen, siksi on olemassa Borel mitallinen kuvaus  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  jolla  $Z'(\omega) = z'(X(\omega))$  (harjoitustehtävä).

Silloin, kaikille Borel mitallisille funktioille  $f(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right) dx &= E_{P'}(f(X)) = E_P(f(X)Z') \\ &= E_P(f(X)z'(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)z'(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \end{aligned}$$

josta seuraa

$$\begin{aligned} z'(x) &= \exp\left(\mu x - \frac{1}{2}\mu^2\right), \\ Z'(\omega) &= \exp\left(\mu X(\omega) - \frac{1}{2}\mu^2\right) \end{aligned}$$

Koska  $E_P(Z') = 1$ , seuraa

$$E_P(\exp(\mu X)) = \exp\left(\frac{1}{2}\mu^2\right)$$

### 4.3.2 Lebesguen hajotelma

Olkoon  $P, P'$  todennäköisyysmittoja todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F})$ , joilla ei välttämättä  $P \ll P'$  tai  $P' \ll P$ .

$Q := \frac{1}{2}(P + P')$  on todennäköisyysmitta jolla selvästi  $P \ll Q$  ja  $P' \ll Q$   $\sigma$ -algebrassa  $\mathcal{F}$ .

R-N lauseesta (4.3.3) seuraa että uskottavuusosamäärät

$$\zeta(\omega) := \frac{dP}{dQ}(\omega) \quad \text{ja} \quad \zeta'(\omega) := \frac{dP'}{dQ}(\omega),$$

ovat olemassa, ei-negatiivisiä ja  $\mathcal{F}$ -mitallisia.

Huomataan että koska  $\forall \omega$

$$\zeta(\omega) + \zeta'(\omega) = \frac{2dP}{d(P + P')}(\omega) + \frac{2dP'}{d(P + P')}(\omega) = 2 \frac{d(P + P')}{d(P + P')}(\omega) = 2$$

ja  $\zeta(\omega) \geq 0, \zeta'(\omega) \geq 0$  seuraa

$$\zeta(\omega) \leq 2, \zeta'(\omega) \leq 2 \quad Q \text{ m.v.,} \quad \text{ja} \quad Q(\{\omega : \zeta(\omega) = 0\} \cap \{\omega : \zeta'(\omega) = 0\}) = 0.$$

Määritellään  $\forall \omega \in \Omega$

$$Z(\omega) = \frac{dP}{dP'}(\omega) := \frac{\zeta(\omega)}{\zeta'(\omega)} \quad \text{ja} \quad Z'(\omega) = \frac{dP'}{dP}(\omega) := \frac{\zeta'(\omega)}{\zeta(\omega)} = \frac{1}{Z(\omega)}$$

jossa  $0/0$  saa mielivaltaisen arvo, esimerkiksi 0.

Mitan-vaihto kaavan yleistys on

$$E_{P'}(X) = E_P(XZ') + E_{P'}(X\mathbf{1}(\zeta = 0))$$

kun  $X \in \mathcal{F}^+$ .

**Todistus**

$$\begin{aligned} E_{P'}(X) &= E_{P'}(X\{\mathbf{1}(\zeta > 0) + \mathbf{1}(\zeta = 0)\}) = E_Q(X\zeta'\mathbf{1}(\zeta > 0)) + E_{P'}(X\mathbf{1}(\zeta = 0)) \\ &= E_Q\left(X\frac{\zeta'}{\zeta}\zeta\mathbf{1}(\zeta > 0)\right) + E_{P'}(X\mathbf{1}(\zeta = 0)) = E_Q(XZ'\zeta) + E_{P'}(X\mathbf{1}(\zeta = 0)) \\ &= E_P(XZ') + E_{P'}(X\mathbf{1}(\zeta = 0)) = E_P(XZ') + E_{P^\perp}(X) \end{aligned}$$

jossa

$$P^\perp(d\omega) := \mathbf{1}(\zeta(\omega) = 0)P'(d\omega),$$

Siis

$$P'(d\omega) = Z'(\omega)P(d\omega) + \mathbf{1}(\zeta(\omega) = 0)P'(d\omega) = Z'(\omega)P(d\omega) + P^\perp(d\omega)$$

$P$  ja  $P^\perp$  ovat singulaarisia, koska joukolle  $A := \{\omega : \zeta(\omega) = 0\}$  pätee

$$P(A) = 0 \text{ ja } P^\perp(A) = P^\perp(\Omega)$$

Koska  $P^\perp(\Omega) + E_P(Z') = P'(\zeta = 0) + E_P(Z') = 1$ ,  $P^\perp$  on todennäköisyyksmitta jos ja vain jos  $P \perp P'$ , (silloin  $P^\perp = P'$ ). Myös  $E_P(Z') \leq 1$  ja  $E_P(Z') = 1$  jos ja vain jos  $P' \ll P$ , silloin  $P^\perp = 0$ .

**Esimerkki: Ehdollinen todennäköisyys** Olkoon  $B \in \mathcal{F}$  jolla  $P(B) > 0$ , ja suoritamme mitan vaihdon satunnaismuuttujalla  $Z(\omega) = \mathbf{1}_B(\omega)$ , saadaan

$$P(A|B) := \frac{E_P(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)}{E_P(\mathbf{1}_B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad A \in \mathcal{F}$$

Kuvaus  $P(\cdot | B) : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  on todennäköisyysmitta, joka kutsutaan ehdolliseksi todennäköisyydeksi ehdolla  $B$  tapahtuman.

De Finettin vedonlyöntimeklararin näkökulmasta  $P(A|B)$  on  $A$  tapahtuman hinta johdonmukaisessa hinnoittelujärjestelmässä  $P$ , silloin kun tiedetään että  $B$  tapahtuu. Hajotelmasta

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

on paljon hyötyä monimutkaisten tapahtumien todennäköisyyksien laskemisessa.

**Lemma 4.3.1.** • Kun  $(A_i : i \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$  on tapahtumien jono jolla  $P(A_i \cap A_k) = 0, i \neq j, P(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = 1$ , seuraa  $P(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(B|A_i)P(A_i)$

• Kun  $P(B \cap C) > 0, P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$

•

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

**Tod.:** harjoitustehtävä.

Satunnaismuuttujan  $X \in L^1(P)$  ehdollinen odotusarvo ehdolla  $B$  tapahtuman on

$$E_P(X|B) := \frac{E_P(X \mathbf{1}_B)}{P(B)}$$

Huomaamme että tässä vaiheessa ehto  $P(B) > 0$  on välttämätön. Miten ehdollisen odotusarvon käsite yleistyy  $P$ -nolla mittaisille tapahtumille  $B$ ? Vastaus esitetään kurssin loppupuolella.



# Luku 5

## Riippumattomuus

**Määritelmä 5.0.1.** • Olkoon  $A, B \in \mathcal{F}$ . Sanomme että  $A$  ja  $B$  ovat riippumattomia  $P$ -mitan suhteen (merkintä:  $A \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp} B$ ) kun

$$P(A)P(B) = 0 \quad \text{tai} \quad P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

eli ehdollistaminen ei muuttaa todennäköisyyttä. Kun  $P(A|B) = P(A)$  myös  $P(B|A) = P(B)$  ja  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

- Yleisemmin tapahtumat  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ovat riippumattomia  $P$ -mitan suhteen kun jokaiselle indeksien alijoukolle  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ ,

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

merkintä:  $(A_1, A_2, \dots, A_n) \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp}$ .

- Satunnaismuuttujat  $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$  jossa  $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^{d_i}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_i}))$   $i = 1, \dots, n$  ovat riippumattomia  $P$ -mitan suhteen kun  $\forall B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_i})$   $i = 1, \dots, n$

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B_2) \dots P(X_n \in B_n)$$

merkintä:  $(X_1, X_2, \dots, X_n) \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp}$ .

- $\sigma$ -algebrat  $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}$  ovat riippumattomia  $P$ -mitan suhteen kun  $\forall A_i \in \mathcal{G}_i, i = 1, \dots, n$ ,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

merkintä:  $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n) \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp}$ .

**Huomautus 5.0.1.** • Olkoon  $A, B \in \mathcal{F}$ , kun  $A \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp} B$ , myös  $(A^c) \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp} B$ .

- Olkoon  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on Borel mitallinen kuvaus. Satunnaismuuttujille joilla  $(X_1, \dots, X_n) \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp} Y$  seuraa  $g(X_1, X_2, \dots, X_n) \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp} Y$ .
- Kun  $A \in \mathcal{F}$  ja  $A \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp} A$ , seuraa että  $P(A) = 0$ , tai  $P(A) = 1$ .
- Huomataan että parittaisesta riippumattomuudesta  $A_i \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp} A_j \forall 1 \leq i \neq j \leq n$ , yleisesti ei seuraa  $(A_1, A_2, \dots, A_n) \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp}$ .

**Esimerkki 5.0.1.** Olkoon  $A, B \in \mathcal{F}$  jolla  $A \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp} B$  ja  $P(A) = P(B) = 1/2$ .

Olkoon  $C = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$ . Silloin  $C \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp} A$  ja  $C \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp} B$ . Vaikka kaikki tapahtumat ovat parittain riippumattomia  $P$ :n suhteen, kolmikkona tapahtumat  $A, B, C$  eivät ole  $P$ -riippumattomia.

Todistukset: harjoitustehtävät.

**Määritelmä 5.0.2.** Olkoon  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  todennäköisyysavaruus ja  $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ , ali  $\sigma$ -algebrat.

Sanotaan että  $\sigma$ -algebrat  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$  ovat ehdollisesti  $P$ -riippumattomia ehdolla  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -algebran, jos  $\forall G \in \mathcal{G}$  jolla  $P(G) > 0$ ,  $A_i \in \mathcal{F}_i : i = 1, \dots, n$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n | G) = \prod_{i=1}^n P(A_i | G)$$

**Lemma 5.0.1.** Satunnaismuuttujat  $X_1, \dots, X_n$  ovat  $P$ -riippumattomia jos ja vain jos kaikille ei-negatiivisille Borel mitalliselle funktioille  $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , pätee

$$E_P(g(X_1) \dots g(X_n)) = E_P(g_1(X_1)) \dots E_P(g_n(X_n)) \quad (5.0.1)$$

**Tod.** Kun valitsemme  $g_k(x) = \mathbf{1}_{B_k}(x)$  jossa  $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\Leftarrow$  implikaatio seuraa.

Toisinpäin, jos  $X_1, \dots, X_n$  ovat  $P$ -riippumattomia, (5.0.1) pätee Borelin joukkojen indikaattoreille.

Silloin kun  $g_k(x) = \sum_{i=1}^{m_k} y_{i,k} \mathbf{1}_{B_{i,k}}(x)$ ,

$$\begin{aligned} E_P(g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)) &= E_P\left(\prod_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{m_k} y_{i,k} \mathbf{1}_{B_{i,k}}(X_k) \right\}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} y_{i_1,1} \cdots y_{i_n,n} P(X_1 \in B_{i_1,1}, \dots, X_n \in B_{i_n,n}) \\ &= \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} y_{i_1,1} \cdots y_{i_n,n} P(X_1 \in B_{i_1,1}) \cdots P(X_n \in B_{i_n,n}) \\ &= \prod_{k=1}^n E_P\left(\left\{ \sum_{i=1}^{m_k} y_{i,k} \mathbf{1}_{B_{i,k}}(X_k) \right\}\right) = E_P(g_1(X_1)) \cdots E_P(g_n(X_n)) \end{aligned}$$

Jos  $g_k^{(N)}(x)$  ovat yksinkertaisia Borelin funktioita  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  jolla

$$0 \leq g_k^{(N)}(x) \uparrow g_k(x), \text{ kun } N \uparrow \infty, \forall k = 1, \dots, n$$

myös niiden tulot ovat Borelin funktioita  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  jotka kasvavat monotonisesti

$$(g_1^{(N)}(x_1) \cdots g_n^{(N)}(x_n)) \uparrow (g_1(x_1) \cdots g_n(x_n)),$$

ja väite seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta.

### 5.0.1 Lovaszin lokaali lemma <sup>1</sup>

Tässä luvussa näytämme miten paljon saa aikaiseksi pelaamalla pelkätään induktiolla ja ehdollisen todennäköisyyden määritelmällä.

Kun tapahtumat  $A_1, \dots, A_n$  ovat  $P$ -riippumattomia, myös komplementit ovat  $P$ -riippumattomia, ja

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) = \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

Lovasz lokaali lemma antaa samankaltaisen alarajan silloin kun "tapahtumien riippuvuus on tarpeeksi harva".

<sup>1</sup>Tämä kappale voidaan sivuuttaa

**Lemma 5.0.2.** ( Paul Erdős ja Lazlo Lovasz 1975) Olkoon  $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{F}$  tapahtumat todennäköisyysavaruudesta  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , ja  $(V, E)$  graafi solmujen joukolla  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  ja särmöjen joukolla  $E \subseteq V \times V$ .

Oletetaan että  $(V, E)$  on suunnaton, eli  $\forall i, j \in V (i, j) \in E \iff (j, i) \in E$  ja silloin merkitään  $i \sim j$ , ja  $(i, i) \notin E$  (merkintä:  $i \not\sim i$ ), ja on olemassa vektori  $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$  jolla

$$P\left(A_i \mid \bigcap_{j \in S} A_j^c\right) \leq x_i \prod_{j \sim i} (1 - x_j)$$

pätee  $\forall i \in V, S \subseteq V$  joilla  $\{i\} \cup \{j : j \sim i\} \subseteq S^c$  ja  $P\left(\bigcap_{j \in S} A_j^c\right) > 0$ .

Silloin  $\forall S, S' \subseteq V$  jolla  $S \cap S' = \emptyset$ ,

$$P\left(\bigcap_{i \in S} A_i^c \mid \bigcap_{j \in S'} A_j^c\right) \geq \prod_{i \in S} (1 - x_i) > 0$$

Erityisesti kun  $S' = \emptyset$ ,  $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i^c\right) \geq \prod_{i \in S} (1 - x_i) > 0$ , josta seuraa  $\bigcap_{i \in S} A_i^c \neq \emptyset$ .

**Todistus** Käytämme induktiota kokonaiskardinaaliteetin  $n = |S| + |S'|$  suhteen. Väite on triviaali kun  $n = 1$ , joka tarkoittaa  $|S| = 1, S' = \emptyset$ .

Osoitetaan ensin että väite on tosi kun  $|S| = 1, S = \{i\}$  ja  $i \notin S'$ .

Olkoon  $S' = S'' \cup S'''$  jossa  $S'' = S' \cap \{j \sim i\}$ ,  $S''' = S' \cap \{j : j \not\sim i\}$ .

Silloin

$$P\left(A_i \mid \bigcap_{j \in S'} A_j^c\right) = \frac{P\left(A_i, \bigcap_{j \in S''} A_j^c \mid \bigcap_{j \in S'''} A_j^c\right)}{P\left(\bigcap_{j \in S''} A_j^c \mid \bigcap_{j \in S'''} A_j^c\right)}$$

jossa

$$P\left(A_i, \bigcap_{j \in S''} A_j^c \mid \bigcap_{j \in S'''} A_j^c\right) \leq P\left(A_i \mid \bigcap_{j \in S'''} A_j^c\right) \leq x_i \prod_{j \sim i} (1 - x_j)$$

ja koska  $|S''| + |S'''| = |S'| < 1 + |S'| = n$  induktion oletuksesta seuraa

$$P\left(\bigcap_{j \in S''} A_j^c \mid \bigcap_{j \in S'''} A_j^c\right) \geq \prod_{j \in S''} (1 - x_j) \geq \prod_{j \sim i} (1 - x_j)$$

josta seuraa  $P\left(A_i^c \mid \bigcap_{j \in S'} A_j^c\right) \geq (1 - x_i)$ .

Kun  $\{i\} \subsetneq S$  ja  $S' \cap S = \emptyset$ , hajotetaan  $S = \{i\} \cup (S \setminus \{i\})$ ,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k \in S} A_k^c \mid \bigcap_{j \in S'} A_j^c\right) &= P\left(A_i^c \mid \bigcap_{j \in S' \cup S \setminus \{i\}} A_j^c\right) P\left(\bigcap_{k \in S \setminus \{i\}} A_k^c \mid \bigcap_{j \in S'} A_j^c\right) \\ &\geq (1 - x_i) \prod_{k \in S \setminus \{i\}} (1 - x_k) = \prod_{i \in S} (1 - x_i) > 0 \quad \square \end{aligned}$$

jossa induktio-oletus astuu voimaan koska  $|S \setminus \{i\}| + |S'| = |S| + |S'| - 1$ .

□

**Seuraus 5.0.1.** Oletetaan että  $(V, E)$  on riippuvuuden graafi, jossa

$\forall i \in V, S \subseteq V$  jolla  $S^c \subseteq \{i\} \cup \{j : j \sim i\}$ ,

tapahtuma  $A_i$  on  $P$ -riippumaton tapahtumasta  $\left(\bigcap_{j \in S} A_j\right)$ .

Toisin sanoen  $A_i$  on  $P$ -riippumaton  $\sigma$ -algebrasta  $\sigma(A_j : j \neq i \text{ ja } j \not\sim i)$ .

1. Kun on olemassa lukuja  $x_i \in [0, 1), i = 1, \dots, n$  jolla

$$P(A_i) \leq x_i \prod_{j \sim i} (1 - x_j),$$

seuraa  $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i^c\right) \geq \prod_{i \in S} (1 - x_i), \quad \forall S \subseteq V, \text{ erityisesti } \left(\bigcap_{i \in S} A_i^c\right) \neq \emptyset$ .

2. Erityisesti, kun  $\#\{j : j \sim i\} \leq d$ , ja  $P(A_i) \leq \exp(-1)/(d+1), \forall i \in V$ ,  
seuraa

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) \geq \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^n > 0$$

### Todistus

1. Yleisen Lovaszin lemmän oletus seuraa riippumattomuuden nojalla.

2. Tarvitaan  $x$  jolla  $p \leq x(1-x)^d$ . Kun  $x = (1+d)^{-1}$ , ensimmäisen osan oletus seuraa koska

$$P(A_i) \leq \frac{\exp(-1)}{d+1} \leq \frac{1}{d+1} \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d = x(1-x)^d \quad \square$$

$$\text{jossa } \exp(-1) \leq \left(1 - (d+1)^{-1}\right)^d \quad \square$$

**Esimerkki 5.0.2.** *Dataverkossa on  $n$  solmuparia, ja jokaiselle solmuparin  $p$  välissä on joukko  $J_p$  mahdollisia reittejä.*

*Oletetaan että  $|J_p| = m$  jokaiselle parille  $p$ , ja kun  $p \neq p'$  jokaiselle reitille  $r \in J_p$  pätee*

$$|\{r' \in J_{p'} \text{ jolla reitit } r \text{ ja } r' \text{ leikkaavat toisiinsa}\}| \leq k$$

*Kun  $k$  ei ole liian suuri, on mahdollista yhdistää jokaista solmujen paria, reitityksillä jossa kaikki reitit eivät leikkaa toisiinsa.*

**Tod.** *Jokaiselle solmujen parille  $p$  valitaan riippumattomasti tasaisesta jakaumasta satunnaisreitti  $R_p$  joukosta  $J_p$ . Määritellään jokaiselle solmujen parien parille  $p \neq p'$  tapahtuma*

$$A_{p,p'} = \{ \text{satunnaisreitit } R_p \text{ ja } R_{p'} \text{ leikkaavat toisiinsa} \}.$$

*Selvästi  $P(A_{p,p'}) \leq k/m$ . Huomataan myös että*

$$A_{p,p'} \perp\!\!\!\perp \sigma(A_{q,q'} : q \neq p, p', \text{ ja } q' \neq p, p')$$

*Seuraa että on  $d = 2(n-1)$  tapahtumaa,  $A_{p,r}$  jolla  $r \neq p$  ja  $A_{r',p'}$  jolla  $r' \neq p'$ , jotka ovat  $P$ -riippuvaisia tapahtumasta  $A_{p,p'}$ . Siis tapahtuman  $A_{p,p'}$  aste (naapureiden määrä) tapahtumien riippuvuusgrafissa on  $d = 2(n-1)$ .*

*Silloin kun*

$$P(A_{p,p'}) \leq k/m \leq \frac{\exp(-1)}{d+1} \leq (d+1)^{-1} \left(1 - (d+1)^{-1}\right)^d$$

*eli  $k \leq m \exp(-1)/(2n-1)$ , Lovászín lemma astuu voimaan ja*

$$P\left(\bigcap_{p,p'} A_{p,p'}^c\right) > \left(1 - (d+1)^{-1}\right)^{n(n-1)/2} > 0,$$

*josta seuraa  $\left(\bigcap_{p,p'} A_{p,p'}^c\right) \neq \emptyset$   $\square$*

## 5.1 Borel Cantelli lemmat

**Lemma 5.1.1.** (Borel-Cantelli I).

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P(\limsup_n A_n) = P(\{\omega : \omega \in A_n \text{ äärettömään monille } n\text{:lle}\}) = 0$$

Tod.

$$\limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k>n} A_k \subseteq \bigcup_{k>m} A_k \quad \forall m$$

Sarjan suppenemisesta seuraa

$$P(\limsup_n A_n) \leq \sum_{k>m} P(A_k) \rightarrow 0 \text{ kun } m \rightarrow \infty \quad \square$$

**Lemma 5.1.2.** Yleistetty Borel-Cantelli I (Barndorff-Nielsen, 1961)

Kun  $\liminf_n P(A_n) = 0$  ja  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty$ , seuraa  $P(\limsup_n A_n) = 0$ .

**Tod.** Huomataan että

$$\limsup_n (A_n \cap A_{n+1}^c) = (\limsup_n A_n) \cap (\limsup_n A_n^c)$$

koska jos  $(A_n \cap A_{n+1}^c)$  tapahtuu äärettömään usein, myös  $A_n$  ja  $A_n^c$  tapahtuvat äärettömään usein. Toisaalta, jos molemmat  $A_n$  ja  $A_n^c$  tapahtuvat äärettömään usein, myös  $(A_n \cap A_{n+1}^c)$  tapahtuu äärettömään usein muuten jompikumpi  $(\liminf_n A_n) = (\limsup_n A_n^c)^c$  tai  $(\liminf_n A_n^c) = (\limsup_n A_n)^c$  tapahtuisi.

$$P(\limsup_n A_n) = P(\limsup_n (A_n \cap A_{n+1}^c)) + P((\limsup_n A_n) \cap (\limsup_n A_n^c)^c) = 0$$

koska oletuksesta ja ensimmäisen Borel Cantelli lemmasta seuraa

$$P(\limsup_n (A_n \cap A_{n+1}^c)) = 0,$$

ja  $P((\limsup_n A_n^c)^c) = P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n) = 0 \quad \square$ .

**Lause 5.1.1.** ( Kolmogorovin 0-1 laki ) Todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  olkoon  $\{\mathcal{F}_k : k \in \mathbb{N}\}$   $\sigma$ -algebroiden jono jossa  $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}$ . Olkoon

$$\mathcal{F}^\infty = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_k, \quad \mathcal{T}_n = \bigvee_{k \geq n} \mathcal{F}_k, \quad \mathcal{T} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$$

$\mathcal{T}$  kutsutaan häntä (tail)  $\sigma$ -algebraksi.

Silloin kun  $\sigma$ -algebrat  $\{\mathcal{F}_k : k \in \mathbb{N}\}$  ovat  $P$ -riippumattomia, eli

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_n}) = \prod_{i=1}^n P(A_{k_i}) \quad \forall n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}, A_{k_i} \in \mathcal{F}_{k_i}.$$

seuraa että  $\mathcal{T}$  on  $P$ -triviaali, eli  $P(A) \in \{0, 1\}$  kun  $A \in \mathcal{T}$ .

Tod. Olkoon  $A \in \mathcal{T}$ . Silloin  $A \in \mathcal{T}_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ , ja tästä seuraa  $\sigma$ -algebroiden riippumattomuus

$$A \perp\!\!\!\perp^P \left( \bigvee_{k=1}^n \mathcal{F}_k \right) \quad \forall n \implies A \perp\!\!\!\perp^P \left( \bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k \right) = \mathcal{F}^\infty$$

joka tarkoittaa  $\mathcal{T} \perp\!\!\!\perp^P \mathcal{F}^\infty \supseteq \mathcal{T}$ . Koska  $A \in \mathcal{T}$  on  $P$ -riippumaton itsestään,

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A)P(A).$$

Ainoat ratkaisut ovat  $P(A) = 0, 1$   $\square$

**Lemma 5.1.3.** ( Borel-Cantelli II )

Olkoon  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$   $P$ -riippumattomien tapahtumien jono, eli

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \prod_{k=1}^n P(A_{i_k}) \quad \forall n, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}.$$

Silloin

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \iff P(\limsup_n A_n) = P(\{\omega : \omega \in A_n \text{ äärettömään usein}\}) = 1$$

Tod. Olkoon  $\mathcal{F}_n = \sigma(A_n) = \{A_n, A_n^c, \Omega, \emptyset\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Koska  $\sigma$ -algebrat  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ovat  $P$ -riippumattomia, ja tapahtuma  $(\limsup_n A_n) \in \mathcal{T}$ , se on  $P$ -triviaali, eli  $P(\limsup_n A_n) \in \{0, 1\}$ .

Kun  $P(\limsup_n A_n) = 1$ , ensimmäisen Borel Cantelli lemmasta seuraa  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ .

Kun  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ,

$$P((\limsup_n A_n)^c) = P(\liminf_n A_n^c) = P\left(\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k^c\right),$$

$\sigma$ -additiivisuudesta ja epäyhtälöstä  $(1 - x) \leq \exp(-x)$  seuraa

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) &= \lim_{N \uparrow \infty} P\left(\bigcap_{N \geq k \geq n} A_k^c\right) = \lim_{N \uparrow \infty} \prod_{N \geq k \geq n} (1 - P(A_k)) \leq \\ \lim_{N \uparrow \infty} \exp\left(-\sum_{k=n}^N P(A_k)\right) &= \exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\right) = \exp(-\infty) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

josta seuraa  $P((\limsup_n A_n)^c) = 0 \quad \square$

**Huomautus 5.1.1.** Toinen Borel Cantelli lemma ei päde suoraan ilman riippumattomuuden ehtoa. Esimerkiksi kun  $A \in \mathcal{F}$  jolla  $0 < P(A) < 1$  ja asetamme  $A_n = A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_n P(A_n) = \infty$  mutta  $P(\limsup_n A_n) = P(A) \notin \{0, 1\}$ . Riippumattomuuden ehtoa voidaan kuitenkin heikentää.

**Lemma 5.1.4.** (Yleistetty Borel-Cantelli II)

Kun  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$  ja

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(A_i \cap A_j)}{\left(\sum_{i=1}^n P(A_i)\right)^2} = c < \infty$$

seuraa  $P(\limsup A_n) \geq 1/c$ .

**Tod.** Todistetaan myöhemmin Cauchy-Schwartzin epäyhtälön avulla.



## Luku 6

# Stokastinen konvergenssi

**Määritelmä 6.0.1.** Olkoon  $X(\omega), X_n(\omega), n \in \mathbb{N}$  satunnaismuuttujat. Sanoetaan että jono  $(X_n)$  suppenee stokastisesti (tai todennäköisyyden mielessä) kohti  $X$ :aan, (merkintä:  $X_n \xrightarrow{P} X$ ) kun jokaiselle  $\varepsilon > 0$

$$P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Stokastinen konvergenssi on heikompi kuin melkein varma konvergenssi:

**Lause 6.0.1.** 1. Kun  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$   $P$ -melkein varmasti, myös  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

2. Jos  $X_n \xrightarrow{P} X$  (stokastisesti), on olemassa deterministinen alijono  $\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$  jolla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_{n(k)}(\omega) = X(\omega) \text{ } P\text{-melkein varmasti,}$$

3.  $X_n \xrightarrow{P} X$  jos ja vain jos kaikille alijonoille  $\{n(k)\}$  on olemassa alijonon (deterministinen) alijono  $\{n(k_l)\}$  jolla  $X_{n(k_l)}(\omega) \rightarrow X(\omega)$   $P$ -melkein varmasti kun  $l \rightarrow \infty$ .

Tod. Voidaan olettaa että  $X(\omega) = 0$ , muuten otetaan  $X_n(\omega) = X_n(\omega) - X(\omega)$ .

1.  $X_n(\omega) \rightarrow 0$   $P$ -m.v. jos ja vain jos

$$P\left(\bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{k \geq m} \{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\right) = 1$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad P\left(\liminf_k \{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\right) = 1$$

Fatou lemmasta  $\forall n$

$$1 = P\left(\liminf_k \{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\right) \leq \liminf_k P\left(\{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\right) = 1$$

$$\iff 0 = \limsup_k P\left(\{\omega : |X_k(\omega)| > n^{-1}\}\right) = \lim_k P\left(\{\omega : |X_k(\omega)| > n^{-1}\}\right)$$

2. Stokastisesta konvergenssista seuraa että on olemassa jono  $k_n$  jolla

$$P\left(\{\omega : |X_l(\omega)| > n^{-1}\}\right) < 2^{-n}, \quad \forall l \geq k_n$$

Koska

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{\omega : |X_{k_n}(\omega)| > n^{-1}\}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 < \infty$$

Borel-Cantelli lemmasta (5.1.1) seuraa

$$0 = P\left(\limsup_n \{\omega : |X_{k_n}(\omega)| > n^{-1}\}\right)$$

$$\geq P\left(\limsup_n \{\omega : |X_{k_n}(\omega)| > N^{-1}\}\right) = 0 \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

josta seuraa

$$1 = P\left(\bigcap_N \liminf_n \{\omega : |X_{k_n}(\omega)| \leq N^{-1}\}\right)$$

$$\iff X_{k_n}(\omega) \rightarrow 0 \quad P\text{-melkein varmasti.}$$

3. Olkoon  $X(\omega) = 0$  ja tehdään vastaoletus että  $X_n$  ei suppenisi stokastisesti kohti nollaan: on olemassa  $\varepsilon > 0$  ja jono  $n(k) \uparrow \infty$  kun  $k \uparrow \infty$  jolla

$$P(|X_{n(k)}| > \varepsilon) \geq \varepsilon > 0 \quad \forall k$$

Tästä tulee ristiriita koska oletetusti olisi olemassa alijono  $n(k_l)$  jolla  $X_{n(k_l)}(\omega) \rightarrow 0$   $P$ -melkein varmasti ja siksi myös stokastisesti, siksi saadaan ristiriita

$$0 < \varepsilon \leq P(|X_{n(k_l)}| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{kun } l \rightarrow \infty \quad \square$$

**Huomautus:** Kun  $X_n$  suppenee stokastisesti, jokaiselle alijonolle  $(n_k)$  löytyy alijonon alijono  $(n_{k_l})$  ja joukko  $N \subseteq \Omega$  jolla  $P(N) = 0$ , jolla  $X_{n_{k_l}}(\omega) \rightarrow 0 \forall \omega \in N^c$ . Yleisesti nolla-mittainen joukko  $N$  riippuu alijonosta  $(n_k)$ . Koska alijonojen joukko ei ole numeroituva, se ei tarkoita että olisi olemassa  $N$  jolla  $P(N) = 0$ , ja kaikille alijonolle  $(n_k)$  löytyisi alijonon alijono  $(n_{k_l})$  jolla  $X_{n_{k_l}}(\omega) \rightarrow 0 \forall \omega \in N^c$ . Silloin  $X_n(\omega)$  suppenisi  $P$ -melkein varmasti.

**Lause 6.0.2.** Jos  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva funktio ja  $X_n(\omega), X(\omega) \in \mathbb{R}^d$  ovat satunnaisvektorit jolla

$$|X_n - X| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{stokastisesti, kun } n \rightarrow \infty,$$

seuraa että

$$f(X_n) \xrightarrow{P} f(X) \quad \text{stokastisesti, kun } n \rightarrow \infty,$$

Todistus: Olkoon  $(n_k : k \in \mathbb{N})$  mielivaltainen indeksijono. Karakterisaation (6.0.1.3) mukaan, on olemassa alijono  $(n_{k(\ell)} : \ell \in \mathbb{N})$  jolla

$$X_{n_{k(\ell)}}(\omega) \rightarrow X(\omega) \quad P \text{ melkein varmasti kun } \ell \rightarrow \infty.$$

Koska  $f$  on jatkuva

$$f(X_{n_{k(\ell)}}(\omega)) \rightarrow f(X(\omega)) \quad P \text{ melkein varmasti kun } \ell \rightarrow \infty$$

ja väite seuraa karakterisaatiosta (6.0.1.3).

**Esimerkki 6.0.1.** Näytämme että stokastinen konvergenssi on aidosti heikompi kuin melkein varmaa konvergenssia: Olkoon  $\Omega = (0, 1]$  varustettu Borel  $\sigma$ -algebralla  $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0, 1])$  tasaisella todennäköisyydellä, siis  $P((0, t]) = t$ , kun  $t \in (0, 1]$ .

Määritellään satunnaismuuttujien jono

$$X_{n,k}(\omega) = \mathbf{1}_{(k2^{-n}, (k+1)2^{-n})}(\omega) \quad k = 0, 1, \dots, (2^n - 1)$$

jossa indeksit voidaan järjestää seuraavaksi:  $(n, k) \geq (m, h)$  jos ja vain jos  $n > m$  tai  $n = m$  ja  $k \geq h$ .

Seuraa että  $\forall \omega \in (0, 1]$  kun  $(n, k) \rightarrow \infty$  järjestyksen mukaisesti,

$$\liminf_{n,k \rightarrow \infty} X_{n,k}(\omega) = 0 \neq \limsup_{n,k \rightarrow \infty} X_{n,k}(\omega) = 1, \text{ ja}$$

$$P(\{\omega : X_{n,k} > 1/2\}) = P((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) = 2^{-n} \rightarrow 0 \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

**Tehtävä 6.0.1.** Etsi jonolle  $(X_{n,k}(\omega), n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n)$  alijono  $(X_{n(l),k(l)} : l \in \mathbb{N})$  jolla  $X_{n(l),k(l)}(\omega) \rightarrow 0$   $P$ -m.v. kun  $l \rightarrow \infty$ .

**Teoreema 6.0.1.** Stokastisen konvergenssin topologia on metrinen.

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff d(X, X_n) \rightarrow 0, \text{ jossa}$$

$$d(X, Y) = d(X - Y, 0) = E_P \left( \frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} \right) \text{ tai}$$

$$d(X, Y) = d(X - Y, 0) = E_P(1 \wedge |X - Y|)$$

Olkoon  $X_n \xrightarrow{P} X = 0, \forall \varepsilon > 0,$

$$\frac{|X_n|}{(1 + |X_n|)} \leq \frac{|X_n|}{(1 + |X_n|)} \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) + \varepsilon \mathbf{1}(|X_n| \leq \varepsilon) \leq \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) + \varepsilon,$$

$$d(X_n, 0) \leq P(|X_n| > \varepsilon) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

kun  $n$  on tarpeeksi suuri.

Toisinpäin, koska kuvaus  $f(x) = x/(1+x)$  on aidosti kasvava  $x$ :n suhteen kun  $x \geq 0$ . ( $f'(x) = (1+x)^{-2}$ ),  $\forall \varepsilon > 0,$

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{|X_n|}{1 + |X_n|}$$

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} P(|X_n| > \varepsilon) \leq d(|X_n|, 0) \rightarrow 0 \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

Näytämme että  $d(X, Y)$  on etäisyys, se täyttää kolmion epäyhtälön:

$$\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} \leq \frac{|X - Z| + |Z - Y|}{1 + |X - Z| + |Z - Y|} \leq \frac{|X - Z|}{1 + |X - Z|} + \frac{|Z - Y|}{1 + |Z - Y|}$$

kun otetaan odotusarvo seuraa  $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$   $\square$

## 6.1 Funktionaalianalyysin peruskäsitteiden pika-sanasto

1. Topologinen avaruus:  $(E, \mathcal{T})$  jossa topologia  $\mathcal{T} \subseteq 2^E$  on kaikkien avointen joukkojen kokoelma. Topologia on suljettu äärellisten leikkausten suhteen ja mielivaltaisten yhdistelmien suhteen. Avoin joukon komplementti sanotaan suljetuksi.

Olkoon  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ . Sanotaan että  $x_n \rightarrow x$  topologiassa  $\mathcal{T}$  jos

$\forall U \in \mathcal{T}$  jolle  $x \in U, \exists n_U$  jolle  $x_n \in U \forall n \geq n_U$ .

2.  $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty]$  on metriikka jos

- $d(e, e') = 0$  jos ja vain jos  $e = e'$
- $d(e, e') = d(e', e)$  (symmetrisyys)
- $d(e, e'') \leq d(e, e') + d(e', e'')$  (kolmion epäyhtälö)

3. Topologinen avaruus  $(E, \mathcal{T})$  on metrinen jos on olemassa metriikka (etäisyys)  $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty]$ , jonka suhteen avoimet pallot generoivat topologian  $\mathcal{T}$ :n, eli:

$$B(e, r) = \{e' : d(e, e') < r\} \in \mathcal{T} \forall e \in E, r > 0$$

ja kaikille  $x \in U, x \in E, U \in \mathcal{T}$  on olemassa  $r > 0$  jolle  $x \in B(e, r) \subseteq U$ .

Metrisessä avaruudessa,  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$  on *Cauchy jono* kun  $\forall \varepsilon > 0$  on olemassa  $n_\varepsilon$  jolle  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  kun  $n, m \geq n_\varepsilon$ .

Sanotaan että metrinen avaruus  $(E, d)$  on *täydellinen* jos kaikille Cauchy jonoille  $\{x_n\}$  on olemassa rajaarvo  $x \in E$ .

4. Olkoon  $E$  reaalivektoriavaruus, eli kun  $\lambda \in \mathbb{R}, x, y \in E$ , myös  $\lambda x \in E, (x + y) \in E$ .

Kuvaus  $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty)$  on *normi* kun

$$\text{i) } \|x\| = 0 \in \mathbb{R} \iff x = \mathbf{0} \in E \quad \text{ii) } \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$\text{iii) } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Kaikki normatut vektoriavaruuudet ovat metriset, metriikalla  $d(x, y) := \|x - y\|$ , joka generoi normi-konvergenssin topologian. Samalla avaruudella voi olla useita käyttökelpoisia topologioita.

5. esi-Hilbertin avaruus on normi-avaruus jossa normi on peräisin skalaaritulosta  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  jossa  $\|x\|^2 := \langle x, x \rangle$ . Reaaliarvoinen skalaaritulo on symmetrinen  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ , bilineaarinen  $\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle$ , ja positiivinen  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , jolla  $\langle x, x \rangle = 0 \iff 0$ .
6. Täydellinen normiavaruus on Banachin avaruus ja täydellinen esi-Hilbertin avaruus on Hilbertin avaruus.

# Luku 7

## Fubinin lause ja tulo-todennäköisyys

**Lemma 7.0.1.** *Olkoon  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^0(\Omega, \mathcal{F})$ .*

1. *Kun  $X_n(\omega) \geq 0$   $P$ -melkein varmasti  $\forall n$ , seuraa*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_P(X_k) = E_P\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)\right) \in [0, +\infty] \quad (7.0.1)$$

2. *Kun  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1(P)$  (ei välttämättä ei-negatiivisia),*

*ja  $\sum_{k=1}^{\infty} E_P(|X_k|) < \infty$ , satunnais-sarja*

$$S_{\infty}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)$$

*suppenee  $P$ -melkein varmasti ja  $L^1(P)$ -normissa, (7.0.1) on voimassa.*

Todistus:

1. selvästi kun  $X_n(\omega) \geq 0$ ,  $S_n(\omega) := \sum_{k=1}^n X_k(\omega) \uparrow S_{\infty}(\omega) \in [0, +\infty]$   $P$ -m.v. kun  $n \uparrow \infty$ , ja väite seuraa monotonisen konvergenssilauseesta.

2. Olkoon  $Y_n = S_n(\omega) := \sum_{k=1}^n |X_k(\omega)|$ ,  $Y_n \uparrow Y_{\infty} := \sum_{k=1}^{\infty} |X_k(\omega)|$  ja monotonisen konvergenssi lauseesta (4.1.1) seuraa

$$E_P(Y_{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} E_P(|X_k|)$$

siis  $Y_\infty \in L^1(P)$  ja erityisesti  $P(Y_\infty < \infty) = 1$   $P$ -melkein varmasti, ja  $P$ -m.v.  $S_n(\omega) \rightarrow S_\infty(\omega)$  koska sarja suppenee absoluuttisesti.

Kolmio epäyhtälöstä seuraa

$$|S_n(\omega)| \leq Y_n(\omega) \uparrow Y_\infty(\omega) < \infty$$

jossa  $Y_\infty \in L^1(P)$ , dominoidun konvergenssi lauseesta (8.0.1) seuraa odotusarvojen sarjan konvergenssi  $L^1(P)$  avaruudessa ja yhtälö (7.0.1)  $\square$

**Lemma 7.0.2.** *Todennäköisyysavaruuksien  $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ ,  $i=1,2$ , tuloavaruus  $\Omega_1 \times \Omega_2$  on varustettu tulo- $\sigma$ -algebralla  $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 := \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ .*

*Olkoon  $X : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  satunnaismuuttuja.*

*Silloin kaikille kiinnitetylle  $\omega_2 \in \Omega_2$  kuvaus*

$$\omega_1 \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$$

*on  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  satunnaismuuttuja, ja tietysti myös kaikille kiinnitetylle  $\omega_1 \in \Omega_1$  kuvaus*

$$\omega_2 \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$$

*on  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  satunnaismuuttuja. Myös päinvastainen implikaatio on tosi:*

*jos  $\omega_1 \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$  on  $\mathcal{F}_1$ -mitallinen  $\forall \omega_2 \in \Omega_2$ , ja  $\omega_2 \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$  on  $\mathcal{F}_2$ -mitallinen  $\forall \omega_1 \in \Omega_1$ ,*

*seuraa että kuvaus  $(\omega_1, \omega_2) \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$  on  $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ -mitallinen.*

**Tod.** Oletamme ensin että  $|X(\omega_1, \omega_2)| \leq K$  jossa  $K$  on deterministinen.

Olkoon

$\mathcal{C} = \{(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ -mitalliset ja rajoitetut satunnaismuuttujat joilla väite on tosi  $\}$

On selvää  $\mathcal{C}$  on monotoninen luokka ja

$$\mathbf{1}_{(A_1 \times A_2)}(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{1}_{A_1}(\omega_1)\mathbf{1}_{A_2}(\omega_2) \in \mathcal{C}, \quad \forall A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2.$$

Koska  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  on  $\pi$ -luokka, monotonisen luokan lauseesta seuraa että  $\mathcal{C}$  sisältää kaikki rajoitetut  $(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ -mitalliset kuvaukset.

Lause seuraa myös kun satunnaismuuttuja  $X$  ei ole rajoitettu, koska

$$X(\omega) = \lim_{K \rightarrow \infty} X^{(K)}(\omega) \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \quad \text{jossa}$$

$$X^{(K)}(\omega) = X(\omega) \mathbf{1}(|X(\omega)| \leq K) \in [-K, K]$$

jossa on osoitettu että  $X^{(K)}(\omega_1, \cdot)$  on  $\mathcal{F}_2$ -mitallinen  $X^{(K)}(\cdot, \omega_2)$  on  $\mathcal{F}_1$ -mitallinen.

Toiseen suuntaan, olkoon

$$\mathcal{C} = \left\{ \text{funktioit } X(\omega_1, \omega_2) \text{ jotka ovat rajoitettuja ja erikseen } \mathcal{F}_i\text{-mitallisia} \right\}$$

Seuraa että  $\mathcal{C}$  on monotoninen luokka, ja  $\forall A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2 \mathbf{1}_{A_1}(\omega_1) \times \mathbf{1}_{A_2}(\omega_2) \in \mathcal{C}$ . Monotonisen luokan lauseesta seuraa että  $\mathcal{C}$  sisältää kaikki rajoitetut ja  $(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ -mitalliset funktiot.

**Teoreema 7.0.1.** (*Fubinin lause*)

Olkoon  $X : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  satunnaismuuttuja.

- Kun  $X(\omega_1, \omega_2) \geq 0$  määritellään marginaali-integraalit

$$I_1^X(\omega_1) = \int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2), \quad I_2^X(\omega_2) = \int_{\Omega_1} X(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1)$$

(lemmasta 7.0.2 ja positiivisuudesta seuraa että nämä ovat hyvin määritellyitä).

Silloin iteroitu integraali ei riipu integroinnin järjestyksestä

$$\int_{\Omega_1} I_1^X(\omega_1) P_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_1} \left\{ \int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2) \right\} P_1(d\omega_1) = (7.0.2)$$

$$\int_{\Omega_2} I_2^X(\omega_2) P_1(d\omega_2) = \int_{\Omega_2} \left\{ \int_{\Omega_1} X(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) \right\} P_2(d\omega_2) :=$$

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X(\omega_1, \omega_2) (P_1 \otimes P_2)(d\omega_1 \times d\omega_2)$$

ja tulotodennäköisyys  $(P_1 \otimes P_2)(A)$  on hyvin määritetty kun  $A \in (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$  ottaamalla  $X(\omega_1, \omega_1) = \mathbf{1}_A(\omega_1, \omega_2)$ .

- Yleisemmin kaava (7.0.2) on voimassa kun

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |X(\omega_1, \omega_2)| (P_1 \otimes P_2)(d\omega_1 \times d\omega_2) < \infty$$

Todistus: määritellään

$\mathcal{C} = \{(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ -mitalliset ja rajoitetut satunnaismuuttujat joilla väite on tosi }

Osoitamme että  $\mathcal{C}$  on monotoninen luokka. Selvästi vakio  $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$  ja  $(aX + bY) \in \mathcal{C}$  kun  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Olkoon jono  $\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$  jolla

$$0 \leq X_n(\omega_1, \omega_2) \uparrow X(\omega_1, \omega_2) \leq K < \infty \quad \forall \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2.$$

Lemmasta 7.0.2 ja monotonisen konvergenssin lauseesta (4.1.1) seuraa

$$I_i^{X^{(n)}}(\omega_i) \uparrow I_i^X(\omega_i) \in L^0(\Omega_i, \mathcal{F}_i), \quad i = 1, 2.$$

Soveltamalla monotonisen konvergenssin lausetta toista kertaa seuraa

$$E_{P_1}(I_1^X) = \lim_{n \uparrow \infty} E_{P_1}(I_1^{X^{(n)}}) = \lim_{n \uparrow \infty} E_{P_2}(I_2^{X^{(n)}}) = E_{P_2}(I_2^X)$$

Fubinin lauseen väite pätee myös  $X$ :lle, siis  $X \in \mathcal{C}$  joka on monotoninen luokka.

Selvästi  $\mathbf{1}_{(A_1 \times A_2)} \in \mathcal{C} \quad \forall A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2.$

Koska  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  on  $\pi$ -luokka, monotonisen luokan lauseesta seuraa että  $\mathcal{C}$  sisältää kaikki rajoitetut  $(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ -mitalliset kuvaukset. Erityisesti  $\mathcal{C}$  sisältää kaikki yksinkertaiset satunnaismuuttujat  $X \in \mathcal{Y}(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ . Nyt monotonisen konvergenssi lauseen avulla väite seuraa myös kun  $X \in (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)^+$ .

Osoitamme että kuvaus

$$(P_1 \otimes P_2) : (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \longrightarrow [0, 1]$$

on  $\sigma$ -additiivinen todennäköisyys:

Olkoon  $\{A^{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$  ei-vähenevä tapahtuma jono, siis

$$A^{(n)} \subseteq A^{(n+1)} \uparrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}$$

Määritellään joukkojen leikkeitä: kun  $\omega_1 \in \Omega_1$ ,

$$A_2^{(n)}(\omega_1) := \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A^{(n)}\} \uparrow A_2(\omega_1) := \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\} \text{ kun } n \uparrow \infty .$$

$\forall \omega_1 \in \Omega_1$ , koska  $P_2$  on  $\sigma$ -additiivinen seuraa  $P_2(A_2^{(n)}(\omega_1)) \uparrow P_2(A_2(\omega_1))$ , jossa  $P_2(A_2^{(n)}(\omega_1))$  ja  $P_2(A_2(\omega_1))$  ovat  $\mathcal{F}_1$ -mitallisia satunnaismuuttujia. Nyt monotonisen konvergenssi lauseesta seuraa

$$(P_1 \otimes P_2)(A^{(n)}) = \int_{\Omega_1} P_2(A_2^{(n)}(\omega_1)) P_1(d\omega_1) \uparrow \int_{\Omega_1} P_2(A_2(\omega_1)) P_1(d\omega_1) = (P_1 \otimes P_2)(A) .$$

Hajottamalla  $X(\omega) = (X^+(\omega) - X^-(\omega))$ , odotusarvon linearisuudesta väite seuraa myös silloin kun  $X \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, P_1 \otimes P_2)$   $\square$ .

**Seuraus 7.0.1.** *Fubini lause on voimassa myös kun todennäköisyysavaruuDET  $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$  varustetaan  $\sigma$ -additiivisilla mitoilla  $\mu_i, i = 1, 2$ .*

Tod. Kun mitat  $\mu_i(d\omega_i)$  ovat äärellisiä, sovelletaan Fubini lauseen ensin todennäköisyysmitoille  $P_i(d\omega_i) = \mu_i(d\omega_i)/\mu_i(\Omega_i)$   $i = 1, 2$ .

Kun mitat  $\mu_i$  ovat  $\sigma$ -äärellisiä on olemassa numeroituvia mitallisia osituksia

$$\Omega_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i^{(n)}, \text{ jossa } (\Omega_i^{(n)} \cap \Omega_i^{(m)}) = \emptyset, n \neq m, \text{ ja } \mu_i(\Omega_i^{(n)}) < \infty \quad i = 1, 2$$

Väite seuraa kun integroidaan erikseen tulo-avaruuksissa  $(\Omega_1^{(n)} \times \Omega_2^{(k)})$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ .

**Seuraus 7.0.2.** *Fubini lause yleistyy suoraan äärelliseen tuloavaruuteen*

$$(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d, \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_d, P_1 \otimes \cdots \otimes P_d), \quad d \in \mathbb{N}$$

**Lause 7.0.1.** *TodennäköisyysavaruuDESSA  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , olkoon*

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_d(\omega)) \in \mathbb{R}^d$$

*satunnaisvektori, ja olkoon  $P_X(dt)$  sen todennäköisyysjakauma  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  avaruudessa:*

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}), \quad \text{kun } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

Satunnaismuuttujat  $X_1(\omega), \dots, X_d(\omega)$  ovat rippumattomia  $P$ -mitan suhteen jos ja vain jos vektorin todennäköisyysjakauma on koordinaattien jakaumien tulo:

$$P_X = (P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_d})$$

**Tod.** harjoitustehtävä.

Huomaat että kuten lemmassa 7.0.2 kuvaus  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  on mitallinen jos ja vain jos koordinaatti-kuvaukset  $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$   $i = 1, \dots, d$  ovat mitallisia.

**Esimerkki 7.0.1.** Olkoon satunnaismuuttuja  $X(\omega) \geq 0$   $P$ -melkein varmasti. Silloin

$$E_P(X) = \int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega) = \int_0^{\infty} t P_X(dt) = \int_0^{\infty} P(X > t)dt$$

Tod. koska  $t = \int_0^{\infty} \mathbf{1}(s < t)ds$

$$\int_0^{\infty} t P_X(dt) = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} \mathbf{1}(s < t)ds \right) P_X(dt)$$

Koska  $\mathbf{1}(s < t) \geq 0$  ja Lebesguen mitta on  $\sigma$ -äärellinen, Fubini lause soveltuu. Vaihdamme integroinnin järjestyksen:

$$= \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} \mathbf{1}(s < t)P_X(dt) \right) ds = \int_0^{\infty} P_X((s, +\infty))ds = \int_0^{\infty} P(X > s)ds$$

### 7.0.1 Osittaisintegroinnin kaava

**Lause 7.0.2.** Olkoon  $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ei väheneviä ja oikealta jatkuvia funktioita. Silloin kun  $a < b$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x)F(dx) &= \int_a^b G(x-)F(dx) + \sum_{y \in (a,b]} \Delta G(y)\Delta F(y) \\ &= F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x-)G(dx) \end{aligned}$$

jossa integraalit ovat olemassa Riemann-Stieltjesin mielessä. Osittaisintegrointi kaava pätee myös kun  $F(x) = F^+(x) - F^-(x)$ ,  $G(x) = G^+(x) - G^-(x)$ , jossa  $F^{\pm}, G^{\pm}$  ovat ei väheneviä ja oikealta jatkuvia.

Tod. Huomaamme ensin että

$$\int_a^b G(x)F(dx) = \int_{(a,b]} G(x)F(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(a,b]}(x)G(x)F(dx),$$

ja kun  $x \geq a$ ,

$$G(x) = G(a) + \int_a^{\infty} \mathbf{1}(y \leq x)G(dy).$$

Tästä seuraa

$$\int_a^b G(x)F(dx) = \int_a^b \left\{ G(a) + \int_a^{\infty} \mathbf{1}(y \leq x)G(dy) \right\} F(dx) =$$

$$G(a)(F(b) - F(a)) + \int_a^b \left( \int_a^b \mathbf{1}(y \leq x)G(dy) \right) F(dx)$$

Koska mitat  $F(dx)$  ja  $G(dy)$  ovat äärelisiä kompakteissa ja integrandi on ei-negatiivinen, Fubinin lause soveltuu:

$$= G(a)(F(b) - F(a)) + \int_a^b \left( \int_a^b \mathbf{1}(y \leq x)F(dx) \right) G(dy) =$$

$$G(a)(F(b) - F(a)) + \int_a^b (F(b) - F(y-))G(dy) =$$

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(y-)G(dy).$$

Huomataan myös että voidaan kirjoittaa

$$\int_a^b G(x)F(dx) = \int_a^b G(x-)F(dx) + \sum_{y \in (a,b]} \Delta G(y)\Delta F(y)$$

koska ei-vähenevällä funktiolla on korkeintaan numeroituva määrä hyppyjä  $\square$

Näytämme miten osittaisintegrointikaava toimii Gaussiselle jakaumalle.

**Gaussinen osittaisintegrointi kaava**

**Lause 7.0.3.** Olkoon  $G(\omega)$  standardi Gaussinen satunnaismuuttuja jolla  $E(G) = 0$  ja  $E(G^2) = 1$ , kertymäfunktioilla

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt,$$

ja olkoon  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  absoluuttisesti jatkuva funktio jolla

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

jossa  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on Borel mitallinen ja (oletus)

$$E_P(|f'(G)|) < \infty$$

Silloin  $E_P(|f(G)G|) < \infty$  ja seuraava Gaussinen osittaisintegrointikaava pätee

$$E_P(f'(G)) = E_P(f(G)G)$$

**Todistus**  $G$ :n jakauman tiheysfunktioille

$$\phi(x) = \frac{d\Phi}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

pätee

$$\phi'(x) = \frac{d\phi}{dx}(x) = -\phi(x)x .$$

Koska  $E_P(|G|) < \infty$  (Gaussisella jakaumalla on äärellisiä eksponentiaalisia momenteja  $E_P(\exp(\lambda G)) = \exp(\lambda^2/2) < \infty$  josta seuraa että  $E_P(|G|^q) < \infty$ ,  $\forall q > 0$ ), voidaan olettaa  $f(0) = 0$ . Fubini lauseesta seuraa

$$\begin{aligned} E_P(|f(G)G|) &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |x| \Phi(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |x| \phi(x) dx \\ &\leq \int_{-\infty}^0 \left( \int_x^0 |f'(t)| dt \right) (-x) \phi(x) dx + \int_0^{\infty} \left( \int_0^x |f'(t)| dt \right) x \phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \left( \int_{-\infty}^t (-x) \phi(x) dx \right) |f'(t)| dt + \int_0^{\infty} \left( \int_x^{\infty} x \phi(x) dx \right) |f'(t)| dt \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) |f'(t)| dt = E_P(|f'(G)|) < \infty \end{aligned}$$

Siis Fubini lauseen integroituuvuuden oletus on voimassa ja saa vaihtaa integroinnin järjestystä

$$\begin{aligned}
 E_P(f(G)G) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x \Phi(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x \phi(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 \left( \int_x^0 f'(t) dt \right) (-x) \phi(x) dx + \int_0^{\infty} \left( \int_0^x f'(t) dt \right) x \phi(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 \left( \int_{-\infty}^t (-x) \phi(x) dx \right) f'(t) dt + \int_0^{\infty} \left( \int_x^{\infty} x \phi(x) dx \right) f'(t) dt \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) f'(t) dt &= E_P(f'(G)) < \infty \quad \square
 \end{aligned}$$

**Huomautus 7.0.1.** Gaussisesta osittaisintegrointi kaavasta saa paljon hyötyä ja Malliavin laskennassa se yleistyy myös ääretön-ulotteisille Gaussisille jakaumille.

## 7.0.2 Muuttujan vaihto-kaava eukliidisessä avaruudessa $\mathbb{R}^d$

Olkoon  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  differentoituva kuvaus, ja  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Borel mitallinen testi funktio. Osoitamme muuttujan vaihto kaavaa

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(f(x)) |\det(Jf(x))| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) dy \quad (7.0.3)$$

jossa  $Jf(x)$  on  $n \times n$  Jacobiani-matriisi

$$Jf(x)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

Huomataan että silloin kun  $f(x) = Ax$  jossa  $A$  on kääntyvä  $n \times n$  matriisi tulo-joukko

$$V = \Delta x_1 \times \times \cdots \times \Delta x_n$$

kuvautuu suuntaissärmiöksi  $AV$  jolla on särmät  $A\Delta x_1, \dots, A\Delta x_n$ .

Merkitään jatkossa

$$\Delta x_1 \wedge \cdots \wedge \Delta x_n = \det([\Delta x_1, \dots, \Delta x_n])$$

$V$ :n tilavuus on

$$|V| = |\Delta x_1 \times \cdots \times \Delta x_n| = |\det([\Delta x_1, \dots, \Delta x_n])| = |\Delta x_1 \wedge \cdots \wedge \Delta x_n|$$

ja suuntaissärmiön  $AV$ :n tilavuus on

$$|AV| = |A\Delta x_1 \wedge \cdots \wedge A\Delta x_n| |\det([A\Delta x_1, \dots, A\Delta x_n])| = |\det(A)| |V|$$

Tässä lineaarisessa tapauksessa  $Jf(x) = A$ , eli jacobiaani on vakio.

Osoitetaan kaava (7.0.3) induktiolla. Kun  $n = 1$ ,

testifunktiolle  $\varphi(x)$  löytyy aina esitys

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$$

jossa  $\psi_n(x)$  ovat kompaktikantaisia, ja funktio kantajoukko on pieni joukko.

Siksi voidaan olettaa että testifunktiolle  $\varphi(y)$  on kantajoukko on pieni väli  $I$  jossa derivaatan  $f'(x)$  merkki ei muutu silloin kun  $f(x) \in I$ .

## Luku 8

# Tasainen integroituvuus ja $L^1(P)$ -konvergenssi

**Määritelmä 8.0.1.** Merkitään

$$L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{ \mathbb{R}\text{-arvoiset satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruudessa } (\Omega, \mathcal{F}, P) \}$$

jossa tarvittaessa identifioidaan  $X$  ja  $Y$  kun  $X(\omega) = Y(\omega)$   $P$ -melkein varmasti.

Kun  $0 < p < \infty$ , määritellään

$$L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{ X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ jolla } \|X\|_p < \infty \} \quad \text{jossa} \quad \|X\|_p = \{E_P(|X|^p)\}^{1/p}$$

Sanomme että  $X_n \xrightarrow{L^p} X$  suppenee  $L^p$ -normissa kun  $E_P(|X_n - X|^p) \rightarrow 0$  kun  $n \rightarrow \infty$ . Määritellään myös olennainen (essential) supremum

$$\|X\|_\infty = P\text{-esssup } \{|X(\omega)|\} := \inf \{y \in \mathbb{R} : |X(\omega)| \leq y \text{ } P\text{-melkein varmasti} \}$$

$$L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ jolla } \|X\|_\infty < \infty\}$$

eli satunnaismuuttuja  $X(\omega) \in L^\infty(P)$  jos ja vain jos on olemassa deterministinen  $K < \infty$  jolla  $|X(\omega)| \leq K$   $P$ -melkein varmasti, ja s.m. on olennaisesti rajoitettu  $P$ -todennäköisyyden suhteen.

Osoitamme (myöhemmin) että  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$  on Banachin avaruus (eli vektori avaruus jolla on täydellinen normi) kaikille  $0 < p \leq +\infty$ ,

ja  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  on Hilbertin avaruus skalaaritulolla  $\langle X, Y \rangle := E_P(XY)$ .

104LUKU 8. TASAINEN INTEGROITUVUUS JA  $L^1(P)$ -KONVERGENSSI

**Teoreema 8.0.1.** Olkoon  $0 < p \leq \infty$ , ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n\|_p = 0$ . Seuraa että  $X_n \xrightarrow{P} 0$ .

Tod. Kun  $0 < p < +\infty$ , väite seuraa **Chebychevin epäyhtälöstä** : kun  $\varepsilon > 0$ ,

$$\varepsilon^p P(|X_n| > \varepsilon) \leq E_P(|X_n|^p) \rightarrow 0 \text{ kun } n \rightarrow \infty .$$

Kun  $p = +\infty, \forall K \in \mathbb{N} \exists \bar{n}$  jolla

$$P(\{\omega : |X_n(\omega)| \leq K^{-1}\}) = 1 \quad \text{kun } n \geq \bar{n}$$

josta seuraa että

$$P\left(\bigcap_{K \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > m} \{\omega : |X_n(\omega)| \leq K^{-1}\}\right) = P(\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow 0\}) = 1$$

siis  $X_n \rightarrow 0$   $P$ -melkein varmasti ja myös stokastisesti  $\square$

**Lause 8.0.1.** Lebesgue dominoidun konvegenssin lause  $L^p$  avaruudessa.

Olkoon  $0 < p < \infty$ , ja  $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}), X(\omega)$  satunnaismuuttujat jolla

- 1)  $X_n \xrightarrow{P} X$  stokastisesti
- 2)  $Y(\omega) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n(\omega)| \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Silloin  $X \in L^p(\Omega)$  ja  $X_n \xrightarrow{L^p} X$ .

Tod. On olemassa alijono  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  jolla  $\lim_{k \rightarrow \infty} X_{n_k}(\omega) = X(\omega)$   $P$ -m.v.

Tästä seuraa  $|X(\omega)| \leq Y(\omega)$   $P$ -m.v. ja siksi  $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Fubinin lauseesta

$$E_P(|X_n(\omega) - X(\omega)|^p) = \int_0^\infty P(|X_n - X|^p > t) dt .$$

Kolmion epäyhtälöstä seuraa

$$|X_n(\omega) - X(\omega)|^p \leq 2^p Y(\omega)^p \quad \text{ja siksi} \quad P(|X_n - X|^p > t) \leq P(Y^p > t 2^{-p})$$

jossa

$$\int_0^\infty P(2^p Y^p > t) dt = 2^p E_P(Y^p) < \infty$$

Määritellään funktioita

$$0 \leq f_n(t) := P(|X_n - X|^p > t) \leq g(t) := P(|Y|^p > t2^{-p}), \quad t \geq 0$$

Nämä funktiot ovat ei-kasvavia ja siksi mitallisia  $t$ :n suhteen. Jokaiselle  $t > 0$

$$f_n(t) = P(|X_n - X|^p > t) \longrightarrow 0 \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

koska  $X_n \xrightarrow{P} X$  stokastisen konvergenssin mielessä. Koska yläraja  $g(t)$  on integroituva Lebesgue mitan  $\lambda$  suhteen, Lebesguen dominoidun konvergenssin lause 4.1.2 astuu voimaan avaruudessa  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ , ja saadaan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_P(|X_n - X|^p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(t) dt = \int_0^\infty \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt = 0 \quad \square$$

**Huomautus:** Koska

$$\begin{aligned} |E_P(X) - E_P(Y)| &= |E_P(X - Y)| = |E_P((X - Y)^+) - E_P((X - Y)^-)| \\ &\leq E_P((X - Y)^+) + E_P((X - Y)^-) = E_P(|X - Y|) \end{aligned}$$

kun  $X_n \xrightarrow{L^1(P)} X$  seuraa  $E_P(X_n) \rightarrow E_P(X)$ .

Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen ehdot  $L^p$ -konvergenssille ovat riittäviä mutta ei välttämättömiä. Haluamme karakterisoida täydellisesti  $L^p$ -konvergenssia.

Käsitlemme ensin  $L^1$ -konvergenssia. Olemme huomanneet (4.1.1) että ehdoista  $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$   $P$ -melkein varmasti ja  $X, X_n \in L^1(P)$  ei seuraa että  $E(X_n) \rightarrow E(X)$ , eikä myöskään  $X_n \xrightarrow{L^1} X$ . Siihen tarvitaan sen lisäksi seuraava kompaktisuuden kaltainen ehto:

**Määritelmä 8.0.2.** *Satunnaismuuttujien kokoelma  $\mathcal{C} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  on tasaisesti integroituva  $P$ :n suhteen, kun*

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{X \in \mathcal{C}} E_P(|X| \mathbf{1}(|X| > K)) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{X \in \mathcal{C}} \int_{\{\omega: |X(\omega)| > K\}} |X(\omega)| P(d\omega) = 0$$

**Lemma 8.0.1.**

106LUKU 8. TASAINEN INTEGROITUVUUS JA  $L^1(P)$ -KONVERGENSSI

1. Olkoon  $\mathcal{C}$  satunnaismuuttujien perhe. Jos perheelle on olemassa integroitava yläraja, eli

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} |X(\omega)| \leq Y(\omega) \text{ } P \text{ melkein varmasti, jossa } Y \in L^1(P)$$

perhe on tasaisesti integroitava.

2. Äärellinen satunnaismuuttujien joukko  $\mathcal{C} = \{X_1, X_2, \dots, X_M\} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $M \in \mathbb{N}$  on tasaisesti integroitava.

**Tod.** Kun

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} |X(\omega)| \leq Y(\omega) \in L^1(P)$$

seuraa  $\forall X \in \mathcal{C}$

$$|X(\omega)| \mathbf{1}(|X(\omega)| > K) \leq |Y(\omega)| \mathbf{1}(|Y(\omega)| > K)$$

josta seuraa

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E_P \left( |X(\omega)| \mathbf{1}(|X(\omega)| > K) \right) \leq E_P \left( |Y(\omega)| \mathbf{1}(|Y(\omega)| > K) \right) \downarrow 0 \text{ kun } K \uparrow \infty$$

Erityisesti kun  $\mathcal{C} = \{X_1, \dots, X_n\} \subset L^1(P)$  on äärellinen joukko, se on tasaisesti integroitava koska löytyy integroitava yläraja:

$$|X_i(\omega)| \leq Y(\omega) := |X_1(\omega)| + \dots + |X_n(\omega)| \in L^1 \quad \square$$

**Huomautus:** Kun  $\mathcal{C}$  on ylinumeroitava, kuvaus

$$|X|^*(\omega) := \sup_{X \in \mathcal{C}} \{|X(\omega)|\}, \quad \omega \in \Omega$$

ei ole välttämättä satunnaismuuttuja, ja siksi joukko

$$A := \left\{ \omega : \sup_{X \in \mathcal{C}} |X(\omega)| \leq Y(\omega) \right\} = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} \left\{ \omega : |X(\omega)| \leq Y(\omega) \right\}$$

ei ole välttämättä  $\mathcal{F}$ -mitallinen. Silti voidaan sanoa että  $P(A) = 1$  jos on olemassa  $B$  jolla  $P(B) = 1$  ja  $A \subseteq B \in \mathcal{F}$ . Silloin  $A \in \mathcal{F}^P := \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P)$   $\sigma$ -algebraan joka on täydennetty  $P$ -nolla mittaisilla joukoilla.

**Lause 8.0.2.** (Tasaisen integroituvuuden karakterisaatio)  $\mathcal{C} \subseteq L^1(P)$  on tasaisesti integroituva jos ja vain jos

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E_P(|X|) < \infty \quad \text{ja} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : P(A) < \delta \implies \sup_{X \in \mathcal{C}} E_P(|X| \mathbf{1}_A) < \varepsilon$$

Tod. Olkoon  $\mathcal{C} \subseteq L^1(P)$  on tasaisesti integroituva.

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E(|X|) \leq M + \sup_{X \in \mathcal{C}} E_P(|X| \mathbf{1}(|X| > M)) < \infty$$

Tehdään vastaoletus: on olemassa tapahtumien jono  $(A_k : k \in \mathbb{N})$  ja  $\varepsilon > 0$  jolla  $P(A_k) \leq 1/k$  ja

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E_P(|X| \mathbf{1}_{A_k}) \geq \varepsilon > 0$$

Koska

$$|X(\omega)| \mathbf{1}_{A_k} \leq M \mathbf{1}_{A_k}(\omega) + |X(\omega)| \mathbf{1}(|X(\omega)| > M) \quad \forall M \in \mathbb{N},$$

seuraa

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon &\leq \sup_{X \in \mathcal{C}} E(|X| \mathbf{1}_{A_k}) \leq MP(A_k) + \sup_{X \in \mathcal{C}} E_P(|X| \mathbf{1}(|X| > M)) \\ &\leq MP(A_k) + \varepsilon/3 \leq \varepsilon 2/3 \end{aligned}$$

kun valitaan  $M$  on tarpeeksi suureksi, ja  $k \geq 3M/\varepsilon$ .

Toisinpäin, jos

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E_P(|X|) = M < \infty,$$

Chebychevin epäyhtälön avulla seuraa  $\forall X \in \mathcal{C}, k \in \mathbb{N}$

$$P(|X| > k) \leq M/k$$

Oletuksen mukaan  $\forall \varepsilon > 0$  on olemassa  $\delta$  jolla

$$E_P(|X| \mathbf{1}_A) < \varepsilon, \quad \forall X \in \mathcal{C}, \quad \forall A \text{ jolla } P(A) < \delta.$$

Kun  $k \geq M/\delta$ , seuraa  $P(|X| > k) < \delta \quad \forall X \in \mathcal{C}$ , ja

$$E_P(|X| \mathbf{1}(|X| > k)) < \varepsilon, \quad \forall X \in \mathcal{C} \quad \square$$

108LUKU 8. TASAINEN INTEGROITUVUUS JA  $L^1(P)$ -KONVERGENSSI

**Seuraus 8.0.1.**  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , jos ja vain jos  $\forall \varepsilon > 0$  on olemassa  $\delta$ , jolla kun  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$P(A) < \delta \implies E_P(|X| \mathbf{1}_A) < \varepsilon$$

**Lemma 8.0.2.** Olkoon satunnaismuuttujien jonot  $(X_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$  ja  $(Y_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$  tasaisesti integroituvia.

Silloin myös summien jono  $(X_n + Y_n : n \in \mathbb{N})$  on tasaisesti integroituva.

**Tod.** Huomataan että  $\forall K > 0$ ,

$$\begin{aligned} \{\omega : |X_n(\omega) + Y_n(\omega)| > K\} &\subseteq \{\omega : |X_n(\omega)| + |Y_n(\omega)| > K\} \\ &\subseteq \{\omega : |X_n(\omega)| > K/2\} \cup \{\omega : |Y_n(\omega)| > K/2\}, \end{aligned}$$

Siksi

$$\begin{aligned} E_P\left(|X_n + Y_n| \mathbf{1}(|X_n + Y_n| > K)\right) &\leq \\ &\leq E_P\left(|X_n + Y_n| \mathbf{1}(|X_n| > K/2)\right) + E_P\left(|X_n + Y_n| \mathbf{1}(|Y_n| > K/2)\right) \\ &\leq E_P\left(|X_n| \mathbf{1}(|X_n| > K/2)\right) + E_P\left(|Y_n| \mathbf{1}(|Y_n| > K/2)\right) \\ &\quad + E_P\left(|X_n| \mathbf{1}(|Y_n| > K/2)\right) + E_P\left(|Y_n| \mathbf{1}(|X_n| > K/2)\right) \end{aligned}$$

Koska satunnaismuuttujien jonot  $(X_n)$  ja  $(Y_n)$  ovat tasaisesti integroituvia, väite seuraa kun osoitamme

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} E_P\left(|X_n| \mathbf{1}(|Y_n| > K/2)\right) = 0 \quad (8.0.1)$$

Koska  $(X_n)$  on tasaisesti integroituva, tasaisen integroituvuuden karakterisaatiosta (8.0.2) seuraa että  $\forall \varepsilon > 0$  on olemassa  $\delta$  jolla

$$P(A) < \delta \implies \sup_n E_P(|X_n| \mathbf{1}_A) < \varepsilon$$

Koska  $(Y_n)$  on tasaisesti integroituva, on olemassa  $K$  jolla

$$\sup_n P(|Y_n| > K/2) \leq \frac{2}{K} \sup_n E_P\left(|Y_n| \mathbf{1}(|Y_n| > K/2)\right) < \delta$$

josta seuraa väite 8.0.1  $\square$

**Teoreema 8.0.2.** ( $L^1(P)$ -konvergenssin karakterisaatio) Olkoon satunnaisuuttujat  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ja  $X \in L^0(\Omega, \mathcal{F})$ . Silloin

1.  $X_n \xrightarrow{P} X$  ja satunnaisuuttujien jono  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  on tasaisesti integroitava,

jos ja vain jos

2.  $X_n \xrightarrow{L^1} X \in L^1(P)$ , eli

Tod. Kun  $X_n \xrightarrow{P} X$  lauseesta (6.0.1) seuraa että on olemassa deterministinen indeksien alijono  $n(k)$  jolle  $X_{n(k)}(\omega) \rightarrow X(\omega)$   $P$ -melkein varmasti.

Soveltamalla Fatoun lemmaa (4.1.4)

$$E_P(|X|) = E_P(\liminf_k |X_{n(k)}|) \leq \liminf_k E_P(|X_{n(k)}|) < \infty$$

jossa tasaisen integroituvuuden oletuksesta

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} E_P(|X_{n(k)}|) \leq M + \sup_{k \in \mathbb{N}} E_P\left(|X_{n(k)}| \mathbf{1}(|X_{n(k)}| > M)\right) < \infty$$

Siis on osoitettu että  $X \in L^1(P)$ . Kun  $K > 0$

$$\begin{aligned} E_P(|X_n - X|) &= E_P\left(|X_n - X| \mathbf{1}(|X_n - X| \leq K)\right) + E_P\left(|X_n - X| \mathbf{1}(|X_n - X| > K)\right) \\ &= \int_0^K P(|X_n - X| > t) dt - KP(|X_n - X| > K) + E_P\left(|X_n - X| \mathbf{1}(|X_n - X| > K)\right) \\ &\leq \int_0^K P(|X_n - X| > t) dt + E_P\left(|X_n - X| \mathbf{1}(|X_n - X| > K)\right), \end{aligned}$$

jossa käytettiin Fubini lauseetta:

$$\begin{aligned} E_P\left(|X_n - X| \mathbf{1}(|X_n - X| \leq K)\right) &= \int_0^\infty P\left(|X_n - X| \mathbf{1}(|X_n - X| \leq K) > t\right) dt \\ &= \int_0^K P\left(|X_n - X| \mathbf{1}(|X_n - X| \leq K) > t\right) dt = \int_0^K P(t < |X_n - X| \leq K) dt \\ &= \int_0^K P(|X_n - X| > t) dt - \int_0^K P(|X_n - X| > K) dt \\ &= \int_0^K P(|X_n - X| > t) dt - KP(|X_n - X| > K). \end{aligned}$$

## 110LUKU 8. TASAINEN INTEGROITUVUUS JA $L^1(P)$ -KONVERGENSSI

Koska jono  $(X_n : n \in \mathbb{N})$  on tasaisesti integroituva ja  $X \in L^1(P)$ , lemmasta (8.0.2) seuraa että jono  $(|X_n - X| : n \in \mathbb{N})$  on tasaisesti integroituva, eli  $\forall \varepsilon \exists K$  jolla

$$\sup_n E_P \left( |X_n - X| \mathbf{1}(|X_n - X| > K) \right) < \varepsilon$$

Koska  $P(|X_n - X| > t)$  on rajoitettu, ja oletetusti  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > t) = 0$   $\forall t > 0$ , Lebesgue dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^K P(|X_n - X| > t) dt = 0$$

eli on olemassa  $N$  jolla  $\forall n \geq N$

$$\int_0^K P(|X_n - X| > t) dt < \varepsilon$$

josta seuraa  $\forall n \geq N$

$$E_P(|X_n - X|) \leq \int_0^K P(|X_n - X| > t) dt + \sup_n E_P \left( |X_n - X| \mathbf{1}(|X_n - X| > K) \right) \leq 2\varepsilon.$$

Toisinpäin, (kts. lause 8.0.1)

$$E_P(|X_n - X|) \rightarrow 0 \implies X_n \xrightarrow{P} X.$$

Koska  $X_n = X + (X_n - X)$ , jossa oletetusti  $X \in L^1(P)$ , lemmän (8.0.2) nojalla meidän riittää todistaa että satunnaismuuttujen kokoelma

$$\{|X_n - X| : n \in \mathbb{N}\}$$

on tasaisesti integroituva. Voidaan olettaa samantien  $X = 0$ .

Olkoon  $\varepsilon > 0$  ja  $N$  jolla  $\forall n > N$

$$E_P(|X_n|) < \varepsilon$$

Koska  $\{X_1, \dots, X_N\} \subset L^1(P)$  on äärellinen joukko, se on tasaisesti integroituva, ja on olemassa  $K$  jolla

$$\sup_{1 \leq n \leq N} E_P(|X_n| \mathbf{1}(|X_n| > K)) < \varepsilon$$

Mutta samalle  $K$  pätee myös  $\forall n \geq N$

$$E_P(|X_n| \mathbf{1}(|X_n| > K)) \leq E_P(|X_n|) < \varepsilon$$

ja siksi

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} E_P(|X_n| \mathbf{1}(|X_n| > K)) < \varepsilon \quad \square$$

Voidaan osoittaa että tasainen integroituvuus vastaa kompaktisuuden ehtoa  $L^1(P)$  avaruudessa varustettuna heikolla topologiolla. Tämä ei päde vahvemmalle  $L^1(P)$ -normin topologialle.

**Teoreema 8.0.3.** (Dunford-Pettisin lause) Satunnaismuuttujen joukko  $\mathcal{C} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  on tasaisesti integroituva  $P$ -mitan suhteen jos ja vain jos on esi-kompakti (precompact)  $L^1(P)$  avaruuden heikossa topologiassa: kaikille jonolle  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$  on olemassa indeksien jono  $\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$  ja s.m.  $X \in L^1(P)$  joilla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_P((X_{n(k)} - X) \mathbf{1}_A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

**Huomautus 8.0.1.** Tästä ei seura alijonon vahvempi  $L^1$ -konvergenssi

$$E_P(|X_{n(k)} - X|) \rightarrow 0.$$

**Esimerkki 8.0.1.** Olkoon  $G(\omega)$  standardi gaussinen satunnaismuuttuja, jolla

$$P(G \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2) dy$$

Määritellään satunnaismuuttujen jono

$$Z_n(\omega) = \exp(\sqrt{n}G(\omega) - n/2) > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Huomataan että

$$z_t(x) = \exp(xt - t^2/2) = \frac{\phi(x-t)}{\phi(x)} = \frac{dP_{G+t}}{dP_G}(x), \quad \text{jossa}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{ on } G\text{:jakauman tiheysfunktio,}$$

on satunnaismuuttjen  $(G+t)$  ja  $G$ :n jakaumien välinen uskottavuusosamäärä (Radon Nikodym derivaatta), ja  $Z_n(\omega) = z_{\sqrt{n}}(G(\omega))$ .

## 112LUKU 8. TASAINEN INTEGROITUVUUS JA $L^1(P)$ -KONVERGENSSI

Koska Gaussisen jakauman momentti-generoiva funktio on  $E_P(\exp(tG)) = \exp(t^2/2)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , seuraa  $E_P(Z_n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ .

Osoitan että  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega) = 0$   $P$ -melkein varmasti. Siitä seuraa että satunnaismuuttujen perhe  $(Z_n : n \in \mathbb{N}) \subset L^1(P)$  ei ole tasaisesti integroituva, koska  $E_P(Z_n) = 1 \not\rightarrow 0$ .

Chebychevin epäyhtälön avulla,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$P(Z_n > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-\alpha} E_P(Z_n^\alpha) = \varepsilon^{-\alpha} E_P\left(\exp(\alpha\sqrt{n}G - \alpha n/2)\right) = \varepsilon^{-\alpha} \exp(-(1-\alpha)\alpha n/2)$$

kun  $\alpha \in (0, 1)$ ,

$$P(Z_n > K^{-1}) \leq K^\alpha \beta^n$$

jossa  $\beta = \exp((1-\alpha)\alpha/2) \in (0, 1)$ .

Koska geometrinen sarja  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n = (1-\beta)^{-1} < \infty$  suppenee, ensimmäisestä Borel Cantelli lemmasta (5.1.1) seuraa  $\forall K \in \mathbb{N}$

$$P\left(\limsup_n \{Z_n > K^{-1}\}\right) = 0$$

ja ottaamalla numeroituvan leikkauksen komplementtijoukoista

$$P\left(\bigcap_{K \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} \{Z_n \leq K^{-1}\}\right) = 1$$

eli  $Z_n(\omega) \rightarrow 0$   $P$ -melkein varmasti  $\square$

**Huomautus 8.0.2.** Siis ääretönulotteisessa  $L^1(P)$  avaruudessa rajoitettu joukko ei tarvitse olla tasaisesti integroituva, eli esi-kompakti heikon topologian suhteen. Funktionaali analyysin Banach-Alaogluin lause sanoo että suljettu yksikköpallo on kompakti niin sanotun heikko-tähti (weak star) topologian suhteen.

**Huomautus 8.0.3.** Satunnaismuuttujen kokoelman tasainen integroituvuus koskee pelkästään satunnaismuuttujen jakaumat, niiden välinen riippuvuusrakenteella ei ole yhtään roolia.

**Teoreema 8.0.4.** (Leskelän ja Viholan tasaisen integroituvuuden karakterisointi, 2011) Satunnaismuuttujien kokoelma  $\mathcal{C}$  on tasaisesti integroituva jos ja vain jos on olemassa  $0 \leq Y(\omega) \in L^1(P)$  jolla  $\forall K > 0$

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E_P \left( (|X| - K)^+ \right) \leq E_P \left( (Y - K)^+ \right)$$

jossa  $x^+ = x \vee 0 = x \mathbf{1}(x > 0)$ .

**Tod.** (Todistamme nyt  $\Leftarrow$  implikaation, todistamme  $\Rightarrow$  myöhemmin, kun konveksisuuden määritelmät ovat käytössä).

Käytämme epäyhtälöä

$$x \mathbf{1}(x > K) \leq 2(x - K/2)^+, \quad K \geq 0$$

Seuraa

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E_P (|X| \mathbf{1}(|X| > K)) \leq 2 \sup_{X \in \mathcal{C}} E_P ((|X| - K/2)^+) \leq 2 E_P ((Y - K/2)^+) \rightarrow 0$$

kun  $K \rightarrow \infty$ , jossa dominoidun konvergenssi lauseen oletukset ovat voimassa:

$Y(\omega) \geq (Y(\omega) - K/2)^+ \geq 0$  jossa  $(Y(\omega) - K/2)^+ \rightarrow 0$   $P$ -melkein varmasti kun  $K \rightarrow \infty$ , ja yläraja  $Y(\omega)$  on integroituva  $\square$

**Huomautus 8.0.4.** Kun satunnaismuuttujan  $Y(\omega) \geq 0$  tulkitaan osakkeen markkinaarvoksi ja  $K > 0$  on deterministinen, satunnaismuuttuja  $(Y(\omega) - K)^+$  kutsutaan eurooppalaiseksi osto-optioksi lunastushinnalla  $K$ . Option haltijalla on oikeus mutta ei velvollisuutta ostaa yhden osakkeen ennalta sovitulla hinnalla  $K$ . Option haltijan kannattaa käyttää optionsa kun osakkeen markkinahinta on suurempi kun ennalta sovittu lunastushinta, saadakseen voittonsa  $(Y(\omega) - K)^+$ . Kun markkinahinta on pienempi tai yhtä kuin lunastushinta, optio on arvoton.

## 8.0.1 Sovellus: odotusarvon derivointi parametrin suhteen

**Lemma 8.0.3.** Olkoon  $X_i : (\Omega_i, \mathcal{F}_i) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$   $i = 1, 2$  reaaliarvoisia satunnaismuuttujia eri todennäköisyysavaruuksissa. Silloin tulo  $X(\omega_1, \omega_2) = X_1(\omega_1)X_2(\omega_2)$  on satunnaismuuttuja tuloavaruudessa  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ .

114 LUKU 8. TASAINEN INTEGROITUVUUS JA  $L^1(P)$ -KONVERGENSSI

Tod. Olkoon  $X_i(\omega_i) \geq 0 \forall \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2$

(yleisemmin voidaan ensin hajottaa  $X_i = (X_i^+ - X_i^-)$ ). Kun  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \{(\omega_1, \omega_2) : X_1(\omega_1)X_2(\omega_2) \leq t\} = \\ & \bigcup_{0 < q \in \mathbb{Q}} \left( \left\{ \omega_1 : X_1(\omega_1) \leq \frac{t}{q} \right\} \cap \left\{ \omega_2 : X_2(\omega_2) \leq q \right\} \right) \in (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \quad , \end{aligned}$$

ja Dynkinin lemmasta (1.1.3) seuraa

$$\{(\omega_1, \omega_2) : X_1(\omega_1)X_2(\omega_2) \in B\} \in (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \square$$

**Lause 8.0.3.** Olkoon  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  todennäköisyysavaruus jossa

$$\{Y(t, \omega) : t \in [a, b]\} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

on tasaisesti integroitava satunnaismuuttujen joukko,  $a < b \in \mathbb{R}$ . Oletamme sen lisäksi

- Kaikille  $\omega \in \Omega$ , kuvaus  $t \mapsto Y(t, \omega)$  on jatkuva.
- Kaikille  $t \in [a, b]$  kuvaus  $\omega \mapsto Y(t, \omega)$  on  $\mathcal{F}$ -mitallinen.

Tästä seuraa

1. kuvaus  $(t, \omega) \mapsto Y(t, \omega)$  on  $(\mathcal{B}([a, b]) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mitallinen.
2. kuvaus  $t \mapsto E_P(Y(t))$  on jatkuva.
3. Satunnaiskuvauksen

$$X(t, \omega) := \int_a^t Y(s, \omega) ds, \quad t \in [a, b].$$

odotusarvo  $E_P(X(t))$  on derivoitava kaikissa  $t \in (a, b)$ , jatkuvalla derivaatalla

$$\frac{d}{dt} E_P(X(t)) = E_P(Y(t)) = E_P\left(\frac{d}{dt} X(t)\right)$$

Tod. Määritellään tuloavaruudessa  $[a, b] \times \Omega$  satunnaismuuttujien jono

$$Y^{(N)}(t, \omega) = \sum_{k=0}^{(N-1)} Y\left(a + (b-a)\frac{k}{N}, \omega\right) \mathbf{1}\left(a + (b-a)\frac{k}{N} < t \leq a + (b-a)\frac{(k+1)}{N}\right), N \in \mathbb{N}$$

Lemma (8.0.3) nojalla seuraa  $Y^{(N)}$  on  $(\mathcal{B}([a, b]) \otimes \mathcal{F})$ -mitallinen, ja jatkuvuudesta seuraa

$$\lim_{N \uparrow \infty} Y^{(N)}(t, \omega) = Y(t, \omega) \quad \forall \omega,$$

siksi  $Y(t, \omega)$  on myös  $(\mathcal{B}([a, b]) \otimes \mathcal{F})$ -mitallinen.

Koska  $\lim_{s \rightarrow t} Y_s(\omega) = Y_t(\omega)$  ja tasaisen integroituvuuden oletuksesta, seuraa

$$|E_P(Y_t) - E_P(Y_s)| \leq E_P|Y_t - Y_s| \rightarrow 0 \quad \text{kun } s \rightarrow t.$$

Koska  $\{Y_t : t \in [a, b]\}$  on tasaisesti integroituva, seuraa että  $\{Y_t : t \in [a, b]\}$  on rajoitettu  $L^1(P)$  normissa, eli

$$\sup_{t \in [a, b]} E_P(|Y_t|) < \infty,$$

ja siksi  $|Y(t, \omega)| \in L^1([a, b] \times \Omega, \mathcal{B}([a, b]) \otimes \mathcal{F}, dt \otimes P(d\omega))$ . Fubinin lause soveltuu

$$E_P(X_t) = E_P\left(\int_a^t Y(s) ds\right) = \int_{[a, b] \times \Omega} Y(s, \omega) (P(d\omega) \otimes ds) = \int_a^t E_P(Y(s)) ds$$

ja koska kuvaus  $t \mapsto E_P(Y(t))$  on jatkuva, analyysin keskiarvon lauseesta

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} \{E_P(X_{t+\Delta}) - E_P(X_t)\} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} \int_t^{t+\Delta} E_P(Y(s)) ds = E_P(Y(t)) \quad \square \end{aligned}$$

**Esimerkki 8.0.2.** Olkoon satunnaismuuttuja  $X(\omega) \in \mathbb{R}$ , ja  $a < 0 < b$  jolla

$$m_X(t) := E_P(\exp(tX)) < \infty, \quad \forall t \in [a, b].$$

Olkoon  $a < -\varepsilon < 0 < \varepsilon < b$ , ja  $x'$  yhtälön  $x'/\log(x') = (b - \varepsilon)$  ratkaisu.

116LUKU 8. TASAINEN INTEGROITUVUUS JA  $L^1(P)$ -KONVERGENSSI

Koska  $x \exp(\varepsilon x) \leq \exp(bx)$  kun  $x \geq x'$ , seuraa

$$E_P(X^+ \exp(\varepsilon X)) \leq x' \exp(\varepsilon x') + E_P(\exp(bX)) < \infty$$

Vastaavasti, kun  $x''/\log(x'') = -(a + \varepsilon)$ , koska  $x \exp(\varepsilon x) \leq \exp(-ax)$  kun  $x \geq x''$ , seuraa

$$E_P(X^- \exp(-\varepsilon X)) \leq x'' \exp(\varepsilon x'') + E_P(\exp(-aX)) < +\infty .$$

Tästä seuraa

$$|X(\omega)| \exp(tX(\omega)) \leq |X(\omega)| \left\{ \exp(\varepsilon X(\omega)) + \exp(-\varepsilon X(\omega)) \right\} \in L^1(P) \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

ja kokoelma

$$\left\{ X(\omega) \exp(tX(\omega)) : t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \right\} \subseteq L^1(P)$$

on tasaisesti integroitava ,

$$\frac{d}{dt} m_X(t) = E_P \left( \frac{d}{dt} \exp(tX) \right) = E_P(X \exp(tX)) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Erityisesti pisteessä  $t = 0$

$$\frac{d}{dt} m_X(0) = E_P(X) .$$

Koska eskponentiaali funktio kasvaa polynoomien nopeammin,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , samoin seuraa satunnaismuuttujien joukon

$$\left\{ X^n(\omega) \exp(tX(\omega)) : t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \right\} \subseteq L^1(P)$$

tasainen integroitavuus, ja

$$\frac{d^n}{dt^n} m_X(t) = E_P \left( \frac{d^n}{dt^n} \exp(tX) \right) = E_P(X^n \exp(tX)), \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Erityisesti pisteessä  $t = 0$

$$\frac{d^n m_X}{dt^n}(0) = E_P(X^n) .$$

Kuvaus  $m_X(t) = E_P(\exp(tX))$  kutsutaan momentti-generoivaksi funktioksi.

**Esimerkki 8.0.3.** ( Esscherin muunnos )

Olkoon  $\Theta = \{m_X(t) = E_P(\exp(tX)) < \infty\}$ . Kun  $t \in \Theta$  määritellään mitanvaihtokaavan kautta todennäköisyyksimitta

$$P^{(t)}(A) = \frac{E_P(\exp(tX)\mathbf{1}_A)}{m_X(t)}, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Kun on olemassa  $\varepsilon > 0$  jolle  $[t - \varepsilon, t + \varepsilon] \subseteq \Theta$ , seuraa

$$E_{P^{(t)}}(X^n) = \frac{E_P(X^n \exp(tX))}{m_X(t)} = \frac{1}{m_X(t)} \frac{d^n m_X}{dx^n}(t), \text{ erityisesti}$$

$$E_{P^{(t)}}(X) = \frac{d}{dt} \log(m_X(t))$$

Tod. Kuten tapauksessa  $t = 0$ .

118LUKU 8. TASAINEN INTEGROITUVUUS JA  $L^1(P)$ -KONVERGENSSI

# Luku 9

## $L^p(\Omega)$ avaruudet

### 9.0.1 Epäyhtälöt

**Määritelmä 9.0.1.** Olkoon  $V$  vektoriavaruus, esimerkiksi  $V = \mathbb{R}^d$ . Kuvaus  $g : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  on konvekksi kun

$$g(px + (1-p)y) \leq pg(x) + (1-p)g(y) \quad \forall x, y \in V, p \in [0, 1]$$

**Lause 9.0.1.** Kuvaus  $g : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  jos ja vain jos

$$\text{epi}(g) = \{ (x, r) \in V \times \mathbb{R} : r \geq g(x) \}$$

on konvekssi joukko, eli kun  $(x, r)$  ja  $(x', r') \in \text{epi}(g)$ , myös pisteiden konvekssi-kombinaatiolle pätee

$$(x, r)p + (x', r')(1-p) = (xp + x'(1-p), rp + r'(1-p)) \in \text{epi}(g), \quad \forall p \in [0, 1]$$

**Lause 9.0.2.** Olkoon  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvekssi funktio. Silloin  $g$  on jatkuva, ja jokaisessa pisteessä on olemassa derivaatat oikealta ja vasemmalta

$$\nabla g^-(t) = \lim_{r \uparrow t} \frac{g(r) - g(t)}{r - t} \leq \nabla g^+(t) = \lim_{r \downarrow t} \frac{g(r) - g(t)}{r - t}$$

ja  $\nabla g^\pm(s) \leq \nabla g^\pm(t)$  kun  $s \leq t$ .

Tod. kun  $t \leq s \leq r$ ,

$$\frac{g(s) - g(t)}{s - t} \leq \frac{g(r) - g(t)}{r - t}$$

koska kun  $p = (r - s)/(r - t) \in [0, 1]$ ,  $s = pt + (1 - p)r$ , konveksisuudesta

$$g(s) - g(r) \leq (g(t) - g(r)) p$$

Tästä seuraa että jokaiselle  $t$ , jono

$$(g(t + n^{-1}) - g(t))n \quad n \in \mathbb{N}$$

ei kasva ja siksi monotoninen raja on olemassa. Koska oikea ja vasen derivaatat  $\nabla^\pm g(t)$  ovat olemassa,  $g(t)$  on jatkuva jokaisessa  $t \in \mathbb{R}$ . Konveksisuudesta seuraa myös

$$\frac{g(s) - g(t)}{s - t} \leq \frac{g(r) - g(s)}{r - s}$$

kun  $t \leq s \leq r$ , siksi  $\nabla^+ g(t) \leq \nabla^- g(r)$  kun  $t < r$   $\square$

**Huomautus 9.0.1.** Koska derivaatat ovat ei-väheneviä,

1. Joukko

$$D := \left\{ t : \nabla^+ g(t) > \nabla^- g(t) \right\}$$

on korkeintaan numeroituva.

2. jokaiselle  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\delta \in [\nabla^- g(t), \nabla^+ g(t)]$

$$g(s) = g(t) + \int_t^s \nabla^\pm g(r) dr \geq g(t) + (s - t)\delta \quad \forall s$$

Seuraa myös että  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on konvekksi jos ja vain jos on absoluuttisesti jatkuva Lebesgue mitan suhteen ja Radon-Nikodymin-derivaatta  $\frac{dg}{dx}(x)$  on ei-vähenevä.

**Lause 9.0.3.** (Jensenin epäyhtälö) Olkoon  $X(\omega) \in \mathbb{R}$  satunnaismuuttuja jolla  $E_P(|X|) < \infty$  ja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konveksikuvaus. Silloin

$$g(E_P(X)) \leq E_P(g(X))$$

**R.** Koska  $g$  on konvekksi, sen oikea ja vasen derivaatat pisteessä  $\mu = E_P(X)$  ovat olemassa. Kaikille  $\delta \in [\nabla^- g(\mu), \nabla^+ g(\mu)]$

$$g(X(\omega)) \geq g(E_P(X)) + \delta\{X(\omega) - E_P(X(\omega))\}$$

ja väite seuraa ottaamalla odotusarvon  $\square$

**Huomautus** Jensenin epäyhtälö on voimassa pelkästään kun integroidaan todennäköisyysmitan suhteen.

**Lemma 9.0.1.** Kun  $1 \leq p < r$ ,  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \supseteq L^r(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Tod. Olkoon  $X \in L^r(P)$ .

Kun  $r = \infty$ ,  $|X(\omega)|^p \leq \|X\|_\infty^p$   $P$ -melkein varmasti ja väite seuraa.

Kun  $r < \infty$ , olkoon

$$Y_n(\omega) = n \wedge |X(\omega)|^p \in L^{r/p}(P) .$$

Koska  $0 \leq Y_n(\omega) \leq n$  seuraa  $Y_n(\omega) \in L^1(P)$ .

Kuvaus  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  jolla  $x \mapsto g(x) = x^{r/p}$  on konvekksi. Jensenin epäyhtälöstä seuraa:

$$E_P(Y_n^{r/p}) \geq E_P(Y_n)^{r/p}$$

Monotonisen konvergenssi lauseesta, koska  $0 \leq Y_n(\omega) \uparrow |X(\omega)|^p \forall \omega$  seuraa

$$E_P(|X|^r) \geq E_P(|X|^p)^{r/p}.$$

Emme olisi voineet soveltaa Jensenin epäyhtälöä suoraan satunnaismuuttujalle  $|X(\omega)|^p$  koska apriori oli epäselvää kuuluuko  $L^{r/p}(P)$  avaruuteen. Siksi käytettiin kätkeyttä muuttuja  $\{Y_n\}$   $\square$

**Huomautus 9.0.2.** Tässä on olennaista että  $P$  on todennäköisyysmitta tai äärellinen mitta, koska silloin kun  $\nu(\Omega) = \infty$   $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \nu) \not\subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ , ja pelkästään kätkeysemällä ei saadan integroituvia satunnaismuuttujia.

Väite ei päde  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$  avaruuksille silloin kun  $\nu(\Omega) = \infty$ .

Kun  $\nu(\Omega) < \infty$  määritellään  $P(A) = \nu(A)/\nu(\Omega)$  josta seuraa

$$\left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^p \nu(d\omega) \right\}^{1/p} \leq \nu(\Omega)^{(r-p)/(rp)} \left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^r \nu(d\omega) \right\}^{1/r}$$

siis  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu) \supseteq L^r(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$  myös tässä tapauksessa. Tämä epäyhtälö ei kerro meille mitään kun  $\nu(\Omega) = \infty$ .

**Lause 9.0.4.** ( Cauchy Schwartzin epäyhtälö ,  $p = 2$  )

Olkoon  $X(\omega), Y(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  silloin

1. tulo  $(X(\omega)Y(\omega)) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ja

$$\| XY \|_1 = E_P(|XY|) \leq \sqrt{E_P(X^2)}\sqrt{E_P(Y^2)} = \| X \|_2 \| Y \|_2$$

jossa yhtäsuuruisuus on voimassa jos ja vain jos  $Y(\omega) = cX(\omega)$   $P$  m.v. jollekin  $c \in \mathbb{R}$ . Kun  $E_P(XY) = 0$  sanomme että satunnaismuuttujat ovat ortogonaaliisia.

2. Kolmion epäyhtälö on voimassa:

$$\| X + Y \|_2 \leq \| X \|_2 + \| Y \|_2$$

1. Tod. Olkoon

$$X_n(\omega) = n \wedge |X(\omega)|, \quad Y_n(\omega) = n \wedge |Y(\omega)|$$

koska  $0 \leq X_n(\omega), Y_n(\omega) \leq n \forall \omega$ , seuraa  $(X_n(\omega)Y_n(\omega)) \in L^1(P)$ .

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \left( tX_n(\omega) + Y_n(\omega) \right)^2 = t^2 X_n(\omega)^2 + Y_n(\omega)^2 + 2tX_n(\omega)Y_n(\omega)$$

Ottaamalla odotusarvoa (joka on olemassa ainakin katkaistetuille satunnaismuuttujille), seuraa että toisen asteen yhtälöllä

$$t^2 E_P(X_n^2) + 2t E_P(X_n Y_n) + E(Y_n^2) = 0$$

on korkeintaan yksi reaaliratkaisu, josta seuraa

$$E_P(X_n Y_n)^2 - E(X_n^2)E(Y_n^2) \leq 0$$

Koska

$$0 \leq |X_n(\omega)Y_n(\omega)| \uparrow |X(\omega)Y(\omega)| \quad \forall \omega$$

seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta

$$E_P(|XY|)^2 - E(X^2)E(Y^2) \leq 0$$

2. Tod.

$$\begin{aligned} E_P((X+Y)^2) &= E_P(X^2) + E_P(Y^2) + 2E_P(XY) \\ &\leq E_P(X^2) + E_P(Y^2) + 2E_P(|XY|) \\ &\leq E_P(X^2) + E_P(Y^2) + 2\sqrt{E_P(X^2)}\sqrt{E_P(Y^2)} = \left\{ \sqrt{E_P(X^2)} + \sqrt{E_P(Y^2)} \right\}^2 \quad \square \end{aligned}$$

**Lause 9.0.5.** Seuraavat identiteetit ovat voimassa  $L^2(P)$  avaruudessa:

1. Kun  $X, Y \in L^2(P)$ ,  $\|X+Y\|_2^2 + \|X-Y\|_2^2 = 2\|X\|_2^2 + 2\|Y\|_2^2$   
(Suunnikkaan identiteetti)

2.  $E_P(XY) = \frac{1}{4}(\|X+Y\|_2^2 - \|X-Y\|_2^2)$  (Polarisaation identiteetti)

Todistus: harjoitustehtävä.

**Huomautus** Voidaan myös osoittaa että kun normi  $\|x\|$  toteuttaa suunnikkaan identiteetti, on olemassa skalaari tulo  $(x, y)$  jolla  $\|x\|^2 = (x, x)$ .

Jensenin epäyhtälön avulla Cauchy-Schwarz epäyhtälö yleistyy  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  avaruuksiin, jossa  $1 < p < \infty$  ja  $\mu$  on yleinen positiivinen mitta.

Huomataan myös että kun  $X \in L^1(\mu), Y \in L^\infty(\mu)$ , koska

$$|X(\omega)Y(\omega)| \leq |X(\omega)| \|Y\|_\infty$$

seuraa suoraan että tulo  $(XY) \in L^1(\mu)$ .

**Lause 9.0.6.** Olkoon  $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ja  $Y \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$

jossa  $q = p/(p-1)$  on konjugattiekspONENTTI joka toteuttaa  $(q^{-1} + p^{-1}) = 1$ .

Silloin

$$\begin{aligned} \int_\Omega |X(\omega)Y(\omega)|\mu(d\omega) &\leq \left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^p \mu(d\omega) \right\}^{1/p} \left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^q \mu(d\omega) \right\}^{1/q} \\ &= \|X\|_{L^p(\mu)} \|Y\|_{L^q(\mu)} \end{aligned}$$

(Hölderin epäyhtälö).

Kun  $X, Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$

$$\|X+Y\|_{L^p(\mu)} \leq \|X\|_{L^p(\mu)} + \|Y\|_{L^p(\mu)}$$

(Minkowskin epäyhtälö).

Tod. (Hölder) Olkoon  $1 < p < \infty$ . Tietenkin voidaan olettaa  $X(\omega) \geq 0$   
 $Y(\omega) \geq 0$  ja  $E_P(|X|^p) > 0$ , muuten  $X(\omega) = 0$   $P$ -m.v. ja epäyhtälö seuraa.

Määritellään satunnaismuuttuja

$$\tilde{Y}(\omega) := \frac{Y(\omega)}{X(\omega)^{p-1}} \mathbf{1}(X(\omega) > 0) \geq 0$$

ja todennäköisyysmitta

$$\tilde{P}(d\omega) = \frac{X(\omega)^p}{\|X\|_{L^p(\mu)}^p} \mu(d\omega)$$

Jensenin epäyhtälöstä

$$\{E_{\tilde{P}}(\tilde{Y})\}^q \leq E_{\tilde{P}}(\tilde{Y}^q)$$

kaikille  $q \geq 1$  erityisesti kun  $q = p/(p-1)$

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\Omega} \frac{Y(\omega)}{X(\omega)^{p-1}} \mathbf{1}(X(\omega) > 0) \frac{X(\omega)^p}{\|X\|_{L^p(\mu)}^p} \mu(d\omega) \right\}^q \\ & \leq \int_{\Omega} \left\{ \frac{Y(\omega)}{X(\omega)^{p-1}} \mathbf{1}(X(\omega) > 0) \right\}^q \frac{X(\omega)^p}{\|X\|_{L^p(\mu)}^p} \mu(d\omega) \iff \\ & \|X\|_{L^p(\mu)}^{-pq} \left\{ \int_{\Omega} Y(\omega) X(\omega) \mu(d\omega) \right\}^q \leq \|X\|_{L^p(\mu)}^{-p} \int_{\Omega} Y(\omega)^q X(\omega)^{(q(p-1)-p)} \mu(d\omega) \end{aligned}$$

jossa  $q(p-1) - p = 0$ . Seuraa

$$\int_{\Omega} Y(\omega) X(\omega) \mu(d\omega) \leq \left\{ \int_{\Omega} Y(\omega)^q \mu(d\omega) \right\}^{1/q} \|X\|_{L^p(\mu)}^{(1-1/q)p}$$

jossa  $(1-1/q)p = 1$ .

Tod. (Minkowski) Huomataan ensin että  $\forall x, y \geq 0$ ,

$$(x+y)^p \leq (2 \max(x, y))^p \leq 2^p(x^p + y^p),$$

siksi kun  $X, Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , myös  $(X+Y) \in L^p(\mu)$ . Seuraa Hölderin epäyhtälöstä

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |X+Y|^p d\mu \leq \int_{\Omega} |X| |X+Y|^{p-1} d\mu + \int_{\Omega} |Y| |X+Y|^{p-1} d\mu \\ & \leq (\|X\|_{L^p(\mu)} + \|Y\|_{L^p(\mu)}) \| |X+Y|^{p-1} \|_{L^q(\mu)} \\ & = (\|X\|_{L^p(\mu)} + \|Y\|_{L^p(\mu)}) (\|X+Y\|_{L^p(\mu)})^{p/q} \end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\|X + Y\|_{L^p(\mu)}^{(1-1/q)p} \leq \|X\|_{L^p(\mu)} + \|Y\|_{L^p(\mu)}$$

jossa  $(1 - 1/q)p = 1 \quad \square$

**Lause 9.0.7.**  $\forall 1 \leq p \leq \infty$ ,  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$  on **täydellinen** :

*jos  $\{X_n(\omega)\} \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$  on Cauchy jono,*

*eli  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$  jolle  $\|X_n - X_m\|_{L^p(P)} < \varepsilon$  kun  $n, m \geq N_\varepsilon$ ,*

*on olemassa  $X_\infty(\omega) \in L^p(P)$  jolle  $\lim_{n \uparrow \infty} \|X_n - X\|_{L^p(P)}$ .*

*Tämä lause ja sen todistus pätevät myös silloin kun integroidaan positiivisen mitan  $\mu(d\omega)$ :n suhteen, jolla  $\mu(\Omega) = +\infty$ .*

Tod. Tapaus jossa  $p = \infty$  jää harjoitustehtäväksi.

Olkoon  $p < \infty$  ja  $\{X_n\} \subseteq L^p$  Cauchy jono. On olemassa jono  $(k_n)$  jolla

$$\|X_r - X_s\|_p \leq 2^{-n} \quad \forall r, s \geq k_n$$

Koska jono  $(X_n - X_{k_0} : n \geq k_0)$  on myös Cauchy jono, voidaan unohtaa jonon alkuosaa ja olettaa  $X_0(\omega) = 0$  ja  $k_0 = 0$ . Saadaan teleskooppinen esitys

$$X_{k_n}(\omega) = \sum_{m=1}^n (X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)).$$

Jokaiselle  $\omega \in \Omega$ , rakennetaan monotoninen jono

$$Y_n(\omega) := \sum_{m=1}^n |X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)| \uparrow Y_\infty(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} |X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)| \in [0, \infty]$$

Minkowskin epäyhtälöstä (9.0.1)

$$\|Y_n\|_{L^p} \leq \sum_{m=1}^n \|X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)\|_{L^p}$$

ja monotonisen konvergenssin lauseesta

$$\|Y_\infty\|_{L^p} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)\|_{L^p} \leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} = 2 < \infty$$

Tästä seuraa että  $P$ -melkein varmasti

$$Y_\infty(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} |X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)| < \infty,$$

josta seuraa että  $P$ -melkein varmasti sarjan

$$X_\infty(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} (X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega))$$

suppenee absoluuttisesti. Jotta  $X_\infty(\omega)$  olisi määritelty kaikille  $\omega$ :lle, olkoon

$$X_\infty(\omega) := \limsup_{n \rightarrow \infty} X_{k_n}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

Seuraa että  $X(\omega)$  on satunnaismuuttuja ja  $X_{k_n}(\omega) \rightarrow X(\omega)$   $P$ -melkein varmasti. Kun  $r > k_n$  ja  $\forall m > n$

$$\begin{aligned} E_P(|X_r - X_{k_m}|^p) &\leq 2^{-np} \quad \implies \\ E_P(|X_r - X_\infty|^p) &= E_P(\liminf_m |X_r - X_{k_m}|^p) \leq \liminf_m E_P(|X_r - X_{k_m}|^p) \leq 2^{-np} \end{aligned}$$

jossa käytettiin Fatoun lemma. Minkowskin epäyhtälöstä seuraa  $X_\infty \in L^p$ , ja  $X_r \xrightarrow{L^p} X_\infty$  kun  $r \rightarrow \infty$   $\square$

## 9.1 Projektio $L^2(P)$ avaruudessa

**Lause 9.1.1.** Olkoon  $H \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  aliavaruus joka on **suljettu**, eli jos  $\{X_n\} \subseteq H$  ja on olemassa  $X \in L^2(P)$  jolla  $\|X_n - X\|_{L^2(P)} \rightarrow 0$ , siitä seuraa  $X \in H$ .

Kaikille  $X(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  on olemassa ortogonaalinen projektio  $H$ -aliavaruuteen  $Y(\omega) = (\Pi_H X)(\omega) \in H$  jolla

1.  $E_P((X - Y)^2) = \Delta^2 := \inf_{W \in H} E_P((X - W)^2)$ ,
2.  $E_P((X - Y)W) = 0, \forall W \in H$ .

Projektio  $Y$  on  $P$ -melkein varmasti yksikäsitteinen.

**Huomautus 9.1.1.** Muistetaan että Eukliidisessa avaruudessa  $\mathbb{R}^d$  on määritelty vektoreiden skalaari tulo

$$\langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{\omega=1}^d X(\omega)Y(\omega) = d \cdot \sum_{\omega=1}^d X(\omega)Y(\omega)P(\{\omega\}) = E_P(XY)d$$

jossa  $P(\omega) = 1/d$  on tasainen todennäköisyys äärellisessä avaruudessa  $\Omega = \{1, \dots, d\}$ . Sanomme että vektorit  $X, Y \in \mathbb{R}^d$  ovat kohtisuoria (merkintä  $X \perp_{\mathbb{R}^d} Y$ ), kun  $\langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$ . Tämä geometrinen käsite yleistyy varustamalla  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  skalaaritulolla

$$\langle X, Y \rangle_{L^2(P)} = E_P(XY) = \int_{\Omega} X(\omega)Y(\omega)P(d\omega)$$

ja tulkitaan satunnaismuuttuja  $(X(\omega) : \omega \in \Omega)$  ääretönulotteisena vektorina. Satunnais-muuttujat  $X, Y \in L^2(P)$  ovat kohtisuoria (merkintä  $X \perp_P Y$ ), kun  $E_P(XY) = 0$ .

**Tod.** Koska  $0 \in H$ ,  $\Delta^2 \leq E_P(X^2) < \infty$ ,

ja on olemassa jono  $(Y_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq H$  jolla  $\|X - Y_n\|_2 \rightarrow \Delta$ .

Olkoon  $\varepsilon > 0$  ja  $\bar{n}$  jolla kun  $n \geq \bar{n}$

$$\Delta^2 \leq E_P((X - Y_n)^2) < \Delta^2 + \varepsilon.$$

Kun sovelletaan suunnikkaan identiteetti vektoreille

$(Y_n - Y_m)/2$  ja  $(X - (Y_n + Y_m)/2)$ , seuraa

$$2 \| (Y_m - Y_n)/2 \|_2^2 = \| X - Y_m \|_2^2 + \| X - Y_n \|_2^2 - 2 \| X - (Y_m + Y_n)/2 \|_2^2.$$

Koska  $(Y_n + Y_m)/2 \in H$ ,

$$\| X - (Y_n + Y_m)/2 \|_2^2 \geq \Delta^2,$$

ja kun  $n, m \geq \bar{n}$  seuraa

$$2 \| (Y_m - Y_n)/2 \|_2^2 \leq 2\varepsilon.$$

Siksi  $(Y_n) \subseteq H$  on Cauchy jono  $L^2(P)$ :ssa, ja  $L^2(P)$  täydellisyydestä seuraa että on olemassa  $Y \in L^2(P)$  jolla  $Y_n \xrightarrow{L^2} Y$ , ja koska  $H$  on suljettu aliavaruus seuraa  $Y \in H$ . Kun  $W \in H \setminus \{0\}$  ja  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(Y + tW) \in H$ , ja  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \| X - Y \|_2^2 &\leq \| X - Y - tW \|_2^2 = \| X - Y \|_2^2 + t^2 \| W \|_2^2 - 2tE_P((X - Y)W) \\ &\iff t^2 \| W \|_2^2 \geq 2tE_P((X - Y)W) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

josta seuraa  $E_P((X-Y)W) = 0$ . Jos  $\tilde{Y}(\omega) \in H$  on myös projektio, ottamalla  $W = (Y - \tilde{Y}) \in H$ ,

$$0 = E_P(XW) - E_P(XW) = E_P(YW) - E_P(\tilde{Y}W) = E_P((Y - \tilde{Y})W) = E_P((Y - \tilde{Y})^2)$$

josta seuraa  $Y(\omega) = \tilde{Y}(\omega)$   $P$ -m.v.  $\square$

**Lemma 9.1.1.**  $L^2$ -projektio on lineaarinen operaattori: kun  $X, Z \in L^2(P)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  ja  $H$  on suljettu aliavaruus,

$$\Pi_H(aX + bZ) = a\Pi_H X + b\Pi_H Z,$$

Todistus: harjoitustehtävä.

**Esimerkki 9.1.1.** (Projektio satunnaismuuttujan virittämään lineaariseen aliavaruuteen): Olkoon olkoon  $Y(\omega) \in L^2(P)$  jolla  $E_P(Y^2) > 0$ , ja

$$H = \{ aY(\omega) + b : a, b \in \mathbb{R} \} \subseteq L^2(P).$$

Koska

$$H = \{ a(Y(\omega) - E_P(Y)) + b : a, b \in \mathbb{R} \}$$

$Y(\omega)$  ja  $(Y(\omega) - E_P(Y))$  virittävät saman lineaarisen aliavaruuden. Siksi voidaan olettaa  $E_P(Y) = 0$ .

Osoitan että  $H$  on suljettu: olkoon  $X_n(\omega) = (a_n Y(\omega) + b_n) \in H$  jossa  $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ , jolla

$$E_P((X_n - X)^2) = E_P((a_n Y + b_n - X)^2) \rightarrow 0$$

Silloin  $(X_n)$  on Cauchy jono  $L^2(P)$ :ssa, josta seuraa

$$E_P(Y^2)(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 \rightarrow 0$$

kun  $n, m \rightarrow \infty$ , ja koska  $E_P(Y^2) > 0$ ,  $(a_n)$  ja  $(b_n)$  ovat Cauchy jonoja  $\mathbb{R}$ :ssa. Koska  $\mathbb{R}$  on täydellinen, on olemassa  $a, b \in \mathbb{R}$  jolla  $a_n \rightarrow a$  ja  $b_n \rightarrow b$ . Tästä seuraa  $(a_n Y + b_n) \rightarrow (aY + b)$   $L^2(P)$ -normissa, ja  $X(\omega) = (aY(\omega) + b)$   $P$ -melkein

varmasti, eli  $X \in H$ . Esitämme  $X$ :n projektio aliavaruuteen  $H$ : mimoidaan yli  $a, b \in \mathbb{R}$

$$E_P\left(\{aY + b - X\}^2\right) = E(X^2) + a^2E(Y^2) + b^2 + 2abE(Y) - 2aE(XY) - 2bE(X).$$

Koska oletetusti  $E(Y) = 0$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}E_P\left(\{aY + b - X\}^2\right) &= 2aE(Y^2) - 2E(XY) \\ \frac{\partial}{\partial b}E_P\left(\{aY + b - X\}^2\right) &= 2b - 2E(X)\end{aligned}$$

josta seuraa  $b = E(X)$ ,  $a = E(Y^2)/E(XY)$ . Siis kun  $E(Y) = 0$ ,  $X$ :n projektio  $Y$ :n virittämään aliavaruuteen  $H$ :n on

$$\Pi_H(X) = E_P(X) + \frac{E(XY)}{E(Y^2)}Y$$

Yleisemmin

$$\Pi_H(X) = E(X) + \frac{\text{Cov}(XY)}{\text{Var}(Y^2)}(Y - E(Y))$$



# Luku 10

## Ehdollinen odotusarvo

Olkoon  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  ali- $\sigma$ -algebra.

Silloin  $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P) \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\forall 0 \leq p \leq \infty$ , ja kun  $p > 0$ ,  $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$  on suljettu aliavaruus.

**Tod.** Olkoon  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$  ja  $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$  joilla  $E_P(|X_n - X|^p) \rightarrow 0$ . Seuraa että  $X \implies X_n \xrightarrow{P} X$  ja on olemassa alijono jolla  $\{n_k\} : X_{n_k}(\omega) \rightarrow X(\omega)$   $P$  m.v. . Olkoon  $\tilde{X}(\omega) := \liminf_k X_{n_k}(\omega) \in L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$ . Seuraa että  $X_n \xrightarrow{L^p} \tilde{X}$  ja siksi  $X(\omega) = \tilde{X}(\omega)$   $P$ -m.v.

Kun  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ja  $H = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$  seuraa projektio lauseesta (9.1.1) että on olemassa ortogonaalinen projektio

$$Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) := (\Pi_{L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)} X)(\omega)$$

joka kutsutaan *ehdolliseksi odotusarvoksi* jolla

- $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$
- $E_P(XW) = E_P(YW) \quad \forall W \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$

**Lemma 10.0.1.** *Ehdollinen odotusarvo on positiivinen operaattori:*

*Olkoon  $0 \leq X(\omega) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  ali- $\sigma$ -algebra. Silloin*

$$Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \geq 0 \quad P\text{-m.v.}$$

**Tod.** Koska  $L^\infty(P) \subseteq L^2(P)$  ehdollinen odotusarvo  $Y(\omega)$  on olemassa  $L^2$ -projektiona. Olkoon  $A = \{\omega : Y(\omega) < 0\} \in \mathcal{G}$ . Koska  $\mathbf{1}_A(\omega) \in L^\infty(P) \subseteq L^2(P)$ ,

$$0 \leq E_P(X\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_{(Y < 0)}) = -E_P(Y^-) \leq 0$$

ja väite seuraa.

Ehdollisen odotusarvon määritelmä laajennetaan  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  avaruuteen:

**Teoreema 10.0.1.** (Kolmogorovin määritelmä) Kun  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , ja  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  on ali- $\sigma$ -algebra, on olemassa ehdollinen odotusarvo  $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  jolla  $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  ja

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Ehdollinen odotusarvo on  $P$ -m.v. yksikäsitteinen.

**Tod.** Voidaan olettaa että  $X(\omega) \geq 0 \forall \omega$ , muuten käytämme ensin hajotelmaa  $X(\omega) = X(\omega)^+ - X(\omega)^-$  ja sitten määrittelemme

$$E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) = E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X^-|\mathcal{G})(\omega)$$

Olkoon  $0 \leq X_n(\omega) = X(\omega) \wedge n \uparrow X(\omega)$  kun  $n \uparrow \infty$ . Koska  $X_n \in L^\infty$  seuraa että  $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ja projektio lauseesta seuraa että on olemassa  $Y_n \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$  jolla

$$E_P(X_n\mathbf{1}_A) = E_P(Y_n\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Seuraa lemmasta (10.0.1) että  $Y_n(\omega) \geq 0$   $P$ -melkein varmasti.

Kun  $n \geq m$   $(X_n(\omega) - X_m(\omega)) \geq 0$  josta seuraa

$$(Y_n(\omega) - Y_m(\omega)) = E_P(X_n|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X_m|\mathcal{G})(\omega) = E_P(X_n - X_m|\mathcal{G})(\omega) \geq 0 \quad P\text{-m.v.}$$

Olkoon  $Y(\omega) = \limsup_n Y_n(\omega)$ . Seuraa että  $Y_n(\omega) \uparrow Y(\omega)$   $P$ -m.v. ja monotonisen konvergenssin lauseesta,  $\forall A \in \mathcal{G}$

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = \lim_{n \uparrow \infty} E_P(X_n\mathbf{1}_A) = \lim_{n \uparrow \infty} E_P(Y_n\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A)$$

Jos  $\tilde{Y}(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  toteuttaa Kolmogorovin määritelmää, koska  $A = \{\omega : Y(\omega) > \tilde{Y}(\omega)\} \in \mathcal{G}$ ,

$$0 \leq E_P((Y - \tilde{Y})\mathbf{1}_A) = E_P(X\mathbf{1}_A) - E_P(X\mathbf{1}_A) = 0$$

seuraa että  $Y(\omega) \leq \tilde{Y}(\omega)$   $P$ -m.v., samoin seuraa että  $Y(\omega) \geq \tilde{Y}(\omega)$  ja siksi  $Y(\omega) = \tilde{Y}(\omega)$   $P$ -m.v.

**Tehtävä 10.0.1.** Osoita että (10.0.1) pätee jos ja vain jos

$$E_P(XW) = E_P(YW) \quad \forall W \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

**Tehtävä 10.0.2.** Olkoon  $\mathcal{G} = \sigma(A_1, \dots, A_n) \subseteq \mathcal{F}$  äärellisesti generoitu ali  $\sigma$ -algebra, jossa  $\{A_1, \dots, A_n\}$  on  $\Omega$ :n  $\mathcal{F}$ -mitallinen ositus,  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  kun  $i \neq j$ .

Olkoon  $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Silloin

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{E_P(X\mathbf{1}_{A_i})}{P(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}(\omega) := \sum_{i=1}^n E_P(X|A_i) \mathbf{1}_{A_i}(\omega) \quad (10.0.1)$$

jossa  $E_P(X|A) = E_P(X\mathbf{1}_A)/P(A)$  on elementaarinen ehdollinen odotusarvo, joka saa mielivaltainen arvo (esimerkiksi 0) silloin kun  $P(A) = 0$ . Osoita että (10.0.1) toteuttaa Kolmogorovin ehdollisen odotusarvon määritelmän. (10.0.1) yleistyy myös tapaukseen jossa mitallinen ositus  $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$  on numeroituva, silloin

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{E_P(X\mathbf{1}_{A_i})}{P(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}(\omega) := \sum_{i \in \mathbb{N}} E_P(X|A_i) \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$$

**Huom:** Kolmogorovin ehdollinen odotusarvo  $\sigma$ -algebran ehdolla  $E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$  on satunnaismuuttuja, kun elementaarinen odotusarvo tapahtuman ehdolla  $E_P(X|A)$  on vakio joka on hyvin määritelty vain silloin kun  $P(A) > 0$ .

## 10.1 Ehdollinen odotusarvo Radon-Nykodim derivaattana

Olkoon  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  Määritellään merkkinen mitta

$$\mu_X(A) = E_P(X\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Huomataan että  $\mu_X(A) = 0$  silloin kun  $A \in \mathcal{F}$  ja  $P(A) = 0$ , eli  $\mu \ll P$   $\sigma$ -algebrassa  $\mathcal{F}$ , ja  $X(\omega) = \frac{d\mu_X}{dP}(\omega)$  on vastaava Radon-Nikodymin derivaatta.

Olkoon  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  ali  $\sigma$ -algebra. Erityisesti  $\mu \ll P$   $\sigma$ -algebrassa  $\mathcal{G}$ . Radon-Nikodymin lauseesta seuraa että on olemassa R-N derivaatta

$$Y(\omega) := \frac{d\mu_X|_{\mathcal{G}}}{dP|_{\mathcal{G}}}(\omega)$$

jossa  $Y(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  joka toteuttaa mitanvaihtokaavaa

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = \mu_X(A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Kolmogorovin määritelmästä seuraa että  $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$ .

Siis ehdollisen odotusarvon olemassa olo seuraa R-N lauseesta. Kuitenkin, koska emme ole vielä todistaneet R-N lauseetta käyttimme  $L^2$ -projektiota.

## 10.2 Mitä voidaan sanoa kun $E_P(|X|) = \infty$ ?

Olkoon  $0 \leq X(\omega) \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  mutta  $E_P(X) = \infty$ . Myös tässä tapauksessa monotonisen konvergenssilauseen kautta seuraa että on olemassa ehdollinen odotusarvo  $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \in [0, +\infty]$  joka on  $\mathcal{G}$ -mitallinen joka toteuttaa  $\forall A \in \mathcal{G}$ .

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) \in [0, +\infty]$$

Toki  $Y(\omega)$  voi saada myös arvoa  $+\infty$ , joka tapauksessa  $E_P(Y) = E_P(X) = \infty$ .

Yleisemmin olkoon  $X(\omega) = (X(\omega)^+ - X(\omega)^-)$ , jossa  $E_P(|X|) = \infty$ . Silloin ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) := E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X^-|\mathcal{G})(\omega) \in [-\infty, +\infty]$$

on hyvin määritelty vain joukon

$$U := \{ \omega : E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) = E_P(X^-|\mathcal{G})(\omega) = +\infty \}$$

ulkopuolella. Kun käy hyvin joskus  $P(U) = 0$ .

### 10.3 Ehdollisen odotusarvon ominaisuudet

1. Monotoninen konvergenssi :

$$0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega) \implies 0 \leq E_P(X_n | \mathcal{G})(\omega) \uparrow E_P(X | \mathcal{G})(\omega) \quad P \text{ m.v.}$$

2.  $E_P(E_P(X | \mathcal{G})) = E_P(X)$

3. Kun  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ,

$$E_P(X | \mathcal{H})(\omega) = E_P(E_P(X | \mathcal{G}) | \mathcal{H})(\omega) \quad P \text{ m.v.}$$

4. Jos  $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ , ja  $X, (XY) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , seuraa

$$E_P(YX | \mathcal{G})(\omega) = Y(\omega)E_P(X | \mathcal{G})(\omega)$$

5. jos  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{H}$  on  $P$ -riippumaton  $\sigma$ -algebrasta  $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$ ,

$$E_P(X | \mathcal{G} \vee \mathcal{H}) = E_P(X | \mathcal{G})$$

**Tod.**  $\forall G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$ , seuraa

$$E_P(X \mathbf{1}_G \mathbf{1}_H) = E_P(X \mathbf{1}_G)P(H) = E_P(E_P(X | \mathcal{G}) \mathbf{1}_G)P(H) = E_P(E_P(X | \mathcal{G}) \mathbf{1}_G \mathbf{1}_H)$$

ja väite seuraa koska  $\mathcal{G} \vee \mathcal{H} = \sigma(G \cap H : G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H})$ .

6. (Jensenin epäyhtälö): Kun  $E_P(X | \mathcal{G})$  on hyvin määritelty ja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on konvekksi,

$$E_P(g(X) | \mathcal{G}) \geq g(E_P(X | \mathcal{G}))$$

**Tod.**

$$g(X(\omega)) \geq g(E_P(X | \mathcal{G})(\omega)) + \delta(\omega) \left( X(\omega) - E_P(X | \mathcal{G})(\omega) \right)$$

jossa  $\delta(\omega) = \nabla g_+(E_P(X | \mathcal{G})(\omega))$  on  $\mathcal{G}$ -mitallinen. Kun otetaan ehdollista odotusarvoa molemmista puolesta, väite seuraa odotusarvon positiivisuudesta.

## 10.4 Säännöllinen ehdollinen todennäköisyys ja ytimet

Tapahtuman  $A \in \mathcal{F}$  ehdollinen todennäköisyys ehdolla  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -algebra on luonnollisesti

$$P(A|\mathcal{G})(\omega) = E_P(\mathbf{1}_A|\mathcal{G})(\omega)$$

joka on yksikäsitteinen modulo  $P$ -nolla mittaisia joukkoja. Koska ehdollinen odotusarvo on ei-negatiivinen operaattori, seuraa  $P(A|\mathcal{G})(\omega) \in [0, 1]$   $P$ -melkein varmasti.

Voidaanko sanoa että  $P$ -melkein varmasti, kuvaus  $A \mapsto P(A|\mathcal{G})(\omega) \in [0, 1]$  on todennäköisyysmitta?

Olkoon  $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$  tapahtumien jono jolla  $A_n \downarrow \emptyset$ . Seuraa ehdollisen odotusarvon monotonisen konvergenssin lauseesta että on olemassa joukko  $N$  jolla  $P(N) = 0$

$$P(A_n|\mathcal{G})(\omega) \downarrow 0 \quad \forall \omega \in N^c \tag{10.4.1}$$

Tämä joukko voi toki riippua  $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$  jonosta, ja kun yleisesti jonojen määrä on ylinumeroituva, ei mikään takaa että löytyy sellainen  $P$ -nolla mittainen joukko  $N$  jossa (10.4.1) pätee samaan aikaan kaikille tapahtumien jonoille joilla  $A_n \downarrow \emptyset$ .

Siis ehdollinen todennäköisyys ei ole automaattisesti  $P$ -melkein varmasti  $\sigma$ -additiivinen.

**Määritelmä 10.4.1.** *Olkoon  $(\Omega, \mathcal{F})$  ja  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$  todennäköisyysavaruuudet.*

*Kuvaus  $K : \Omega \times \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow [0, 1]$  on  $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$  todennäköisyys ydin kun*

- *kaikille kiinnitetyille  $\omega \in \Omega$  kuvaus  $K(\omega, \cdot) : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow [0, 1]$  jossa  $\tilde{A} \mapsto K(\omega, \tilde{A})$  on todennäköisyysmitta.*
- *kaikille kiinnitetyille tapahtumille  $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{F}}$  kuvaus  $K(\cdot, \tilde{A}) : \Omega \rightarrow [0, 1]$  jossa  $\omega \mapsto K(\omega, \tilde{A})$  on  $\mathcal{F}$ -mittallinen.*

**Määritelmä 10.4.2.** Olkoon  $\tilde{\Omega} = \Omega$  ja  $\tilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ .

Ehdollisella todennäköisyydellä  $(\tilde{A}, \omega) \mapsto P(\tilde{A}|\mathcal{G})(\omega)$  jossa  $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{F}}$  on säännöllinen versio jos on olemassa  $(\Omega, \mathcal{G}) \rightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$  todennäköisyys-ydin  $K(\omega, \tilde{A})$ , joka on  $\mathcal{G}$ -mitallinen  $\omega$ :n suhteen, ja

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = \int_{\tilde{\Omega}} X(\tilde{\omega})K(\omega, d\tilde{\omega})$$

kaikille  $X \in L^1(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, P)$

**Huomautus 10.4.1.** määritelmässä esiintyy ali- $\sigma$  algebra  $\tilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$  koska joskus ehdollisen todennäköisyyden säännöllinen versio on olemassa vain jollekin pienelle  $\sigma$ -algebralle eikä alkuperäiselle  $\sigma$ -algebralle  $\mathcal{F}$ . Esimerkki:  $\tilde{\mathcal{F}} = \sigma(X)$  jossa  $X$  on ( $\mathcal{F}$ -mitallinen) reaal-arvoinen satunnaismuuttuja.

**Määritelmä 10.4.3.** Todennäköisyysavaruus  $(\Omega, \mathcal{F})$  on Borel jos on olemassa mitallinen injektio

$$\Psi : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$$

jonka käänteiskuvaus  $\Psi^{-1} : \Psi(\Omega) \rightarrow \Omega$  on myös mitallinen.

**Teoreema 10.4.1.** Olkoon  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  todennäköisyyskolmikko, ja  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$  mitallinen kuvaus, jossa  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$  on Borelin avaruus, ja  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  ali  $\sigma$ -algebra

On olemassa  $(\Omega, \mathcal{G}) \rightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$  todennäköisyys ydin  $K(\cdot, \cdot)$  joka on ehdollisen todennäköisyyden säännöllinen versio:  $P$  melkein varmasti,

$$P(X \in D|\mathcal{G})(\omega) := E_P(\mathbf{1}(X \in D)|\mathcal{G})(\omega) = K(\omega, D) \quad \text{kaikille } D \in \tilde{\mathcal{F}}$$

**Todistus** (Katso myös Kallenbergin kirjasta Foundations of Modern Probability, Thm 6.3, 6.4.). Oletan ensin että  $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}$  ja  $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Silloin  $\forall q < r \in \mathbb{Q}$ , ehdollisen odotusarvon positiivisuudesta seuraa

$$P(X \leq q|\mathcal{G})(\omega) \leq P(X \leq r|\mathcal{G})(\omega) \quad P\text{-melkein varmasti,} \quad (10.4.2)$$

ja koska  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  on numeroituvaa on olemassa  $N \subset \Omega$  jolla  $P(N) = 0$  ja 10.4.2 pätee samaan aikaan  $\forall q \leq r \in \mathbb{Q}, \omega \in N^c$ .

Olkoon

$$\tilde{N} = \left\{ \omega : \limsup_{q \downarrow t, q \in \mathbb{Q}} P(X \leq q | \mathcal{G})(\omega) > \liminf_{q \downarrow t, q \in \mathbb{Q}} P(X \leq q | \mathcal{G})(\omega) \right\}$$

Huomataan ensin että  $\tilde{N} \in \mathcal{G}$  koska  $P(X \leq q | \mathcal{G})(\omega)$  ovat  $\mathcal{G}$ -mitallisia, ja koska  $\tilde{N} \subseteq N$ ,  $P(\tilde{N}) = 0$ .

Määritellään  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$K((-\infty, t], \omega) = \begin{cases} \lim_{q \downarrow t, q \in \mathbb{Q}} K((-\infty, q], \omega) & \text{kun } \omega \in \tilde{N}^c \\ Q((-\infty, t]) & \text{kun } \omega \in \tilde{N} \end{cases}$$

jossa  $Q$  on mielivaltainen todennäköisyyssmitta  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  avaruudessa esim.  $Q(dx) = \delta_0(dx)$  pistemassa 0 pistessä, tai  $Q(dx) = P(\{\omega : X(\omega) \in dx\})$  on satunnaismuuttujan jakauma.

Kuvaus  $\omega \mapsto K((-\infty, t], \omega)$  on  $\mathcal{G}$ -mitallinen  $\forall t \in \mathbb{R}$ , ja  $\forall \omega \in \Omega$  kuvaus  $t \mapsto K((-\infty, t], \omega)$  on todennäköisyysjakauman kertymäfunktio, koska se on ei-vähenevä, oikealta jatkuva, ja toteuttaa

$$\lim_{q \downarrow \infty, q \in \mathbb{Q}} K((-\infty, q], \omega) = K(\emptyset, \omega) = 0, \quad \lim_{q \uparrow \infty, q \in \mathbb{Q}} K((-\infty, q], \omega) = K(\mathbb{R}, \omega) = 1, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Charatheodoryn laajennuslauseesta seuraa että  $\forall \omega \in \Omega$  on olemassa yksikäsitteinen  $\sigma$ -additiivinen laajennus  $K(B, \omega)$ , joka on todennäköisyyssmitta  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$   $\sigma$ -algebralla. Seuraavaksi osoitamme että kaikille Borel-mitallisille testi-funktioille  $f(x) \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) K(dx, \omega) = E_P(f(X) | \mathcal{G})(\omega) \quad (10.4.3)$$

joka tarkoittaa että todennäköisyys ydin  $K(B, \omega)$  on säännöllinen versio ehdollisesta todennäköisyydestä  $P(X \in B | \mathcal{G})(\omega)$ .

Olkoon  $\mathcal{C}$  kokoelma kaikista rajoitetuista Borel mitallisista funktioista  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jotka toteuttavat:

1. kuvaus  $\omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) K(dx, \omega)$  on  $\mathcal{G}$ -mitallinen
2. 10.4.3 pätee, eli  $\forall G \in \mathcal{G}$

$$E_P\left(f(X) \mathbf{1}_G\right) = \int_{\Omega} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) K(dx, \omega) \right) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega)$$

10.4. SÄÄNNÖLLINEN EHDOLLINEN TODENNÄKÖISYYS JA YTIMET 139

$\mathcal{C}$  on vektori avaruus joka sisältää vakiot: kun  $f, g \in \mathcal{C}$  ja  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , koska  $\forall \omega \in \Omega$  odotusarvo on lineaarinen, integraali

$$\int_{\mathbb{R}} (\alpha f(x) + \beta g(x)) K(dx, \omega) = \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x) K(dx, \omega) + \beta \int_{\mathbb{R}} g(x) K(dx, \omega)$$

on  $\mathcal{G}$ -mitallinen  $\omega$ :n suhteen, ja  $\forall G \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} E_P \left( (\alpha f(X) + \beta g(X)) \mathbf{1}_G \right) &= \alpha E_P(f(X) \mathbf{1}_G) + \beta E_P(g(X) \mathbf{1}_G) = \\ &= \alpha \int_{\Omega} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) K(dx, \omega) \right) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) + \beta \int_{\Omega} \left( \int_{\mathbb{R}} g(x) K(dx, \omega) \right) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} (\alpha f(x) + \beta g(x)) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) \end{aligned}$$

$\mathcal{C}$  on suljettu monotonisen rajankäynnin suhteen: Kun  $0 \leq f_n(x) \uparrow f(x)$  jossa  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$ , ja  $f(x)$  on rajoitettu, seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta  $\forall \omega \in \Omega$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) K(dx, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) K(dx, \omega)$$

joka on myös  $\mathcal{G}$ -mitallinen, ja  $\forall G \in \mathcal{G}$  monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa

$$\begin{aligned} E_P(f(X) \mathbf{1}_G) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_P(f_n(X) \mathbf{1}_G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left( \int_{\mathbb{R}} f_n(x) K(dx, \omega) \right) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}} f_n(x) K(dx, \omega) \right) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) K(dx, \omega) \right) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) \end{aligned}$$

Koska  $\mathbf{1}_{(-\infty, q]}(\cdot) \in \mathcal{C}$  ja  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((-\infty, q], q \in \mathbb{Q})$ , monotonisen luokan lauseesta 3.0.1 seuraa että  $\mathcal{C}$  sisältää kaikki rajoitettuja Borel-mitallisia funktioita. Monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa että (10.4.3) pätee myös kaikille ei-negatiivisille Borel-mitallisille funktioille. Yleisemmin, kun  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$  on Borelin avaruus ja

$$\Psi : (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

on mitallinen injektio jolla on mitallinen käänteiskuvaus  $\Psi^{-1}$ , kun  $A \in \tilde{\mathcal{F}}$

$$P(X \in A | \mathcal{G})(\omega) = P(\Phi(X) \in \Psi(A) | \mathcal{G})(\omega) = K(\Psi(A), \omega)$$

jossa  $\Psi(A)$  on Borelin joukko, koska  $\Psi^{-1}$  on mitallinen, ja todennäköisyys ydin

$$K(B, \omega) = P(\Psi(X) \in B | \mathcal{G})(\omega) \quad P\text{-melkein varmasti } \forall B \in \mathcal{B}(0, 1)$$

on ehdollisen todennäköisyyden säännöllinen versio, joka on olemassa koska  $\Psi(X(\omega))$  saa arvoja  $[0, 1]$  välissä  $\square$

**Huomautus 10.4.2.** Meidän onneksi  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  ja yleisemmin kaikki separoituvat metriset avaruudet varustettuina Borelin  $\sigma$ -algebroilla ovat Borelin avaruuksia.  $\mathbb{R}^d$ -arvoisen satunnaisvektorin ehdolliset todennäköisyydet ovat aina säännöllisiä. Kun  $(S, d)$  on separoituva metrinen avaruus, on olemassa tiheä numeroituva joukko  $(x_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq S$  eli  $\forall x \in S$  on olemassa indeksien jono  $(m_n : n \in \mathbb{N})$  jolla  $d(x_{m_n}, x) \downarrow 0$  kun  $m \uparrow \infty$ . Silloin on olemassa mitallinen injektio

$$\Psi : (S, \mathcal{B}(S)) \longrightarrow ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$$

jolla on mitallinen käänteiskuvaus seuraavasti:  $\forall n \in \mathbb{N}$ , olkoon

$$m_n := \arg \min \{d(x, x_k) : k = 1, \dots, 2^n\}$$

jossa silloin kun minimi ei ole yksikäsitteinen valitaan pienin indeksi  $1 \leq m_n \leq 2^n$  jolla

$$d(x, x_{m_n}) = \min \{d(x, x_k) : k = 1, \dots, 2^n\}$$

Indeksilla on dyadinen esitys

$$m_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} y_\ell^{(n)} 2^\ell$$

jossa  $y^{(n)} = (y_0^{(n)}, \dots, y_{n-1}^{(n)}) \in \{0, 1\}^n$ . Jokainen piste  $x \in S$  kuvautuu binaarijonoon

$$\eta = (y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, y_0^{(3)}, y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \dots)$$

joka vastaa lukua  $\Psi(x) \in [0, 1]$ . Binaarijonon  $\eta$  informaation perusteella saadaan takaisin indeksijono  $\{m_n\}$  ja piste  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_n}$ . Jää osoitettavaksi (harjoitustettava) että sekä  $\Psi$  että sen käänteiskuvaus ovat mitallisia.

## 10.5 Ehdollisen odotusarvon laskenta riippumattomuuden nojalla

**Lause 10.5.1.** Todennäköisyysavaruudella  $(\Omega, \mathcal{F})$ , olkoon  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  ali  $\sigma$ -algebra,  $Y(\omega)$   $\mathcal{G}$ -mitallinen satunnaismuuttuja, joka saa arvot mitallisessa avaruudessa  $(S, \mathcal{S})$ , ja olkoon  $X(\omega) \in (\tilde{S}, \tilde{\mathcal{S}})$  riippumaton  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -algebrasta.

Olkoon  $f : (\tilde{S} \times S) \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitettu ja Borel-mitallinen kuvaus.

Silloin ehdollisella odotusarvolla on integraali-esitys

$$E_P(f(X, Y)|\mathcal{G})(\omega) = E_P(f(X, y)) \Big|_{y=Y(\omega)} = \int_{\tilde{S}} f(x, Y(\omega)) P_X(dx) \quad (10.5.1)$$

jossa  $P_X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ .

Tod. Olkoon

$V := \{f : (\tilde{S} \times S) \rightarrow \mathbb{R} \text{ Borel mitalliset ja rajoitetut funktiot joille pätee 10.5.1}\}$

Osoitamme ensi että  $V$  on monotoninen luokka. Ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa 10.5.1 on voimassa funktiolle  $f(x, y)$  jos ja vain jos  $\forall G \in \mathcal{G}$

$$E_P(f(X, Y)\mathbf{1}_G) = \int_{\Omega} \left\{ \int_{\tilde{S}} f(x, Y(\omega)) P_X(dx) \right\} \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega)$$

Selvästi  $V$  on vektori avaruus koska odotusarvo on lineaarinen. Jos  $\{f_n(x, y) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$  ja  $0 \leq f_n(x, y) \uparrow f(x, y)$  jossa  $f(x, y)$  on rajoitettu, seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta että  $f(x, y) \in V$ .

Monotonisen luokan lauseesta seuraa että jos  $\mathcal{I} \subseteq V$  on  $\pi$ -luokka,  $V$  sisältää kaikki rajoitettu  $\sigma(\mathcal{I})$  mitalliset funktiot. Väite on osoitettu kun näytämme että 10.5.1 pätee funktiolle  $f(x, y) = \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_D(y) : \forall G \in \mathcal{G}$  riippumattomuudesta seuraa

$$\begin{aligned} E_P(\mathbf{1}_B(X)\mathbf{1}_D(Y)\mathbf{1}_G) &= P_X(B)P(\{Y \in D\} \cap G) \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{1}_B(X(\tilde{\omega})) P(d\tilde{\omega}) \right\} \mathbf{1}_D(Y(\omega)) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{1}_B(X(\tilde{\omega})) \mathbf{1}_D(Y(\omega)) P(d\tilde{\omega}) \right\} \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} f(X(\tilde{\omega}), Y(\omega)) P(d\tilde{\omega}) \right\} \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) \end{aligned}$$

joka tarkoittaa  $\mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_D(y) \in V \square$

## 10.6 Ehdollisen odotusarvon laskenta mitan-vaihdon avulla: Bayesin kaava

**Lemma 10.6.1.** *Ehdollinen odotusarvon on itse-adjungoitu operaattori, eli kun  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  on ali  $\sigma$ -algebra,  $\forall A \in \mathcal{F}$*

$$E_P(X E_P(\mathbf{1}_A|\mathcal{G})) = E_P(E_P(X|\mathcal{G}) E_P(\mathbf{1}_A|\mathcal{G})) = E_P(E_P(X|\mathcal{G}) \mathbf{1}_A)$$

Tod. Suoraan ehdollisen odotusarvon ominaisuuksista.

Olemme esittäneet kaksi tapausta jossa osaamme laskea ehdollisia odotusarvoja: silloin kun  $\sigma$ -algebralla  $\mathcal{G}$  on numeroituva määrä atomeja, ja riippumattomuuden nojalla lauseessa 10.5.1.

Yleisemmin voidaan joskus paluuttaa ehdollisen odotusarvon laskeminen lauseen 10.5.1 tilanteeseen mitan-vaihdon avulla. Ensin esitämme mitanvaihtokaavan ehdolliselle odotusarvolle:

**Teorema 10.6.1.** *(Abstrakti Bayesin kaava). Todennäköisyysavaruudella  $(\Omega, \mathcal{F})$ , olkoon  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  ja  $P \stackrel{\mathcal{F}}{\ll} Q$  todennäköisyysmitat joilla  $Q(A) = 0 \implies P(A) = 0$  kun  $A \in \mathcal{F}$ .*

*Radon-Nikodym lauseesta seuraa että on olemassa Radon-Nikodym derivaatta eli satunnaismuuttuja*

$$0 \leq Z(\omega) := \frac{dP}{dQ}(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$$

*jolle odotusarvon mitanvaihtokaava on voimassa:*

$$E_P(X) = E_Q(XZ) \quad \forall X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

*Silloin ehdolliselle odotusarvolle pätee Bayesin kaava:*

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = \frac{E_Q(XZ|\mathcal{G})(\omega)}{E_Q(Z|\mathcal{G})(\omega)} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P) \quad (10.6.1)$$

**Huomautus 10.6.1.** Olkoon

$$N = \{ \omega : E_Q(Z|\mathcal{G})(\omega) = 0 \}$$

$N \in \mathcal{G}$  koska  $E_Q(Z|\mathcal{G})$  on  $\mathcal{G}$ -mitallinen, mitan vaihto kaavasta ja ehdollisen odotusarvon määritelmästä

$$P(N) = E_Q(Z\mathbf{1}_N) = E_Q\left(E_Q(Z|\mathcal{G})\mathbf{1}_N\right) = E_Q\left(E_Q(Z|\mathcal{G})\mathbf{1}_{\{E_Q(Z|\mathcal{G})=0\}}\right) = 0$$

Seuraa että  $P$ -melkein varmasti (mutta ei välttämättä  $Q$ -melkein varmasti)  $E_P(Z|\mathcal{G})(\omega) > 0$ , ja yhtälön (10.6.1) vasen puoli on hyvin määritelty.

Tod. Olkoon  $G \in \mathcal{G}$ . Mitanvaihto kaavasta odotusarvolle ja ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa

$$\begin{aligned} E_P(X\mathbf{1}_G) &= E_Q(ZX\mathbf{1}_G) = E_Q(E_Q(ZX\mathbf{1}_G|\mathcal{G})) = E_Q(E_Q(ZX|\mathcal{G})\mathbf{1}_G) \\ &= E_Q\left(\frac{E_Q(Z|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}E_Q(ZX|\mathcal{G})\mathbf{1}_G\right) = E_Q\left(Z\frac{E_Q(ZX|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}\mathbf{1}_G\right) = E_P\left(\frac{E_Q(ZX|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}\mathbf{1}_G\right) \quad \square \end{aligned}$$

**Esimerkki 10.6.1.** (Perinteinen Bayesin kaava) Todennäköisyysvaruudella  $(\Omega, \mathcal{F})$ , olkoon ja  $X(\omega) \in \mathbb{R}^d, Y(\omega) \in \mathbb{R}^m$  satunnaismuuttujia joilla  $\mathcal{F} = \sigma(X, Y)$ ,  $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ .

Olkoon  $P \stackrel{\mathcal{F}}{\ll} Q$  todennäköisyysmitat joilla  $X \perp\!\!\!\perp Y$  ja olkoon

$$0 \leq Z(\omega) := z(X(\omega), Y(\omega)) = \frac{dP}{dQ}(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$$

jollakin Borel-mitallisilla funktiolla  $z(x, y) \geq 0$ . Olkoon  $f(x, y)$  rajoitettu Borel-mitallinen kuvaus. Bayesin kaavasta

$$\begin{aligned} E_P(f(X, Y)|\mathcal{G})(\omega) &= \frac{E_Q(f(X, Y)Z|\mathcal{G})(\omega)}{E_Q(Z|\mathcal{G})(\omega)} \\ &= \frac{\int_{\Omega} f(X(\tilde{\omega}), Y(\omega)) z(X(\tilde{\omega}), Y(\omega)) P(d\tilde{\omega})}{\int_{\Omega} z(X(\tilde{\omega}), Y(\omega)) P(d\tilde{\omega})} \\ &= \int_{\Omega} f(X(\tilde{\omega}), Y(\omega)) K(\omega, d\tilde{\omega}) \quad \text{jossa} \\ K(\omega, d\tilde{\omega}) &= \frac{z(X(\tilde{\omega}), Y(\omega))}{\int_{\Omega} z(X(\omega'), Y(\omega)) P(d\omega')} P(d\tilde{\omega}) \end{aligned}$$

on ehdollisen todennäköisyyden ydin. Voidaan myös integroida suoraan  $\mathbb{R}^d$  avaruudessa jossa  $X(\omega)$  saa arvoja:

$$E_P(f(X, Y)|\mathcal{G})(\omega) = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} f(x, Y(\omega))z(x, Y(\omega))P_X(dx)}{\int_{\mathbb{R}^d} z(x, Y(\omega))P_X(dx)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, Y(\omega))k(Y(\omega), dx)$$

jossa

$$k(y, dx) = \frac{z(x, y)}{\int_{\mathbb{R}^d} z(x', y)P_X(dx')}P_X(dx)$$

Kun satunnaisvektorin  $(X, Y)$  jakaumalla on tiheysfunktio  $(d + m)$ -ulotteisen Lebesgue mitan suhteen, siis  $P(X \in dx, Y \in dy) = p_{X,Y}(x, y)dxdy$ , Fubini lauseesta seuraa että silloin myös marginaalijakaumilla  $P_X$  ja  $P_Y$  ovat tiheydet,

$$P(X \in dx) = p_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} p_{X,Y}(x, y)dy$$

$$P(Y \in dy) = p_Y(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} p_{X,Y}(x, y)dx$$

ja voidaan valita todennäköisyysavaruudeksi  $\Omega = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$  todennäköisyysmitoilla

$$Q_{X,Y}(dx, dy) := (P_X \otimes P_Y)(dx, dy) = p_X(x)p_Y(y)dxdy, \quad P_{X,Y}(dx, dy) = p_{X,Y}(x, y)dxdy$$

Oletuksesta  $P_{X,Y} \ll (P_X \otimes P_Y)$ , seuraa että Radon Nykodim derivaatta on

$$\frac{dP_{X,Y}}{dQ_{X,Y}}(x, y) = \frac{dP_{X,Y}}{d(P_X \otimes P_Y)}(x, y) = z(x, y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)p_Y(y)}$$

Voidaan silloin kirjoittaa ehdollisen todennäköisyyden ytimen tiheysfunktioiden avulla

$$k(y, dx) = \frac{z(x, y)}{\int_{\mathbb{R}^d} z(x', y)P_X(dx')}P_X(dx) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}dx = p_{X|Y}(x|y)dx$$

jossa viimeinen yhtälö on ehdollisen tiheysfunktion määritelmä. Perinteinen Bayesin kaava on

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{p_X(x)p_{Y|X}(y|x)}{p_Y(y)}.$$

### 10.6.1 Ehdollisen odotusarvon laskenta tuloavaruudessa

Olkoon  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  todennäköisyyskolmikko ja  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ .

Tuloavaruudessa  $(\Omega \times \Omega)$  varustettuna tulo  $\sigma$ -algebralla  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$  määritellään Dynkinin laajennuslauseen kautta todennäköisyysmitta  $\mathbb{P}$  jolla

$$\mathbb{P}(H \times G) = P(H \cap G) \quad \forall H \in \mathcal{H}, G \in \mathcal{G}$$

**Lause 10.6.1.** *Olkoon  $X(\omega, \omega') \in L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{P})$ .*

*Silloin*

$$\iint_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega') \mathbb{P}(d\omega \times d\omega') = \int_{\Omega} X(\omega, \omega) P(d\omega) \quad (10.6.2)$$

Tod. Kun  $X(\omega, \omega') = \mathbf{1}_H(\omega) \mathbf{1}_G(\omega')$  jossa  $H \in \mathcal{H}$  ja  $G \in \mathcal{G}$ , väite seuraa suoraan  $\mathbb{P}$ :n määritelmästä. Olkoon

$V := \{X(\omega, \omega') : \text{rajoitetut ja } \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}\text{-mitalliset s.m. joilla (10.6.2) on voimassa} \}$

Selvästi  $V$  on vektori avaruus, ja monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa että  $V$  on monotoninen luokka. Koska  $V$  sisältää satunnaismuuttujat  $\mathbf{1}_H(\omega) \mathbf{1}_G(\omega')$  jossa  $H \in \mathcal{H}$  ja  $G \in \mathcal{G}$ , monotonisen luokan lauseesta seuraa sisältää myös kaikki rajoitetut  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$ -mitalliset satunnaismuuttujat.

Yleisemmin kun  $X$  on ei-rajoitettu ja  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$ -mitallinen voidaan ensin hajottaa  $X = (X^+ - X^-) \in L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, P^{\otimes 2})$  satunnais-muuttujien jonolla  $X_n = (X^+ \wedge n) - (X^- \wedge n)$ , ja käyttää monotonisen konvergenssin lausetta erikseen positiivisille ja negatiivisille puolille  $\square$

**Esimerkki 10.6.2.** *Olkoon  $\xi(\omega), \eta(\omega) \in \mathbb{R}$  satunnaismuuttujat  $\mathcal{H} = \sigma(\xi), \mathcal{G} = \sigma(\eta)$ . Jos  $X(\omega, \omega') \geq 0$  on  $\sigma(\xi) \otimes \sigma(\eta)$ -mitallinen, on olemassa Borel-mitallinen kuvaus  $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  jolla  $X(\omega, \omega') = f(\xi(\omega), \eta(\omega'))$ . Silloin*

$$\int_{\Omega} f(\xi(\omega), \eta(\omega)) P(d\omega) = \iint_{\Omega \times \Omega} f(\xi(\omega), \eta(\omega')) \mathbb{P}(d\omega, d\omega')$$

Oletamme nyt että  $\sigma$ -algebrat  $\mathcal{H}$  ja  $\mathcal{G}$  ovat  $P$ -riippumattomia eli

$$P(H \cap G) = P(H)P(G) \text{ kun } H \in \mathcal{H} \text{ ja } G \in \mathcal{G}$$

Silloin  $\mathbb{P} = P \otimes P = P^{\otimes 2}$  eli

$$\mathbb{P}(H \times G) = P(H \cap G) = P(H)P(G) \quad \forall H \in \mathcal{H}, G \in \mathcal{G}$$

Tästä esityksestä seuraa suoraan että kun  $G \in \mathcal{G}$ ,  $X(\omega, \omega) = f(\xi(\omega), \eta(\omega))$ ,

$$\begin{aligned} E_P(X \mathbf{1}_G) &= \int_{\Omega} X(\omega, \omega) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) = \iint_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega') \mathbf{1}_G(\omega') P^{\otimes 2}(d\omega, d\omega') \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} X(\omega, \omega') P(d\omega) \right\} \mathbf{1}_G(\omega') P(d\omega') \end{aligned}$$

ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega') = \int_{\Omega} X(\omega, \omega') P(d\omega)$$

joka vastaa kaavan (10.5.1)

Yleisemmin, kun  $\sigma$ -algebrat  $\mathcal{H}$  ja  $\mathcal{G}$  eivät ole riippumattomia  $P$ -mitan suhteen, oletamme että  $\mathbb{P} \ll P^{\otimes 2}$  tulo  $\sigma$ -algebrassa  $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{G})$ , eli  $\mathbb{P}(C) = 0$  kun  $C \in (\mathcal{H} \otimes \mathcal{G})$  ja  $P^{\otimes 2}(C) = 0$ .

Seuraa Radon-Nikodymin lauseesta että on olemassa  $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{G})$ -mitallinen Radon-Nikodymin derivaatta

$$0 \leq Z(\omega, \omega') := \frac{d\mathbb{P}}{dP^{\otimes 2}}(\omega, \omega') \in L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, P^{\otimes 2})$$

jolla mitan vaihdon kaava on voimassa kaikille  $X \in L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{P})$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} X(\omega, \omega) P(d\omega) &= \iint_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega') \mathbb{P}(d\omega, d\omega') = \iint_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega') Z(\omega, \omega') P^{\otimes 2}(d\omega, d\omega') = \\ &= \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} X(\omega, \omega') Z(\omega, \omega') P(d\omega) \right) P(d\omega') \end{aligned}$$

Kun  $G \in \mathcal{G}$  saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} X(\omega, \omega) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) &= \\ \iint_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega') \mathbf{1}_G(\omega') \mathbb{P}(d\omega, d\omega') &= \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} X(\omega, \omega') Z(\omega, \omega') P(d\omega) \right) \mathbf{1}_G(\omega') P(d\omega') = \\ \int_{\Omega} Y(\omega') \mathbf{1}_G(\omega') P(d\omega'), \end{aligned}$$

jossa

$$Y(\omega') = \int_{\Omega} X(\omega, \omega') Z(\omega, \omega') P(d\omega)$$

on  $\mathcal{G}$ -mitallinen,

$$\begin{aligned} &= \iint_{\Omega \times \Omega} Z(\omega, \omega') Y(\omega') \mathbf{1}_G(\omega') P^{\otimes 2}(d\omega \times d\omega') = \iint_{\Omega \times \Omega} Y(\omega') \mathbf{1}_G(\omega') \mathbb{P}(d\omega, d\omega') \\ &= \int_{\Omega} Y(\omega') \mathbf{1}_G(\omega') P(d\omega') \end{aligned}$$

Kolmogorovin ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa  $Y(\omega') = E_P(X|\mathcal{G})(\omega')$ .

Huomataan myös että

$$K(\omega, d\omega') := Z(\omega, \omega') P(d\omega')$$

on ehdollisen todennäköisyyden ydin:  $\forall A \in \mathcal{H}$ , kuvaus

$$\omega \mapsto K(\omega, A) := \int_A Z(\omega, \omega') P(d\omega')$$

on  $\mathcal{G}$ -mitallinen, ja  $\int_{\Omega} Z(\omega, \omega') P(d\omega) \equiv 1$  koska

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega \times G) &= P(\Omega \cap G) = P(G) = P(\Omega)P(G) = P^{\otimes 2}(\Omega \times G) \quad \forall G \in \mathcal{G} \\ \iff P(G) &= \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} Z(\omega, \omega') P(d\omega) \right) \mathbf{1}_G(\omega') P(d\omega') \quad \forall G \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

Samoin,  $\int_{\Omega} Z(\omega, \omega') P(d\omega') \equiv 1$ .

**Huomautus 10.6.2.** Tässä kappaleessa yleistettiin lause 10.5.1 ja esimerkki 10.6.1 tilanteeseen jossa  $\mathcal{H}$  ja  $\mathcal{G}$  ovat yleisiä ali- $\sigma$ -algebrat eikä välttämättä satunnaisvektoreiden virittämiä.

## 10.7 Ehdollistaminen nollamittaisiin tapahtumiin: varoitus

Olkoon  $X(\omega), Y(\omega)$  riippumattomia standardi gaussisia satunnaismuuttujia,

$E_P(X) = E_P(Y) = 0$ ,  $E_P(X^2) = E_P(Y^2) = 1$ . Olkoon

$$W(\omega) = (X(\omega) - Y(\omega)), \quad Z(\omega) = \mathbf{1}(Y(\omega) \neq 0) \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}$$

Olkoon  $N = \{\omega : Y(\omega) = 0\}$ .

Selvästi  $P(N) = 0$  ja

$$N^c \cap \{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\} = N^c \cap \{\omega : W(\omega) = 0\} = N^c \cap \{\omega : Z(\omega) = 1\}$$

Olkoon  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitettu Borel mitallinen kuvaus.

$$i) \quad E_P(f(X)|\{X = Y\}) = \frac{\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x) \delta_0(x - y) p_X(x) p_Y(y) dx dy}{\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \delta_0(x - y) p_X(x) p_Y(y) dx dy}$$

$$ii) \quad E_P(f(X)|W = 0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) p_{X|W}(x|0) dx$$

$$iii) \quad E_P(f(X)|Z = 1) = \int_{\mathbb{R}} f(x) p_{X|Z}(x|1) dx$$

eivät ole valttämättä samasuuruisia, vaikka

$$\begin{aligned} \{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\} \cap \{\omega : Y(\omega) \neq 0\} &= \{\omega : W(\omega) = 0\} \cap \{\omega : Y(\omega) \neq 0\} \\ &= \{\omega : Z(\omega) = 1\} \cap \{\omega : Y(\omega) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Näytämme että  $i) = ii) \neq iii)$ .

$i)$  Perustuu tulkintaan

$$\begin{aligned} E_P(f(X)|\{X = Y\}) &:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_P(f(X)|\{|X - Y| < \varepsilon\}) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{E_P(f(X) \mathbf{1}\{|X - Y| < \varepsilon\})}{P(|X - Y| < \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y) dy \right) f(x) p_X(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y) dy \right) p_X(x) dx} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( (2\varepsilon)^{-1} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y) dy \right) f(x) p_X(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( (2\varepsilon)^{-1} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y) dy \right) p_X(x) dx} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x) p_Y(x) p_X(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} p_Y(x) p_X(x) dx} = \frac{\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x) \delta_0(x - y) p_X(x) p_Y(y) dx dy}{\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \delta_0(x - y) p_X(x) p_Y(y) dx dy} \end{aligned}$$

Tässä  $\delta_0$  on Diracin delta distribuutio jolla on ominaisuus

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\delta_0(x)dx = g(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)F(dx)$$

kaikille jatkuville funktioille  $g$ , ja  $F(x) = \mathbf{1}(x \geq 0)$ . Diracin  $\delta$  on porraskfunktion  $F$ :n derivaatta distribution mielessä.

Lasketaan:

$$i) \quad \frac{\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x)\delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dx dy}{\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dx dy} = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)p_X(x)p_Y(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} p_X(x)p_Y(x)dx} = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx$$

ii) Bayesin kaavasta

$$p_{X|W}(x, w) = \frac{p_X(x)p_{W|X}(x, w)}{p_W(w)} = \frac{p_X(x)p_{W|X}(x, w)}{p_W(w)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(w-x)^2\right) \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4}w^2\right)\right)^{-1}$$

koska  $p_{W|X}(w|x) = p_Y(w-x)$  ja  $W$  on gaussinen ja  $E(W) = E(X) - E(Y) = 0$ ,  $E(W^2) = E(X^2) + E(Y^2)$ , siis

$$p_{W|X}(w|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(w-x)^2}{2}\right)$$

joka on gaussisen jakauman  $\mathcal{N}(x, 1)$  tiheysfunktio.

Tästä seuraa

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)p_{X|W}(x|0)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx$$

joka täsmää i) arvon kanssa.

Kuitenkin

$$p_{Z|X}(z|x) = p_Y(x/z) \left| \frac{dy}{dz} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2z^2}\right) \frac{|x|}{z^2}$$

muuttujan vaihdolla  $z = x/y$ , ja

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} p_{Z|X}(z|x)p_X(x)dx = \frac{1}{z^2 2\pi} \int_{\mathbb{R}} |x| \exp\left(-\frac{x^2}{2}(1+z^{-2})\right) dx \\ &= \frac{1}{z^2 2\pi} 2 \int_0^{\infty} r^{1/2} \exp\left(-\frac{r}{2}(1+z^{-2})\right) \frac{r^{-1/2}}{2} dr \\ &= \frac{1}{z^2 2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r}{2}(1+z^{-2})\right) dr = \frac{1}{z^2 2\pi} \frac{2}{(1+z^{-2})} = \frac{1}{(1+z^2)\pi} \end{aligned}$$

muuttujan vaihdolla  $r = x^2$ . Tämän jakauman nimi on Student-t vapausasteella 1.

Tästä seuraa Bayesin kaavalla

$$\begin{aligned} p_{X|Z}(x|z) &= \frac{p_X(x)p_{Z|X}(x|z)}{p_Z(z)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2z^2}\right) \frac{|x|}{z^2}}{(1+z^2)^{-1}\pi^{-1}} \\ &= \frac{(1+z^2)|x|}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}(1+z^{-2})\right) \end{aligned}$$

Kun  $z = 1$  saadaan  $p_{X|Z}(x|1) = |x| \exp(-x^2)$  ja

$$E_P(f(X)|Z = 1) = \int_{\mathbb{R}} f(x)p_{X|Z}(x|1)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)|x| \exp(-x^2)dx$$

joka on eri kuin integraalien i) ii) arvo.

Nolla-mittaisilla tapahtumilla voi olla eri esityksiä eri satunnaismuuttujien avulla, ja vastaavien ehdollisten odotusarvojen pistettäiset arvot saattaavat olla eriläisiä. Tämä ei ole ristiriidassa todennäköisyysteorian kanssa koska aina voidaan vaihtaa ehdollisen odotusarvon arvot pistettäin nolla mittaisissa joukoissa.

# Luku 11

## Martingaalit

**Määritelmä 11.0.1.** Olkoon  $(\Omega, \mathcal{F})$  todennäköisyysavaruus, ja  $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+, \dots$  aikaindeksien joukko.

Filtraatio  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T})$  on  $\sigma$ -algebroiden kokoelma, joka on ajan suhteen ei-vähenevä:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall 0 \leq s \leq t$$

**Määritelmä 11.0.2.** Stokastinen prosessi  $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$  on sopiva (tai adaptoitu) filtraation  $\mathbb{F}$ :n suhteen, kun  $X_t(\omega)$  on  $\mathcal{F}_t$ -mitallinen  $\forall t \in \mathbb{T}$ .

**Määritelmä 11.0.3.** Diskreetti ajassa, eli kun  $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$ , stokastinen prosessi  $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$  on ennustettava filtraation  $\mathbb{F}$ :n suhteen, kun  $X_t(\omega)$  on  $\mathcal{F}_{t-1}$ -mitallinen  $\forall t \in \mathbb{T}$ .

**Määritelmä 11.0.4.** Sanotaan että stokastinen prosessi  $X = (X_t : t \in \mathbb{T})$  on (ali,yli)-martingaali filtraation  $\mathbb{F}$ :n suhteen kun

1.  $(X_t)$  on  $\mathbb{F}$ -sopiva
2.  $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P) \forall t \in \mathbb{T}$ ,
- 3.

$$E_P(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s \quad \forall s \leq t,$$

vastaavasti  $\leq$  ylimartingaalin tapauksessa ja  $\geq$  alimartingaalin tapauksessa.

Huomataan että martingaalin ominaisuus riippuu sekä todennäköisyysmitasta että filtraatiosta. Ylimartingaali on ajan-suhteen "keskimäärin" ei-kasvava, alimartingaali on "keskimäärin" ei-vähenevä, martingaali on sekä ylimartingaali että alimartingaali.

**Lemma 11.0.1.** *Diskreetti ajassa ( $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$ ), määritelmässä 11.0.4 ominaisuus (3) seuraa kaikille  $s \leq t$  kun*

$$E_P(M_t | \mathcal{F}_{t-1}) = M_{t-1} \quad \forall t$$

**Tod.** Induktiolla, kun  $t = s$ ,

$$E_P(M_t | \mathcal{F}_s) = E_P(M_s | \mathcal{F}_s) = M_s$$

Muuten voidaan käyttää induktiota  $r = (t - s)$ :n suhteen, olettamalla että lemma on voimassa kaikille arvoille  $t, s$  joilla  $(t - s) < r$ , kun  $(t - s) = r$  seuraa

$$\begin{aligned} E_P(M_t | \mathcal{F}_s) &= E_P(E_P(M_t | \mathcal{F}_{s+1}) | \mathcal{F}_s) \\ &= E_P(M_{s+1} | \mathcal{F}_s) = M_s \end{aligned}$$

Samoin voidaan tarkistaa myös ali- ja yli- martingaalin epäyhtälöitä.

**Esimerkki 11.0.1.** *Olkoon  $(X_t : t \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$  riippumattomien satunnaismuuttujien jono jolla  $E(X_t) = \mu \in \mathbb{R}$ , ja olkoon  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_t)$   $S_t = (X_1 + \dots + X_t)$  on  $\mathbb{F}$ -alimartingaali kun  $\mu > 0$ , ja  $\mathbb{F}$ -ylimartingaali kun  $\mu < 0$ , ja  $\mathbb{F}$ -martingaali kun  $\mu = 0$ .*

**Esimerkki 11.0.2.** *Olkoon  $(X_t : t \in \mathbb{N})$  riippumattomien satunnaismuuttujien jono jolla  $X_t(\omega) \geq 0$   $P$ -m.v. ja  $E(X_t) = \mu \in [0, +\infty)$ , ja olkoon  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_t)$*

*Silloin tuloprosessi  $M_t = (X_1 X_2 \dots X_t)$  on  $\mathbb{F}$ -alimartingaali kun  $\mu > 1$ , ja  $\mathbb{F}$ -ylimartingaali kun  $\mu < 1$ , ja  $\mathbb{F}$ -martingaali kun  $\mu = 1$ .*

**Esimerkki 11.0.3.** *Olkoon  $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$   $t \in \mathbb{N}$ , diskreetti aikainen Markovin ketju alkujakaumalla  $\pi(dx)$  ja siirtymäytimellä  $K(x, dy)$ .*

*Olkoon  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_t)$ .*

Määritellään operaattori

$$(Kf)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)K(y, dx) = E_x(f(X_1)) = E_P(f(X_t)|X_{t-1} = x)$$

Osoita että

$$M_t(f) = \sum_{s=1}^t (f(X_s) - (Kf)(X_{s-1}))$$

on  $\mathbb{F}$ -martingaali kun  $f(x)$  on rajoitettu ja Borel mitallinen.

Teleskoppisen summan esityksestä,

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{s=1}^t (f(X_s) - f(X_{s-1})) = \\ &= f(X_0) + \sum_{s=1}^t (f(X_s) - Kf(X_{s-1})) + \sum_{s=1}^t ((Kf)(X_{s-1}) - f(X_{s-1})) \\ &= f(X_0) + M_t(f) + A_t(f) \end{aligned}$$

saadaan Doobin hajotelma jossa  $A_t(f)$  on ennustettava prosessi

**Lause 11.0.1.** Olkoon  $(X_t)$  martingaali ja  $(Y_t)$  ennustettava prosessi filtraation  $(\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$  suhteen.

Määritellään martingaalimuunnos tai aika-diskreetti stokastinen integraali

$$M_t = \sum_{s=1}^t Y_s(X_s - X_{s-1}) = \sum_{s=1}^t Y_s \Delta X_s$$

Kun  $E(|Y_s \Delta M_s|) < \infty \forall s \in \mathbb{N}$ ,  $(M_t)$  on martingaali.

**Tod.** Määritelmästä seuraa että  $M_t$  on  $\mathbb{F}$ -sopiva ja integroituvuus ehto seuraa kolmio epäyhtälöstä. Tarkistamme että martingaali-ominaisuus on voimassa:

$$E_P(M_t - M_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) = E_P(Y_t(X_t - X_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}) = Y_t E_P(X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$$

jossa käytettiin integrandin  $(Y_t)$ :n  $\mathbb{F}$ -ennustettavuutta.

Integroituvuus voidaan tarkistaa Hölderin epäyhtälöllä

$$E(|Y_s \Delta M_s|) \leq \|Y_s\|_{L_p} \|\Delta M_s\|_{L_q}$$

kun  $p, q \in [1, +\infty]$  ovat konjugaatti-eksponentteja joilla  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ .

**Vedonlyönti-tulkinta** Oletamme että hetkellä  $(t - 1)$  on mahdollisuus ostaa tai myydä arpajaisia hinnalla  $X_{t-1}$ . Hetkellä  $t$  arpajaisen arvo on  $X_t$ , satunnaisvoittolla  $\Delta X_t = (X_t - X_{t-1})$  (negatiivinen voitto tulkitaan on tappioksi). Tässä  $Y_t(\omega)$  on vedonlyönti strategia, ennustettava siinä mielessä että on  $\mathcal{F}_{t-1}$ -mitallinen kun  $\Delta X_t$  on  $\mathcal{F}_t$ -mitallinen, siis kun lyödään vetoa ei tiedetä mitä tapahtuu seuraavaksi.  $M_t$  on pelaajan pääoma ja

$$M_t - M_0 = \sum_{s=1}^t Y_s \Delta X_s$$

on pelaajan voitto. Reilussa pelissa  $E_P(\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$  ja arpajaisen arvoprosessi on martingaali. Lause 11.0.1 kertoo että niin kauan kun integroituvuus-ehdot ovat voimassa ja pelistrategia on ennustettava, pelaajan voitto-prosessi on martingaali. Kun  $X_t$  on ylimartingaali (kuten roulette-pelissä), ja ennustettava pelistrategia on rajoitettu ja ei-negatiivinen, voittoprosessi on edelleen ylimartingaali.

**Määritelmä 11.0.5.** *Satunnais-hetki  $\tau(\omega) \in \mathbb{T} = \mathbb{N}$  on  $(\mathcal{F}_t)$ -pysähdyshetki kun*

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

Jokaisella ajanhetkellä  $t \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma$ -algebran  $\mathcal{F}_t$  sisältämän informaation perusteella voidaan päättää onko  $\tau(\omega)$  tapahtunut jo, vai se tapahtuu vasta tulevaisuudessa.

Satunnais hetki  $\tau(\omega)$  on pysähdyshetki jos ja vain jos laskuri prosessi  $N_t(\omega) = \mathbf{1}(\tau(\omega) \leq t)$  on  $(\mathcal{F}_t)$ -sopiva.

**Tehtävä 11.0.1.** *Jos  $\tau(\omega)$  ja  $\sigma(\omega)$  ovat  $(\mathcal{F}_t)$ -pysähdyshetkiä, siitä seuraa että niiden minimi  $\tau(\omega) \wedge \sigma(\omega)$  ja maksimi  $\tau(\omega) \vee \sigma(\omega)$  ovat myös  $(\mathcal{F}_t)$ -pysähdyshetkiä,*

# Luku 12

## Martingaalien konvergenssi

### 12.1 Doobin Martingaali-konvergenssi lause

Martingaali  $(M_t : t \in \mathbb{N})$  joka on rajoitettu  $L^1(P)$  normissa, suppenee  $P$ -melkein varmasti kun  $t \rightarrow +\infty$ .

**Teoreema 12.1.1.** (Doob) Olkoon  $(X_t : t \in \mathbb{N})$  ylimartingaali jolla  $\sup_{t \in \mathbb{N}} E_P(X_t^-) < \infty$ , (tässä  $x^- = \max(-x, 0)$ ). Silloin

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{N}} E_P(|X_t|) &< \infty \\ \lim_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega) &= X_\infty(\omega) \quad P\text{-m.v.} \end{aligned}$$

jossa  $X_\infty(\omega) \in L^1(\Omega)$

**Huomautus :** vaikka  $X_\infty(\omega) \in L^1(P)$ , kun  $(X_t : t \in \mathbb{N})$  ei ole rajoitettu  $L^1(P)$  normissa,  $L^1(P)$ -konvergenssi ei välttämättä päde.

**Tod.** Koska  $X_t$  on ylimartingaali,  $\forall t \in \mathbb{N}$

$$E(X_t^+) \leq E(X_0) + E(X_t^-)$$

joten

$$\sup_t E(X_t^+) \leq E(X_0) + \sup_t E(X_t^-)$$

jossa  $E(|X_0|) < \infty$ , siksi  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  on rajoitettu  $L^1(P)$  avaruudessa.

Olkoon  $a < b$ , ja määritellään pysähdyshetkien jono

$$\sigma_0(\omega) = \inf\{s \in \mathbb{N} : X_s(\omega) < a\}$$

(ensimmäinen  $a$  tason alituksen hetki)

$$\tau_i(\omega) = \inf\{s > \sigma_i(\omega) : X_s(\omega) \geq b\},$$

$$\sigma_i(\omega) = \inf\{s > \tau_{i-1}(\omega) : X_s(\omega) < a\}, \quad i \geq 1$$

joilla  $0 \leq \sigma_i < \tau_i < \sigma_{i+1} < \dots$ . Nämä ovat pysähdyshetkiä, koska  $\forall t \in \mathbb{N}$  tapahtumat

$$\{\omega : \sigma_i(\omega) \leq t\} \quad \text{ja} \quad \{\omega : \tau_i(\omega) \leq t\}$$

riippuvat ainoastaan prosessin polusta  $(X_1(\omega), \dots, X_t(\omega))$ , ja siksi ovat  $\mathcal{F}_t$ -mitallisia.

Määritellään sijoitusstrategia

$$C_t(\omega) = \begin{cases} 1 & t \in (\sigma_i, \tau_i] \text{ jollekin } i \in \mathbb{N} \\ 0 & t \in (\tau_i, \sigma_{i+1}] \end{cases}$$

Koska  $\tau_i$  ja  $\sigma_i$  ovat pysähdyshetkiä, kaikille  $t \in \mathbb{N}$

$$\{C_t = 1\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{t \in (\sigma_i, \tau_i]\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\sigma_i \leq (t-1)\} \cap \{\tau_i \leq (t-1)\}^c \in \mathcal{F}_{t-1}$$

Koska  $C_t(\omega) \in \{0, 1\}$  on ei-negatiivinen ja rajoitettu ennustettava prosessi, seuraa että martingaali muunnos

$$Y_t(\omega) = \sum_{s=1}^t C_s(\omega) \Delta X_s$$

on myös ylimartingaali, erityisesti  $E(Y_t) \leq E(Y_0) = 0$ . Olkoon

$$U_{[a,b]}([0, t]) := \#\{i : \tau_i(\omega) \leq t\} =$$

”montako kertaa aikavälissä  $[0, t]$ , prosessi  $X$  on ylittänyt  $b$ -tasoa aloittamalla  $a$ -tason alapuolelta”.

Ennustettavalla sijoitustrategialla  $C_t$ , jokaisesta tason  $[a, b]$  välin ylityksestä alhaalta ylöspäin kertyy sijoittajalle vähintään  $(b-a) > 0$  verran voittoa, ja viimeisen ylityksen jälkeen on kertynyt korkeintaan  $(X_t - a)^-$  tappiota. Koska

$$Y_t \geq (b-a)U_{[a,b]}([0, t]) - (X_t - a)^-$$

ja koska  $E(Y_t) \leq E(Y_0) = 0$ , seuraa Doobin ylitysten-epäyhtälö (*upcrossing-inequality*)

$$E_P(U_{[a,b]}([0, t])) \leq \frac{1}{(b-a)} E_P((X_t - a)^-)$$

Koska  $U_{[a,b]}([0, t])$  on ei-vähenevä,  $\forall \omega$  on olemassa

$$U_{[a,b]}([0, \infty), \omega) := \lim_{t \rightarrow \infty} U_{[a,b]}([0, t]) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

$$(X_t - a)^- = \max(a - X_t, 0) \leq |a| + X_t^-$$

seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta

$$E_P(U_{[a,b]}([0, \infty))) = \lim_{t \rightarrow \infty} E_P(U_{[a,b]}([0, t])) \leq \frac{1}{(b-a)} \left( |a| + \sup_{t \in \mathbb{N}} E_P(X_t^-) \right) < \infty$$

Erityisesti  $U_{[a,b]}([0, \infty), \omega) < \infty$   $P$ -melkein varmasti.

Olkoon

$$N = \left\{ \omega : \liminf_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega) \not\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega) \right\}$$

$$= \bigcup_{a < b \in \mathbb{Q}} \left\{ \omega : \liminf_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega) \leq a < b \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega) \right\}$$

$$= \bigcup_{a < b \in \mathbb{Q}} \left\{ U_{[a,b]}([0, \infty), \omega) = \infty \right\}$$

on  $P$ -nolla tapahtumien numeroituva yhdiste, joten  $P(N) = 0$ .

Tämä tarkoittaa että  $P$ -melkein varmasti  $(X_t(\omega))_{t \in \mathbb{N}}$  suppenee kohti raja-arvoa  $X_\infty(\omega) := \limsup_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ .

A priori  $X_\infty(\omega) \in [-\infty, \infty]$ , mutta Fatoun lemmasta seuraa

$$E(|X_\infty|) = E(\liminf_t |X_t|) \leq \liminf_t E(|X_t|) \leq \sup_t E(|X_t|) < \infty,$$

siksi  $|X_\infty(\omega)| < \infty$   $P$ -melkein varmasti  $\square$ .

**Seuraus 12.1.1.** Olkoon  $(X_t : t \in \mathbb{N})$  alimartingaali jolla  $E_P(X_t^+) < \infty$ . Silloin,  $P$ -melkein varmasti  $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega) = X_\infty(\omega) \in L^1(P)$ .

**Tod.** Doobin konvergenssi lause soveltuu ylimartingaalille  $(-X_t)$ .

**Seuraus 12.1.2.** Kun  $X_t$  on ei-negatiivinen ylimartingaali, on olemassa  $P$ -melkein varmasti raja-arvo  $X_\infty(\omega) := \lim_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega) \geq 0$  jolla  $E_P(X_\infty | \mathcal{F}_t)(\omega) \leq X_t(\omega) \forall t < \infty$ .

**Tod.** Doobin martingaalikonvergenssilause soveltuu koska  $X_t^-(\omega) \equiv 0$ . Fatou lemmasta ehdolliselle odotusarvolle

$$\begin{aligned} E_P(X_\infty | \mathcal{F}_t) &= E_P(\liminf_u X_u | \mathcal{F}_t) \\ &\leq \liminf_u E_P(X_u | \mathcal{F}_t) \leq X_t \end{aligned}$$

$(X_t)$  on ylimartingaali laajennetulla indeksijoukolla  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$   $\square$

### 12.1.1 Tasaisesti integroituvat martingaalit

**Lause 12.1.1.** Olkoon satunnaismuuttuja  $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Kokoelma

$$\{E_P(X | \mathcal{G})(\omega) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ ali } \sigma\text{-algebra}\}$$

on tasaisesti integroituva.

**Tod.** Koska  $\{X\} \subseteq L^1(P)$  on tasaisesti integroituva,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  jolla  $E_P(|X| \mathbf{1}_A) < \varepsilon$  kun  $P(A) < \delta$ .

Olkoon  $Y(\omega) = E_P(X | \mathcal{G})(\omega)$ , seuraa että  $E_P(|Y|) \leq E_P(|X|) < \infty$

$$KP(|Y| > K) \leq E_P(|Y|) \leq E_P(|X|)$$

josta seuraa  $P(|Y| > K) < \delta$  kun  $K > E_P(|X|)\delta^{-1}$ , ja

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq E_P(|X| \mathbf{1}(|Y| > K)) = E_P(E_P(|X| | \mathcal{G}) \mathbf{1}(|Y| > K)) \\ &\geq E_P(|Y| \mathbf{1}(|Y| > K)) \end{aligned}$$

on voimassa samaan aikaan kaikille ali  $\sigma$ -algebroidille  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ .

**Seuraus 12.1.3.** Olkoon satunnaismuuttuja  $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , ja  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T})$  filtraatio. Silloin

$$M_t(\omega) = E_P(X|\mathcal{F}_t)(\omega) \quad t \in \mathbb{T}$$

on tasaisesti integroitava martingaali.

**Teoreema 12.1.2.** •  $\mathbb{F}$ -martingaali  $(M_t : t \in \mathbb{N})$  on tasaisesti integroitava jos ja vain jos on olemassa satunnaismuuttuja  $M_\infty(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$

jossa  $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_t$  ja

$M_t(\omega) \rightarrow M_\infty(\omega)$   $P$ -melkein varmasti ja  $L^1(P)$  mielessä.

- Kun  $\mathbb{F}$ -martingaali  $(M_t : t \in \mathbb{N})$  on ei-negatiivinen, erityisesti se on ei-negatiivinen ylimartingaali, seuraa lauseesta 12.1.2 että on olemassa  $M_\infty(\omega) \in L^1(P)$  jolla  $M_t(\omega) \rightarrow M_\infty(\omega)$   $P$ -melkein varmasti ja  $E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega) \leq M_t(\omega) \quad \forall t \in \mathbb{N}$ .

Silloin  $(M_t : t \in \mathbb{N})$  on tasaisesti integroitava ja  $M_t(\omega) = E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega)$  jos ja vain jos  $E_P(M_0) = E_P(M_\infty)$ .

**Tod.** Koska  $(M_t : t \in \mathbb{N})$  on rajoitettu  $L^1(P)$ :ssa koska on tasaisesti integroitava ja

$$\sup_t E_P(|M_t|) \leq K + \sup_{t \in \mathbb{N}} E_P(|X_t|\mathbf{1}(|X_t| > K)) < \infty.$$

Doobin martingaali konvergenssi lause soveltuu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_t(\omega) = M_\infty(\omega) \quad P\text{-m.v.}$$

jossa määritellään  $\forall \omega$

$$M_\infty(\omega) := \liminf_{t \rightarrow \infty} M_t(\omega)$$

$L^1(P)$  konvergenssin karakterisaatiosta seuraa että  $M_t \xrightarrow{L^1(P)} M_\infty$ .

Olkoon  $A \in \mathcal{F}_t$ , koska  $(M_t(\omega)\mathbf{1}_A(\omega) : t \in \mathbb{N})$  on tasaisesti integroitava, seuraa kun  $\forall u \geq t$

$$E_P(M_t\mathbf{1}_A) = E_P(M_u\mathbf{1}_A) \rightarrow E_P(M_\infty\mathbf{1}_A) \text{ kun } u \uparrow \infty \quad \forall A \in \mathcal{F}_t$$

joka tarkoittaa  $E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega) = M_t(\omega)$ .

Kun  $(M_t)$  on ei-negatiivinen martingaali, seuraa että

$$M_t - E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t) \geq 0$$

jos

$$0 = E_P(M_t) - E_P(M_\infty) = E_P(M_t - E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t))$$

seuraa että

$$M_t = E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)$$

ja se on tasaisesti integroituva.

**Huomautus**  $(M_t : t \in \mathbb{N})$  on tasaisesti integroituva martingaali, jos ja vain jos  $(M_t)$  on martingaali laajennetussa aikaindeksijoukolla  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ .

**Esimerkki 12.1.1.** Olkoon  $X_t(\omega) \geq 0$  ja  $P$ -riippumattomia, joilla  $E_P(X_t) = 1$   $\forall t \in \mathbb{N}$ . Silloin  $M_t(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega)\dots X_t(\omega)$  on  $\mathbb{F}$ -martingaali jossa  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$ .

Koska  $M_t$  on ei-negatiivinen ylimartingaali, seuraa että  $P$ -melkein varmasti  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t(\omega) = M_\infty(\omega) \in L^1(p)$ , ja  $M_t(\omega) \geq E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega)$ .

Jos  $(M_t : t \in \mathbb{N})$  on tasaisesti integroituva, seuraa  $M_t(\omega) = E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega)$ .

## 12.1.2 Martingaalin takaperäinen konvergenssi

Olkoon  $(\mathcal{F}_t : t \in -\mathbb{N})$  filtraatio. Kun  $-\infty \leq s \leq t \leq 0$

$$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_t \supseteq \mathcal{F}_s \supseteq \mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{t \in -\mathbb{N}} \mathcal{F}_t$$

jossa  $\mathcal{F}_{-\infty}$  on häntä  $\sigma$ -algebra .

**Teoreema 12.1.3.** (Doobin martingaalin takaperäinen konvergenssilause) Olkoon  $(X_t : t \in -\mathbb{N})$  ylimartingaali filtraatiossa  $(\mathcal{F}_t : t \in -\mathbb{N})$ .

Tarkastellaan mitä tapahtuu kun  $t \downarrow (-\infty)$  ja informaatio pienenee.

1.  $P$ -melkein varmasti on olemassa raja-arvo

$$X_{-\infty}(\omega) = \lim_{t \rightarrow -\infty} X_t(\omega) \in [-\infty, \infty)$$

2. Kun

$$\sup_{t \leq 0} E(X_t^+) < +\infty$$

seuraa että  $X_{-\infty}(\omega) \in L^1(P)$ .

3. Kun  $(X_t : t \in -\mathbb{N})$  on martingaali, koska  $X_t = E_P(X_0 | \mathcal{F}_t) \forall t \in -\mathbb{N}$  se on tasaisesti integroitava ja

$$X_{-\infty}(\omega) = E(X_0 | \mathcal{F}_{-\infty})(\omega)$$

eli martingaalin ominaisuus on voimassa laajennetussa aika-indeksi joukossa  $\{-\infty\} \cup \mathbb{Z}$ , ja  $\lim_{t \rightarrow -\infty} X_t = X_{-\infty}$  myös  $L^1(P)$  konvergenssin mielessä.

**Tod.** Olkoon  $U_{(a,b)}([t, 0])$  prosessin  $(X_t)$ :n  $(a, b)$ -ylitysten määrä aikavälissä  $[t, 0]$ , jossa  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $t \in -\mathbb{N}$ .

Olkoon  $C_t(\omega) \in \{0, 1\}$  sama ennustettava pelistrategia kuten Doobin etuperäisessä martingaalikonvergenssilauseessa, ja

$$Y_u - Y_t = \sum_{r=t+1}^u C_r \Delta X_r \quad t \leq u \leq 0$$

on ylimartingaali aikaparemetrillä  $u \in \{t, t+1, \dots, 0\}$ . Kun  $t < u = 0$

$$Y_0(\omega) - Y_t(\omega) \geq U_{(a,b)}([t, 0], \omega) - (Y_0(\omega) - a)^-$$

$E(Y_0 - Y_t) \leq 0$  koska  $(Y_t)$  on alimartingaali, josta seuraa

$$E_P(U_{[a,b]}([t, 0])) \leq \frac{E_P((X_0 - a)^-)}{(b - a)} \leq \frac{(|a| + E_P(|X_0|))}{(b - a)}$$

ja kuten etuperäisessä martingaalikonvergenssilauseessa

$$X_{-\infty}(\omega) := \limsup_{t \rightarrow -\infty} X_t(\omega) = \liminf_{t \rightarrow -\infty} X_t(\omega) \quad P\text{-m.v.}$$

Kun  $X_t$  on martingaali, on tasaisesti integroitava ja siitä seuraa konvergenssi  $L^1(P)$  mielessä.

Alimartingaalin tapauksessa, koska  $X_t \leq E(X_0|\mathcal{F}_t)$  kun  $t < 0$ , seuraa

$$X_t^+ \leq E(X_0|\mathcal{F}_t)^+ \leq E(X_0^+|\mathcal{F}_t)$$

ja Fatou lemmasta seuraa

$$\begin{aligned} E(|X_{-\infty}|) &\leq \liminf_t E_P(X_t^+) + \liminf_t E_P(X_t^-) \\ &\leq E_P(|X_0|) + \sup_t E_P(X_t^-) \end{aligned}$$

Olkoon  $A \in \mathcal{F}_{-\infty} \subseteq \mathcal{F}_t \forall t \in -\mathbb{N}$ . Koska  $(X_t = E_P(X_0|\mathcal{F}_t) : t \in -\mathbb{N})$  on tasaisesti integroitava martingaali,  $L^1(P)$ -konvergenssin karakterisointin nojalla voidaan ottaa raja-arvoa odotusarvon sisään kun tarkistamme ehdollisen odotusarvon määritelmää, eli

$$E_P(X_0 \mathbf{1}_A) = E_P(X_t \mathbf{1}_A) \rightarrow E_P(X_{-\infty} \mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_{-\infty}$$

joka tarkoittaa  $X_{-\infty} = E_P(X_t|\mathcal{F}_{-\infty})$ .

**Teoreema 12.1.4.** (*Kolmogorovin vahva suurten lukujen laki*)

Olkoon  $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$  riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia jossa  $X_1 \in L^1(P)$ , ja olkoon

$$S_t(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_t(\omega)$$

Silloin

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_t(\omega) = E_P(X_1) \quad P\text{-melkein varmasti ja } L^1(P)\text{:n mielessä.}$$

**Tod.**

Olkoon  $(\mathcal{F}_{-t} : t \in \mathbb{N})$  filtraatio jossa kun  $t \leq 0$

$$\mathcal{F}_{-t} = \sigma(S_t, S_{t+1}, \dots),$$

ja martingaali  $(M_{-t} : t \in \mathbb{N})$  jossa

$$M_{-t} = E_P(X_1|\mathcal{F}_{-t})$$

Huomataan että  $\sigma$ -algebran  $\mathcal{F}_{-t}$ :n sisältämä informaatio vähenee kun  $t \uparrow \infty$ .

Symmetrisyyden nojalla satunnaisparit  $(S_t, X_r)$  ja  $(S_t, X_1)$  ovat samoin jakautuneita kun  $1 \leq r \leq t$ , ja  $P$ -riippumattomuudesta seuraa kun  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} M_{-t} &:= E_P(X_1 | \mathcal{F}_{-t}) = E_P(X_1 | S_t, S_{t+1}, S_{t+2}, \dots) \\ &= E_P(X_1 | S_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \dots) = E_P(X_1 | \sigma(S_t)) = E_P(X_r | \sigma(S_t)) \quad \forall 1 \leq r \leq t \end{aligned}$$

eli

$$S_t = E_P(X_1 + \dots + X_t | \sigma(S_t)) = \sum_{r=1}^t E_P(X_r | \sigma(S_t)) = t E_P(X_1 | \sigma(S_t))$$

ja  $M_{-t}(\omega) = S_t(\omega)/t$  kun  $t \geq 0$ . Doobin takaperäisestä martingaali-konvergenssi lausesta seuraa  $P$ -melkein varmasti ja  $L^1(P)$  mielessä on olemassa rajaarvo

$$M_{-\infty}(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_t(\omega) = M_{-\infty}(\omega) \quad P \text{ m.v.}$$

jossa

$$M_{-\infty}(\omega) := \liminf_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_t(\omega) \quad \forall \omega$$

Huomataan myös että  $\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} S_t(\omega) &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=(n+1)}^t X_i(\omega) \\ &= 0 + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=(n+1)}^t X_i(\omega) \end{aligned}$$

on  $\mathcal{T}_{-n} = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ -mitallinen  $\forall n$ , on mitallinen häntä  $\sigma$ -algebran  $\mathcal{T}_{-\infty}$  suhteen (??), koska  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  ovat  $P$ -riippumattomia Kolmogorovin 0–1 lemmasta seuraa että  $M_{-\infty}(\omega)$  on  $P$ -triviaali:

$P(t \leq M_{-\infty}) \in \{0, 1\} \forall t$  ja  $P(M_{-\infty} < \infty) = 1$ , siitä seuraa että on olemassa  $c \in \mathbb{R}$  jolla  $P(M_{-\infty} = c) = 1$ .

Siis  $P$ -melkein varmasti ja  $L^1(P)$  mielessä

$$\frac{1}{t} S_t(\omega) \rightarrow c = E_P(X_1 | \mathcal{F}_{-\infty})(\omega)$$

Ottaamalla odotusarvoa seuraa

$$c = E_P(M_{-\infty}) = E_P(E_P(X_1|\mathcal{F}_{-\infty})) = E_P(X_1).$$

**Huomautus** Symmetriasta seuraasi että  $t^{-1}S_t(\omega) = E_P(X_1|\sigma(S_t))(\omega)$ , ja sen konvergenssi  $P$ -melkein varmasti ja  $L^1(P)$  mielessä seurasi taperäisestä martingaali-konvergenssi lauseesta. Riippumattomuuden tarvittiin osoittamaan

$$E_P(X_1|\sigma(S_t))(\omega) = E_P(X_1|\sigma(S_t, S_{t+1}, S_{t+2}, \dots))(\omega)$$

ja että raja-arvo on  $P$ -triviaali. Kun luovutaan rippumattomuudesta, raja-arvo on satunnainen. Siihen pohjautuu De Finettin lause. Bruno De Finetti (1906-1985) oli italialainen matematiikko, taloustieteilijä ja filosofi.

## 12.2 Vaihdeettavuus ja De Finettin lause

**Määritelmä 12.2.1.** *Satunnaisjono  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  joka saa arvot todennäköisyysavaruudessa  $(S, \mathcal{S})$  on äärettömään vaihdettavissa (engl. infinitely exchangeable) kun  $\forall n, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{N}$  ja indeksien  $\{1, \dots, n\}$  permutaatio  $\pi$ , satunnaisvektorit  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  ja  $(X_{t_{\pi(1)}}, \dots, X_{t_{\pi(n)}})$  ovat samoin jakautuneita  $P$  mitan suhteen.*

Huomataan että kun jono  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  saa arvot  $\mathbb{R}$ :ssa, kuuten riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien tapauksessa

$$M_{-t}(\omega) = t^{-1}S_t(\omega) := E(X_1|\mathcal{T}_{-t}), \quad t \in \mathbb{N}$$

on martingaali jolla on martingaali jolla on raja-arvo  $P$ -melkein varmasti ja  $L^1(P)$ :mielessä kun  $t \rightarrow \infty$

$$M_{-\infty}(\omega) = E(X_1|\mathcal{T}_{-\infty})(\omega)$$

Häntä  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{T}_{-\infty}$  ei tarvitse olla triviaali ja  $M_{-\infty}(\omega)$  on aidosti satunnainen.

**Määritelmä 12.2.2.** *Satunnaismuuttujat  $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$  jotka saavat arvoja todennäköisyysavaruudessa  $(S, \mathcal{S})$  ovat ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita ehdolla  $\sigma$ -algebraa  $\mathcal{G}$  kun  $\forall n, t_1, \dots, t_n, A_1 \dots A_n \in \mathcal{S}$ .*

$$P(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n | \mathcal{G})(\omega) = \prod_{i=1}^n P(X_{t_i} \in A_i | \mathcal{G})(\omega) \quad P \text{ m.v.}$$

Ottaamalla ehdollisen odotusarvon odotusarvoa, seuraa että ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujat ovat äärettömään vaihdettavissa.

**Teoreema 12.2.1.** *(De Finetti) Olkoon  $(S, \mathcal{S})$  Borelin avaruus. Kun satunnaisjono  $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N}) \subseteq S$  on äärettömästi vaihdettavissa  $P$ :n suhteen toinen implikaatio on myös voimassa, satunnaismuuttujat ovat ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita ehdolla häntä- $\sigma$ -algebraa  $\mathcal{T}_{-\infty}$  joka tullaan määrittelemään.*

**Proof** Olkoon

$$\mu_t(dx; \omega) = t^{-1} \sum_{i=1}^t \mathbf{1}(X_i(\omega) \in dx)$$

satunnaismuuttujien  $(X_1, \dots, X_t)$  empiirinen mitta joka virittää  $\sigma$ -algebran  $\sigma(\mu_t) = \sigma\{\mu_t(A) : A \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{F}$ .

Huomataan että  $\sigma(\mu_t) \subseteq \sigma(X_1, \dots, X_t)$ , ja kun  $t > 1$  se on aidosti pienempi koska empiirinen mitta sisältää satunnaismuuttujien arvot mutta unohtaa niiden järjestyksen.

Määritellään vähenevä  $\sigma$ -algebroiden jono

$$\mathcal{T}_{-t} := \bigvee_{k \geq t} \sigma(\mu_k), \quad \mathcal{T}_{-\infty} = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{-t}, \text{ on häntä-}\sigma\text{-algebra.}$$

Olkoon  $k \in \mathbb{N}$  ja  $f(x_1, \dots, x_k) : S^k \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitettu ja mitallinen funktio. Kun  $t \geq k$  laskemme symmetrian avulla  $E_P(f(X_1, \dots, X_k) | \mathcal{T}_{-t})(\omega)$ .

Olkoon  $1 \leq k \leq t$  ja määritellään satunnaistodennäköisyysmitta

$$\mu_t^{\circ k} : \mathcal{S}^{\otimes k} \rightarrow [0, 1]$$

joka on säännöllinen versio satunnaisvektorin  $(X_1, \dots, X_k)$  ehdollisesta jakaumasta ehdolla  $\sigma(\mu_t)$  (joka on olemassa koska  $(S, \mathcal{S})$  on Borelin avaruus).

Symmetriasta seuraa

$$\begin{aligned} & E_P(f(X_1, \dots, X_k) | \sigma(\mu_t))(\omega) \\ &= \mu_t^{\circ k}(f; \omega) := \int_{S^k} f(x) \mu_t^{\circ k}(dx; \omega) = \frac{1}{t!} \sum_{\pi} f(X_{\pi(1)}(\omega), \dots, X_{\pi(k)}(\omega)) \\ &= \frac{(t-k)!}{t!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq t \text{ eriläisiä}} f(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}) \end{aligned}$$

jossa summa otetaan yli  $\{1, \dots, t\}$  joukon permutaatioita  $\pi$ .

Huomataan että  $\mu_t^{\circ k}(dx; \omega)$  on  $\sigma(\mu_t)$ -mitallinen, koska riippuu vain arvoista  $\{X_1(\omega), \dots, X_t(\omega)\}$  eikä niiden järjestyksestä. Huomataan myös että  $\mu_t^{\circ k}(dx)$  ei ole tulo mitta, koska summassa ei ole toistuvien indeksien termejä.

Huomataan myös että kun  $k = 1$

$$\mu_t^{\circ 1}(A) = \mu_t(A) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \mathbf{1}(X_k \in A)$$

on otoksen  $(X_1(\omega), \dots, X_t(\omega))$ :n empiirinen mitta.

Kun  $k \leq t$  vaihdettavuuden nojalla kaikille  $\{1, \dots, t\}$  joukon permutaatiolle  $\pi$   $(X_1, \dots, X_k, \mu_t)$  ja  $(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}, \mu_t)$  ovat samoin jakutuneita, josta seuraa

$$E_P(f(X_1, \dots, X_k) | \sigma(\mu_t))(\omega) = E_P(f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) | \sigma(\mu_t))(\omega)$$

Kun summataan permutaatioiden  $\pi$ :n yli ja jaetaan niiden määrällä saadaan

$$\mu_t^{\circ k}(f; \omega) = E_P(f(X_1, \dots, X_k) | \sigma(\mu_t))(\omega)$$

Osoitamme seuraavaksi

$$E_P(f(X_1, \dots, X_k) | \sigma(\mathcal{T}_{-t}))(\omega) = E_P(f(X_1, \dots, X_k) | \sigma(\mu_t))(\omega)$$

Huomaamme myös että

$$\mathcal{T}_{-t} = \sigma(\mu_t, \mu_{t+1}, \mu_{t+2}, \dots) = \sigma(\mu_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \dots)$$

koska empiiriset mitat  $\mu_t(dx; \omega)$  ja  $\mu_{t+1}(dx; \omega)$  määrävät  $X_{t+1}(\omega)$  yhtälössä

$$(\mu_{t+1} - \mu_t)(dx) = \frac{1}{t+1} \left( \mathbf{1}(X_{t+1} \in dx) - \mu_t(dx) \right)$$

Then from infinite exchangeability it follows that in law, for  $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & (X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}) \\ & \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots, X_{\pi(n)}, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}) \end{aligned}$$

for any permutation  $\pi$  of  $\{1, \dots, n\}$ .

**Esimerkki 12.2.1.**  $(X_1, \dots, X_n)$  ja  $(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$  ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla  $\sigma(\mu_n)$ ,

**R.** Huomataan ensin että satunnaismuuttuja  $W(\omega)$  on  $\sigma(\mu_n)$  mitaalinen jos ja vain jos  $W(\omega) = g(X_1, \dots, X_n)$  jossa  $g$  on mitallinen ja symmetrinen, eli

$$g(x_1, \dots, x_m) = g(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(m)}) \quad \forall \pi \text{ permutaatiolle.}$$

Oletamme myös että  $g$  on rajoitettu.

Olkoon myös  $Y(\omega)$  rajoitettu ja  $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ -mitallinen, ja  $f(x_1, \dots, x_n)$  rajoitettu  $\mathcal{S}^{\otimes n}$  mitallinen, (ei välttämättä symmetrinen) Jonon äärettömästä vaihdettavuudesta seuraa  $\forall n \in \mathbb{N}$  ja kaikille  $\{1, \dots, n\}$  indeksien permutaatioille  $\pi$ , jonot

$$(X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, X_{n+1}, \dots) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots, X_{\pi(n)}, X_{n+1}, X_{n+1}, \dots)$$

ovat samoin jakautuneita  $P$ -mitan suhteen

$$\begin{aligned} & E_P(Y W f(X_1, \dots, X_n)) E_P(Y g(X_1, \dots, X_n) f(X_1, \dots, X_n)) \\ & = E_P(Y g(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)}) f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) \\ & \quad (\text{koska jono on vaihdettavissa}) \\ & = E_P(Y g(X_1, \dots, X_n) f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) = E_P(Y W f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) \\ & \quad (\text{koska } g \text{ on symmetrinen}) \\ & = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} E_P \left( Y W f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)}) \right) = E_P \left( Y W \frac{1}{n!} \sum_{\pi} f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)}) \right) \\ & = E_P(Y W \mu_n^{\otimes n}(f)) \end{aligned}$$

Ehdollinen odotusarvon määritelmästä seuraa että

$$E_P(f(X_1, \dots, X_n) | \sigma(\mu_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots))(\omega) = \mu_n^{\circ n}(f; \omega) = E_P(f(X_1, \dots, X_n) | \sigma(\mu_n))(\omega)$$

eli  $(X_1, \dots, X_n)$  ja  $(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$  ovat ehdollisesti  $P$ -riippumattomia ehdolla  $\sigma(\mu_n)$ .

Toisin sanoen,  $\mathcal{T}_{-n}$  ei sisällä informaatiota jono ensimmäisten  $n$ -arvojen järjestyksestä.

Koska  $M_{-t}^{(k)}(f) := \mu_t^{\circ k}(f)$  on martingaali filtratiossa  $(\mathcal{T}_{-t} : t \in \mathbb{N})$ , Doobin takaperäisestä martingaalikonvergenssi lauseesta seuraa että kun  $t \rightarrow \infty$ , on olemassa rajaarvo  $M_{-\infty}^{(k)}(f)$   $P$ -melkein varmasti ja  $L^1(P)$ :ssa.

Koska  $(X_1, \dots, X_k)$  saa arvot Borel avaruudessa, ehdollisella todennäköisyydellä

$$P((X_1, \dots, X_k) \in A | \mathcal{T}_{-\infty})(\omega), \quad A \in \mathcal{S}^{\otimes k}$$

on säännöllinen versio,

eli  $\mathcal{T}_{-\infty}$ -mitallinen todennäköisyysdin  $\mu_{\infty}^{\circ k}(dx; \omega)$  on  $(S_1 \times \dots \times S_k)$  jolla  $P$ -melkein varmasti kaikille rajoitetuille ja mitalliseille funktioille

$$\begin{aligned} M_{-\infty}^{(k)}(f; \omega) &= E_P(f(X_1, \dots, X_k) | \sigma(\mathcal{T}_{-\infty}))(\omega) \\ &= \int_{S_1, \dots, S_k} f(x_1, \dots, x_k) \mu_{\infty}^{\circ k}(dx_1, \dots, dx_k; \omega) \end{aligned}$$

Kun  $k = 1$  merkitään  $\mu_{\infty} = \mu_{\infty}^{\circ 1}$ , jossa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t f(X_i(\omega)) = \int_S f(x) \mu_{\infty}(dx, \omega) \quad P\text{-m.v.}$$

**Esimerkki 12.2.2.** Koska  $(S, \mathcal{S})$  on Borelin avaruus, on olemassa mitallinen injektio  $f : (S, \mathcal{S}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$  jolla on mitallinen käänteiskuvaus  $f^{-1}$ . Tästä seuraa että kun  $A \subseteq S$ ,  $A \in \mathcal{S}$  jos ja vain jos  $f(A)$  on Borelin joukko. Koska

$$\sigma\{(a, b] : 0 \leq a < b \leq 1, a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathcal{B}([0, 1])$$

seuraa että myös  $\mathcal{S}$  on numeroituvasti generoitu, koska

$$\mathcal{S} = \sigma\{f^{-1}((a, b] \cap f(S)) : 0 \leq a < b \leq 1, a, b \in \mathbb{Q}\} = \sigma\{A(\ell) : \ell \in \mathbb{N}\}$$

A priori tiedetään että  $\forall A \in \mathcal{S}, \exists \mathcal{N}_A \subseteq \Omega$  jolla  $P(\mathcal{N}_A) = 0$  ja

$$\mu_t(A; \omega) \rightarrow \mu_\infty(A; \omega) \quad \forall \omega \notin \mathcal{N}_A$$

Koska  $P(\mathcal{N}) = 0$  jossa  $\mathcal{N} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_{A(\ell)}$ , seuraa että

$$\mu_t(A_\ell; \omega) \rightarrow \mu_\infty(A_\ell; \omega) \quad \forall \ell \in \mathbb{N} \quad \forall \omega \notin \mathcal{N}$$

ja koska  $\sigma\{A_\ell : \ell \in \mathbb{N}\} = \mathcal{S}$  seuraa että  $\forall A \in \mathcal{S}$

$$\mu_t(A; \omega) \rightarrow \mu_\infty(A; \omega) \quad \forall A \in \mathcal{S} \quad \forall \omega \notin \mathcal{N} \quad (12.2.1)$$

Samoin löytyy nolla mittainen joukko  $\tilde{\mathcal{N}} \subseteq \Omega$  jolla  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \{A_i\} \subseteq \mathcal{S}$

$$\mu_t^{\circ k}(A_1 \times \cdots \times A_k; \omega) \rightarrow \mu_\infty^{\circ k}(A_1 \times \cdots \times A_k; \omega) \quad \forall \omega \notin \tilde{\mathcal{N}} \quad (12.2.2)$$

$P$ -melkein varmasti äärellisulotteisten jakaumien kokoelma

$$\left\{ \mu_\infty^{\circ k}(dx_1, \dots, dx_k; \omega) : k \in \mathbb{N} \right\}$$

on yhteensopiva (tarkista!), ja Kolmogorovin laajennuslauseesta 2.0.1 seuraa että on olemassa satunnaismitta  $\nu_\infty(\cdot; \omega)$  jonojen  $(x_k : k \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{S}$  avaruudessa jolla  $\forall k, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} P(X_1 \in A_1, \dots, X_k \in A_k | \mathcal{T}_{-\infty})(\omega) = \\ \mu_\infty^{\circ k}(A_1 \times \cdots \times A_k; \omega) = \nu_\infty(\{(x_l : l \in \mathbb{N}) : x_1 \in A_1, \dots, x_k \in A_k\}; \omega) \end{aligned}$$

Näytän että  $P$ -melkein varmasti  $\nu_\infty(\cdot; \omega)$  on satunnaismittan kopioiden ääretön tulomitta, eli  $\forall k$

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_k \in A_k | \mathcal{T}_{-\infty})(\omega) = \prod_{i=1}^k P(X_1 \in A_i | \mathcal{T}_{-\infty})(\omega)$$

Olkoon  $\mu_t^{\otimes k}$   $k$ -kertainen tulomitta empiirisestä mitasta  $\mu_t$ . Kun  $f(x_1, \dots, x_k)$  rajoitettu ja Borel mitallinen,

$$\mu_t^{\otimes k}(f) = t^{-k} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq t} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$$

joka sisältää myös termejä joissa on toistettuja indekseja. Silloin

$$\begin{aligned} (\mu_t^{\circ k} - \mu_t^{\otimes k})(f) &= \mu_t^{\circ k}(f) - \mu_t^{\otimes k}(f) = \\ \mu_t^{\circ k}(f) \left(1 - \frac{t!}{t^k(t-k)!}\right) &+ t^{-k} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq t: \exists l \neq m \ i_l = i_m} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \end{aligned}$$

jossa ensimmäisessä osassa on termejä ilman toistettuja indekseja ja toisessa osassa kaikissa termeissä vähintään yksi satunnaismuuttuja on toistettu. Silloin  $\forall k \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} &|\mu_t^{\circ k}(f; \omega) - \mu_t^{\otimes k}(f; \omega)| \\ &\leq \|f\|_{\infty} \left(1 - \prod_{l=0}^{k-1} \frac{(t-l)}{t} + t^{-k} \binom{k}{2} t^{k-1}\right) \rightarrow 0 \text{ kun } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

jossa  $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in S} |f(x)|$  ja arvio ei riipu  $\omega$ :sta

Kaikille  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}, \forall k$   $P$ -melkein varmasti kun  $t \rightarrow \infty$

$$\mu_t^{\circ k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) \rightarrow \mu_{\infty}^{\circ k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)$$

ja kun  $k = 1$

$$\mu_t^{\circ 1}(A_i) \rightarrow \mu_{\infty}^{\circ 1}(A_i),$$

konvergenssi seuraa myös tulomitoille

$$\mu_t^{\otimes k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = \prod_{i=1}^k \mu_t^{\circ 1}(A_i) \rightarrow \prod_{i=1}^k \mu_{\infty}^{\circ 1}(A_i) = \mu_{\infty}^{\otimes k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k).$$

Kolmio epäyhtälöstä

$$\begin{aligned} &|\mu_{-\infty}^{\circ k}(f) - \mu_{\infty}^{\otimes k}(f)| \\ &\leq |\mu_{-\infty}^{\circ k}(f) - \mu_t^{\circ k}(f)| + |\mu_t^{\circ k}(f) - \mu_t^{\otimes k}(f)| + |\mu_t^{\otimes k}(f) - \mu_{\infty}^{\otimes k}(f)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$P$ -m.v. kun  $t \rightarrow \infty$ , ja

$$\mu_{\infty}^{\circ k}(f; \omega) = \mu_{\infty}^{\otimes k}(f; \omega) \quad P\text{-a.s}$$

kaikille rajoitetuille mitallisille  $f(x_1, \dots, x_k)$ . Se tarkoittaa Kolmogorovin laajennus  $\nu_\infty$  on tulomitta jonojen avaruudessa  $S^\mathbb{N}$ . Rajoitetuille mitalliselle funktiolle  $g_1, \dots, g_k : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$E_P(g_1(X_1) \dots g_k(X_k) | \mathcal{T}_{-\infty})(\omega) = \prod_{i=1}^k \left\{ \int_S g_i(x) \mu_\infty(dx, \omega) \right\}$$

Ottaamalla odotusarvoa seuraa

$$\begin{aligned} & E_P(g_1(X_1) \dots g_k(X_k)) \\ &= E_P \left( \int_S g_i(x) \mu_\infty(dx) \right) = \int_{\mathcal{M}(S)} \left\{ \prod_{i=1}^k \int_S g_i(x) \mu(dx) \right\} Q(d\mu) \end{aligned}$$

jossa  $Q$  on satunnaismittan  $\mu_\infty(dx; \omega)$  jakauman avaruudessa

$$\mathcal{M}(S) = \{ \text{todennäköisyys mittoja } \nu : S \rightarrow [0, 1] \}$$

Toisin sanoen, permutaatio-symmetrinen (eli äärettömästi vaihdettavissa) satunnaismuuttujen jono joka saa arvot Borelin avaruudessa, on riippumattomien ja samoin jakautuneiden jonojen sekoitus  $\square$

**Esimerkki 12.2.3.** *De Finetti todisti ensin lauseensa yksinkertaisimmissa tapauksessa, binaarijonoille, jossa  $S = \{0, 1\}$ . Silloin  $\mathcal{M}(S) = [0, 1]$ .*

Olkoon  $S_t(\omega) = (X_1(\omega) + \dots + X_t(\omega))$ .

Jos kolikkoheittojenjono on äärettömästi vaihdettavissa  $P$ -mittan suhteen, raja-arvo  $\vartheta(\omega) := \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_t(\omega) \in [0, 1]$  on olemassa  $P$ -melkein varmasti ja  $L^1(P)$ :ssa

Olkoon  $Q(d\theta) = P(\{\omega : \vartheta(\omega) \in d\theta\})$ . Kun ehdollistetaan  $\sigma$ -algebraan  $\sigma(\vartheta)$ , kolikonheitot ovat ehdollisesti riippumattomia ja Bernoulli jakautuneita, samalla satunnais-todennäköisyysparametrilla  $\vartheta(\omega) \in [0, 1]$ . Raja-arvon todennäköisyysmitta  $Q(d\theta)$  tulkitaan prioritodennäköisyydeksi parametrille  $\vartheta$ . Silloin  $\forall k, (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \{0, 1\}$ ,

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) &= \int_0^1 \left\{ \prod_{i=1}^k P(X_i = x_i | \vartheta = \theta) \right\} Q(d\theta) \\ &= \int_0^1 \theta^{S_k} (1 - \theta)^{(k - S_k)} Q(d\theta) \\ Q(B) &= P(\{\omega : \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_t(\omega) \in B\}), \quad B \in \mathcal{B}([0, 1]) \end{aligned}$$

*De Finettin lause on avain Bayeslaiseen päättelyyn.*

# Luku 13

## Radon-Nikodymin lause

**Määritelmä 13.0.1.** Olkoon  $\mu$  ja  $\nu$  positiivisia mittoja todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F})$ , ja  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  ali  $\sigma$ -algebra

$\nu$  on absoluuttisesti jatkuva  $\mu$ :n suhteen ali  $\sigma$ -algebrassa  $\mathcal{G}$ , kun

$$A \in \mathcal{G}, \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

Silloin merkitään  $\nu \stackrel{\mathcal{G}}{\ll} \mu$ .

Kun  $\mu \ll \nu$  ja  $\nu \ll \mu$  mitat ovat ekvivalentteja, niillä on samat nolla-mittaiset joukot, ja merkitään  $\mu \sim \nu$ .

**Lemma 13.0.1.** Olkoon  $Q \ll P$  todennäköisyysmittoja avaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

$\forall \varepsilon > 0$  on olemassa  $\delta > 0$  jolla

$$A \in \mathcal{F}, P(A) < \delta \implies Q(A) < \varepsilon$$

**Tod.** Muuten on olemassa  $\varepsilon > 0$  ja jono  $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$  jolla  $P(A_n) \leq 2^{-n}$  ja  $Q(A_n) \geq \varepsilon > 0$  Borel Cantelli lemmasta  $P(\limsup A_n) = 0$ . Käänteisestä Fatou lemmasta seuraa

$$Q(\limsup A_n) \geq \limsup Q(A_n) \geq \varepsilon > 0$$

joka on ristiriidassa oletuksen  $Q \ll P$  kanssa  $\square$

**Teoreema 13.0.1.** (Radon-Nikodym) Olkoon  $\mu$  ja  $\nu$   $\sigma$ -äärellisiä positiivisia mittoja todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Kun  $\nu \stackrel{\mathcal{F}}{\ll} \mu$ , on olemassa  $\mathcal{F}$ -mitallinen

kuvaus  $Z : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ , jolla pätee mitan vaihto kaava

$$\nu(A) = \int_{\Omega} Z(\omega) \mathbf{1}_A(\omega) \mu(d\omega) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

**Tod** Koska  $\mu$  ja  $\nu$  are  $\sigma$ -äärellisiä, on olemassa numeroituva mitallinen ositus  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$  jolla  $\mu(\Omega_n) < \infty$  and  $\nu(\Omega_n) < \infty \forall n$ . Kun otamme  $P_n(d\omega) = \mu(d\omega)/\mu(\Omega_n)$  ja  $Q_n(d\omega) = \nu(d\omega)/\nu(\Omega_n)$  jokaiselle  $\Omega_n$ , huomaamme että lause seuraa yleisesti kun se todistetaan todennäköisyyksimitoille  $Q \ll P$ .

Oletamme ensin että  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  on numeroituvasti viritettävissä tai separoituva, eli  $\mathcal{F} = \sigma(F_n : n \in \mathbb{N})$  jossa  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ , esimerkiksi silloin  $(\Omega, \mathcal{F})$  on Borelin avaruus.

Olkoon filtraatio  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$  jossa  $\mathcal{F}_n = \sigma(F_1, \dots, F_n)$ , ja  $\mathcal{F} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ .

Kaikille  $n \in \mathbb{N}$ , ottaamalla leikkauksia joukoista  $F_1, \dots, F_n$ , löytyy  $\Omega$ :n  $\mathcal{F}_n$ -mitallinen ositus  $\{A_1^{(n)}, \dots, A_{m_n}^{(n)}\}$  jolla  $\mathcal{F}_n = \sigma(A_k^{(n)} : k = 1, \dots, m_n)$ .

Määritellään  $\mathcal{F}_n$  mitallinen satunnaismuuttuja

$$Z_n(\omega) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{Q(A_k^{(n)})}{P(A_k^{(n)})} \mathbf{1}(\omega \in A_k^{(n)})$$

jossa  $0/0$  saa mielivaltaisen arvo, esimerkiksi 0.

Koska  $Q \ll P$ , seuraa että  $Q(A_k^{(n)}) = 0$  kun  $P(A_k^{(n)}) = 0$ , siksi  $Z_n(\omega) \in [0, +\infty)$ .

Seuraa määritelmästä että  $Z_n(\omega)$  on  $\mathcal{F}_n$ -mitallinen,  $Q(A_k^{(n)}) = E_P(Z_n \mathbf{1}_{A_k^{(n)}})$ ,  $k \in \{1, \dots, m_n\}$ , ja siksi  $E_Q(X) = E_P(Z_n X)$  kun  $X$  on  $\mathcal{F}_n$ -mitallinen satunnaismuuttuja.

Huomataan myös että  $Z_n(\omega)$  on  $P$ -integroituva (koska saa äärellisesti monta arvoa)  $E_P(Z_n) = Q(\Omega) = 1$ .

Näytämme että satunnaisjono  $(Z_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$  on  $(P, \{\mathcal{F}_n\})$ -martingaali.

Olkoon  $A_k^n = \bigcup_{j=1}^m A_{\ell_j}^{n+1}$  joillekin  $m, \ell_1, \dots, \ell_m$ .

$$E_P(Z_n \mathbf{1}_{A_k^n}) = Q(A_k^n) = \sum_{j=1}^m Q(A_{\ell_j}^{n+1}) = \sum_{j=1}^m E_P(Z_{n+1} \mathbf{1}_{A_{\ell_j}^{n+1}}) = E_P(Z_{n+1} \mathbf{1}_{A_k^n})$$

josta seuraa

$$E_P(Z_n \mathbf{1}_A) = Q(A) = E_P(Z_{n+1} \mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_n$$

ja martingaali ominaisuus seuraa ehdollisen odotusarvon määritelmästä

$$E_P(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n)(\omega) = Z_n(\omega).$$

Määritellän kaikille  $\omega \in \Omega$

$$Z_\infty(\omega) := \limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega).$$

Koska  $(Z_n(\omega)) \geq 0$  Doobin etuperäinen martingaalikonvergenssi lauseesta seuraa että  $P$  melkein varmasti

$$Z_\infty(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega)$$

jolla  $Z_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ja  $E_P(Z_\infty) \leq E_P(Z_1) = 1$ .

Osoitan että  $Q(A_n) = E_P(Z_\infty \mathbf{1}_{A_n}) \forall n, A_n \in \mathcal{F}_n$ , ja koska nämä virittävät  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebran, seuraa  $Q(A) = E_P(Z_\infty \mathbf{1}_A) \forall A \in \mathcal{F}$ .

Koska  $Q(A_n) = E_P(Z_m \mathbf{1}_{A_n})$  kun  $m \geq n$ , yhtälö

$$E_P(Z_\infty \mathbf{1}_{A_n}) = \lim_{m \rightarrow \infty} E_P(Z_m \mathbf{1}_{A_n}) = Q(A_n)$$

seuraa  $L^1$  konvergenssin karakterisaatiosta kun osoitamme että  $P$ -martingaali  $(Z_n)$  on  $P$ -tasaisesti integroituva.

Koska  $Q \ll P$ , lemmän 13.0.1 nojalla kaikille  $\varepsilon > 0$  on olemassa  $\delta > 0$  jolla kun  $A \in \mathcal{F}$  ja  $P(A) < \delta$  seuraa  $Q(A) < \varepsilon$ .

Chebychevin epäyhtälöstä

$$P(Z_n > K) < K^{-1} E_P(Z_n) = K^{-1} \quad \forall n$$

Kun valitaan  $K > \delta^{-1}$ , koska  $\{\omega : Z_n(\omega) > K\} \in \mathcal{F}_n$ , mitanvaihto kaavasta

$$\sup_n E_P(Z_n \mathbf{1}(Z_n > K)) = \sup_n Q(Z_n > K) < \varepsilon$$

joka tarkoittaa tasaista integroituvuutta:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_n E_P(Z_n \mathbf{1}(Z_n > K)) = 0$$

Siis lause on todistettu silloin kun  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  on separoituva.

Yleisemmin joudumme käyttämään yleistettyjen jonojen konvergenssia.

Muistetaan määritelmä topologian kurssista:

**Määritelmä 13.0.2.** *Topologisessa avaruudessa  $(E, \mathcal{T})$  verkko (engl. net) on yleistetty jono  $(x_\alpha : \alpha \in \mathcal{I})$  jossa indeksi joukko  $(I, \leq)$  on suunnattu, eli osittain järjestetty joukko jolla kaikille  $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$  on olemassa  $(\alpha \vee \beta) \in I$  jolla*

$$\alpha \vee \beta \geq \alpha, \alpha \vee \beta \geq \beta, \gamma \geq \alpha \text{ ja } \alpha \geq \beta \implies \gamma \geq \alpha \vee \beta$$

$$x_\alpha \rightarrow x \in E \text{ kun kaikille avoimille } U \ni x, \exists \bar{\alpha} \text{ jolla } x_\alpha \in U \forall \alpha \geq \bar{\alpha}.$$

$(\mathbb{G}, \subseteq)$  on suunnattu joukko, jossa

$$\mathbb{G} := \left\{ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} : \mathcal{G} \text{ on separoituva ali-}\sigma\text{-algebra} \right\}$$

Kun  $\mathcal{G}', \mathcal{G}'' \in \mathbb{G}$  ovat separoituvia, myös  $\mathcal{G}' \vee \mathcal{G}'' := \sigma(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$  on separoituva ali- $\sigma$ -algebra.  $(\mathbb{G}, \subseteq)$  on verkko.

Kun  $\mathcal{G}$  on separoituva tiedämme että on olemassa satunnaismuuttuja  $0 \leq Z_{\mathcal{G}}(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  jolla mitan vaihto kaavassa on voimassa

$$Q(A) = E_P(Z_{\mathcal{G}} \mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Osoitamme että  $(Z_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \in \mathbb{G})$  on Cauchy-verkko  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ :ssa, ja täydellisyydestä seuraa että on olemassa raja  $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Osoitan että  $\forall \varepsilon > 0$  on olemassa  $\bar{\mathcal{G}} \in \mathbb{G}$  jolla kun  $\mathcal{G}' \supseteq \bar{\mathcal{G}}, \mathcal{G}'' \supseteq \bar{\mathcal{G}}, \mathcal{G}', \mathcal{G}'' \in \mathbb{G}$ , seuraa

$$E_P(|Z_{\mathcal{G}'} - Z_{\mathcal{G}''}|) < \varepsilon$$

Yhtäpitävästi,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{\mathcal{G}}$  separoituva  $\sigma$ -algebra jolla kun  $\bar{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}'$  separoituva, seuraa

$$E_P(|Z_{\bar{\mathcal{G}}} - Z_{\mathcal{G}'}|) < \varepsilon$$

Jos  $(Z_{\mathcal{G}})$  ei olisi Cauchy verkko löytyisi  $\varepsilon > 0$  ja ei-vähenevä jono  $(\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{G}$

$$E_P(|Z_{\mathcal{G}_n} - Z_{\mathcal{G}_{n+1}}|) \geq \varepsilon > 0$$

Olkoon  $\mathcal{G}_\infty = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ , joka on myös separoituva.

Kuten todistuksen ensimmäisessä vaiheessa seuraa että

$$Z_{\mathcal{G}_n}(\omega) = E_P(Z_{\mathcal{G}_\infty} | \mathcal{G}_n)(\omega) \rightarrow Z_{\mathcal{G}_\infty}(\omega)$$

on tasaisesti integroitava martingaali joka suppenee  $P$ -melkein varmasti ja  $L^1(P)$ :n mielessä, joka on ristiriidassa (13) kanssa.

Täydellisessä metrisessä avaruudessa  $(E, d)$  jokainen Cauchy verkko  $(x_\alpha : \alpha \in \mathcal{I})$  suppenee, eli on olemassa  $x^* \in E$  jolla  $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{\alpha}$  jolla  $d(x^*, x_\alpha) \leq \varepsilon \forall \alpha \geq \bar{\alpha}$ .

Todistamme myös tätä väiteettä, joka seuraa numeroituvien Cauchyn jonojen suppenemisestä.

Olkoon  $\bar{\alpha}_n, n \in \mathbb{N}$  jolla  $d(x_{\bar{\alpha}_n}, x_\alpha) \leq n^{-1} \forall \alpha \geq \bar{\alpha}_n$ , ja valitaan  $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$ .

$\bar{x}_n := x_{\bar{\alpha}_n}$  on Cauchyn jono jolla on raja-arvo  $x^* \in E$ , joka on myös verkon  $(x_\alpha)$  raja-arvo, koska kun  $n$  on tarpeeksi suuri jolla  $d(x^*, x_{\bar{\alpha}_n}) < \varepsilon$  ja  $n > (1/\varepsilon)$ , seuraa  $\forall \alpha \geq \bar{\alpha}_n$

$$d(x_\alpha, x^*) \leq d(x_\alpha, x_{\bar{\alpha}_n}) + d(x_{\bar{\alpha}_n}, x^*) < 2\varepsilon$$

Siksi yleistetyllä Cauchyn jonolla  $(Z_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \in \mathbb{G})$  on raja-arvo  $Z_\infty(\omega)$   $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ :n normissa.

Seuraavaksi osoitamme että mitänvaihtokaava pätee.

Olkoon  $A \in \mathcal{F}$  ja  $\mathcal{G} \in \mathbb{G}$  jolla

$$E_P(|Z_\infty - Z_{\mathcal{G}'}|) < \varepsilon$$

kaikille  $\mathcal{G}' \supseteq \mathcal{G}, \mathcal{G}' \in \mathbb{G}$ .

Olkoon  $\tilde{\mathcal{G}} := \sigma(\mathcal{G} \vee \mathcal{F}) \in \mathbb{G}$ .

Koska  $A \in \tilde{\mathcal{G}}$

$$Q(A) = E_P(Z_{\tilde{\mathcal{G}}} \mathbf{1}_A)$$

seuraa

$$\left| E_P(Z_\infty \mathbf{1}_A) - Q(A) \right| \leq E_P \left( |Z_\infty - Z_{\tilde{g}}| \right) < \varepsilon$$

jossa  $\varepsilon > 0$  on mielivaltainen pieni  $\square$

# Luku 14

## Johdatus Cramerin suurten poikkeamien teoriaan

**Lause 14.0.1.** (Heikko suurten lukujen laki) Olkoon  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^2(P)$  satunnaismuuttujien jono joilla  $E(X_n) = 0$

$$E_P(X_n^2) \leq c < \infty \quad \forall n, \quad E_P(X_n X_m) = 0 \quad \text{kun } n \neq m$$

Merkitään  $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)$  ja otoksen keskiarvo  $\bar{S}_n(\omega) = n^{-1}S_n(\omega)$ .

Silloin  $\bar{S}_n \rightarrow 0$   $L^2(P)$ -mielessä ja stokastisesti kun  $n \uparrow \infty$ .

Samoin, kun  $E_P(X_n) = \mu \forall n$ , seuraa  $\bar{S}_n \rightarrow \mu$   $L^2(P)$ -mielessä ja stokastisesti.

Tod.

$$E_P(\bar{S}_n^2) = \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{i=1}^n E_P(X_i^2) + \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j < i} E_P(X_i X_j) \right\} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E_P(X_i^2) \leq \frac{c}{n}$$

Stokastinen konvergenssi seuraa  $L^2$ -konvergenssista  $\square$

**Huomautus 14.0.1.** Stokastisesta konvergenssista seuraa  $P(\bar{S}_n \geq x) \rightarrow 0 \forall x > \mu$ . Suurten poikkeamien teoria kertoo (tietyillä oletuksilla) että suppeneminen on eskponentiaalinen otoskoon  $n$  suhteen ja miten vauhti riippuu  $x$ :sta.

**Määritelmä 14.0.1.** Jono  $\{a(n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  on subadditiivinen kun

$$a(n+m) \leq a(n) + a(m) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

180LUKU 14. JOHDATUS CRAMERIN SUURTEN POIKKEAMIEN TEORIAAN

**Lemma 14.0.1.** *Olkoon  $\{a(n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  subadditiivinen. Silloin*

1.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a(n)}{n}$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{n} = +\infty \iff a(n) = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tod. Olkoon  $n > m \geq N$ ,  $n = (qm + r)$  jossa  $1 \leq r \leq m$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .  
Subadditiivisuudesta,

$$\begin{aligned} a(n) &\leq a(qm) + a(r) \leq qa(m) + \max_{1 \leq r \leq m} a(r) \\ \frac{a(n)}{n} &\leq \frac{q}{n}a(m) + \frac{1}{n} \max_{1 \leq r \leq m} a(r) \\ \implies \limsup_n \frac{a(n)}{n} &\leq \frac{a(m)}{m} \quad \forall m \geq N \\ \implies \limsup_n \frac{a(n)}{n} &\leq \inf_{m \geq N} \frac{a(m)}{m} \leq \liminf_m \frac{a(m)}{m} \end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\limsup_n \frac{a(n)}{n} = \liminf_n \frac{a(n)}{n} = \lim_n \frac{a(n)}{n}$$

Väite seuraa kun osoitamme

$$\inf_{k < N} \frac{a(k)}{k} \geq \inf_{m \geq N} \frac{a(m)}{m} \tag{14.0.1}$$

Tämä on selvä jos  $a(m) = \infty \quad \forall 0 < m < N$ . Muuten  $a(k) < \infty$  jollekin  $0 < k < N$ , ja subadditiivisuudesta seuraa

$$\frac{a(kN)}{kN} \leq \frac{a(k)}{k}$$

jossa  $k < N \leq kN$ , Tästä seuraa (14.0.1):

$$\inf_{k < N} \frac{a(k)}{k} \geq \inf_{k < N} \frac{a(kN)}{kN} \geq \inf_{m \geq N} \frac{a(m)}{m} \quad \square$$

**Teoreema 14.0.1.** *Olkoon satunnaismuuttujat  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$   $P$ -riippumattomia ja samoin jakautuneita. Silloin*

1. *funktio*

$$h(x) := - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n > x) = \left( - \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n > x) \right) \in [0, +\infty]$$

*on hyvin määritelty*

2.  *$h(x)$  on ei-vähenevä ja konveksi.*

3.  *$h(x) < \infty \iff P(X_1 \geq x) > 0$*

*$h(x)$  on jonon  $(\bar{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vauhtifunktio*

Tod.

1. Koska

$$\begin{aligned} P(\bar{S}_{n+m} > x) &= P(S_{n+m} > (n+m)x) \geq P(\{S_n > nx\} \cap \{S_{n+m} - S_n > mx\}) = \\ &= P(S_n > nx)P(S_m > mx) = P(\bar{S}_n > x)P(\bar{S}_m > x) \end{aligned}$$

jonon  $a(n) := -\log P(\bar{S}_n > x)$  on subadditiivinen ja väite seuraa lemmasta 14.0.1.

2. Tod.

$$\begin{aligned} P\left(\bar{S}_{2n} > \frac{x+y}{2}\right) &= P(S_{2n} > n(x+y)) \geq P(\bar{S}_n > x)P(\bar{S}_n > y) \\ \iff -\frac{1}{2n} \log P(\bar{S}_{2n} > \frac{x+y}{2}) &\leq -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n > x) + \frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n > y) \right) \end{aligned}$$

kun  $n \uparrow \infty$  seuraa

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \left( h(x) + h(y) \right)$$

Tämä ominaisuus kutsutaan *keskipiste-konveksisuudeksi*. Seuraa että jatkuva kuvaus on konveksi jos ja vain jos se on keskipistekonveksi (harjoitustehtävä). Tässä osoitamme että ei-vähenevä kuvaus on konveksi jos ja vain jos se on keskipistekonveksi.

182LUKU 14. JOHDATUS CRAMERIN SUURTEN POIKKEAMIEN TEORIAAN

Osoitamme

$$h(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha h(x) + (1 - \alpha)h(y) \quad (14.0.2)$$

dyadisille luvuille  $\alpha = k2^{-N}$ ,  $k = 0, \dots, 2^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ .

Väite on jo osoitettu kun  $N = 1$   $\alpha = \alpha_1 = 0, \frac{1}{2}, 1$ . Oletamme induktiohypoteesia: (14.0.2) on voimassa kun  $\alpha = k2^{-n}$   $k = 0, \dots, 2^n$ ,  $1 \leq n < N$ . Olkoon

$$\alpha_N := (2k + 1)2^{-N} = \frac{\alpha_{N-1}^- + \alpha_{N-1}^+}{2}$$

jossa  $\alpha_{N-1}^- := k2^{-(N-1)}$ ,  $\alpha_{N-1}^+ := (k + 1)2^{-(N-1)}$ .

$$\begin{aligned} & h(x\alpha_N + y(1 - \alpha_N)) \\ &= h\left(\frac{1}{2}(x\alpha_{N-1}^- + y(1 - \alpha_{N-1}^-)) + \frac{1}{2}(x\alpha_{N-1}^+ + y(1 - \alpha_{N-1}^+))\right) \\ & \quad (\text{keskipiste-konveksisuus}) \\ &\leq \frac{1}{2}h\left(x\alpha_{N-1}^- + y(1 - \alpha_{N-1}^-)\right) + \frac{1}{2}h\left(x\alpha_{N-1}^+ + y(1 - \alpha_{N-1}^+)\right) \leq \\ & \quad (\text{induktio}) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\alpha_{N-1}^-h(x) + (1 - \alpha_{N-1}^-)h(y)\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha_{N-1}^+h(x) + (1 - \alpha_{N-1}^+)h(y)\right) \\ &= \alpha_N h(x) + (1 - \alpha_N)h(y) \end{aligned}$$

eli (14.0.2) on voimassa myös kun  $n = N$  ja induktiosta seuraa kaikille dyadisille luvuille  $\alpha$ .

Olkoon  $\alpha \in [0, 1]$  ja  $x \geq y$ , joten  $h(x) \geq h(y)$ .  $\forall N$  on olemassa dyadinen  $\alpha_N$  jolle  $0 \leq (\alpha_N - \alpha) \leq 2^{-N}$ .

$$\begin{aligned} \alpha h(x) + (1 - \alpha)h(y) &= \alpha_N h(x) + (1 - \alpha_N)h(y) + (\alpha - \alpha_N)(h(x) - h(y)) \\ &\geq h(\alpha_N x + (1 - \alpha_N)y) + (\alpha - \alpha_N)(h(x) - h(y)) \\ &\geq h(\alpha x + (1 - \alpha)y) + (\alpha - \alpha_N)(h(x) - h(y)) \end{aligned}$$

koska  $\alpha_N(x - y) + y \geq \alpha(x - y) + y$ ,  $h$  on ei-vähenevä, ja  $0 \leq (\alpha_N - \alpha) < 2^{-N}$  on mielivaltainen pieni seuraa  $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$\alpha h(x) + (1 - \alpha)h(y) \geq h(\alpha x + (1 - \alpha)y)$$

3. Koska jono  $(-\log(P(\bar{S}_n > x) : n \in \mathbb{N}))$  on subadditiivinen,

$$h(x) = +\infty \iff P(\bar{S}_n > x) = 0 \iff P(X_1 > x) = 0 \quad \square$$

**Määritelmä 14.0.2.**  $\Lambda_X(t) := \log E_P(\exp(tX_1)) = \log m_X(t)$  on momenttigeneroivafunktion logaritmi joka kutsutaan kumulanttigeneroiva funktioksi.

**Määritelmä 14.0.3.** Jono

$$k_n := \left. \frac{d^n}{dt^n} \Lambda_X(t) \right|_{t=0}, \quad n \in \mathbb{N}$$

kutsutaan  $X$  jakauman kumulanttien jonoksi. Kumulantit ovat kertoimet kumulanttigeneroiva funktion Taylorin kehitelmässä:

$$\Lambda_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n t^n}{n!}$$

**Lemma 14.0.2.**  $\Lambda_X(t)$  on konvekksi.

Tod. Kun  $\alpha \in [0, 1]$ , eksponentit  $\alpha^{-1}$  ja  $(1 - \alpha)^{-1}$  ovat konjugatteja, Hölderin epäyhtälöstä seuraa

$$\begin{aligned} \Lambda(\alpha t + (1 - \alpha)s) &:= \log E_P(\exp(\alpha t X) \exp((1 - \alpha)s X)) \\ &\leq \log \left( E_P((\exp(\alpha t X))^{1/\alpha})^\alpha E_P((\exp((1 - \alpha)s X))^{1/(1-\alpha)})^{1-\alpha} \right) = \\ &\alpha \log E_P(\exp(tX)) + (1 - \alpha) \log E_P(\exp(sX)) \quad \square \end{aligned}$$

Olkoon  $P^{(t)}$  todennäköisyysmitan  $P$ :n Esscherin muunnos (8.0.3)jonka suhteen satunnaismuuttujat  $X_i$  ovat edelleen riippumattomia ja samoin jakautuneita

$$\begin{aligned} P^{(t)}(\{X_1 \in B_1\} \cap \{X_2 \in B_2\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\}) &= \\ m_X(t)^{-n} E_P(\exp(tS_n) \mathbf{1}\{X_1 \in B_1\} \mathbf{1}\{X_2 \in B_2\} \dots \mathbf{1}\{X_n \in B_n\}) &= \\ \prod_{i=1}^n E_P(\exp(tX_i - \Lambda_X(t)) \mathbf{1}\{X_i \in B_i\}) & \end{aligned}$$

jossa  $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

## 184LUKU 14. JOHDATUS CRAMERIN SUURTEN POIKKEAMIEN TEORIAAN

Muistetaan että

$$\frac{d}{dt}\Lambda_X(t) = m_X(t)^{-1} \frac{d}{dt}m_X(t) = m_X(t)^{-1} E_P(X_1 \exp(tX_1)) = E_{P(t)}(X_1)$$

jossa integraalin ja derivaatan järjestyksen vaihto on sallittu olettamalla että  $m_X(s) < \infty$  kun  $s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$  jollekin  $\varepsilon > 0$

Olkoon  $x \neq \mu = E_P(X_1)$ . Osoitamme että on olemassa mitanvaihtoparametri  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  jolla  $E_{P(\tilde{t})}(X_1) = x$ .

**Määritelmä 14.0.4.** Määritellään Legendren muunnos

$$\Lambda_X^*(x) = \sup_t \{xt - \Lambda_X(t)\}$$

**Huomautus 14.0.2.** Koska kuvaus  $t \mapsto (xt - \Lambda_X(t))$  on derivoituva ja konkaavi, huomataan että sen maksimi saavutetaan pisteessä  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  jos ja vain jos

$$\frac{d\Lambda_X}{dt}(\tilde{t}) = E_{P(\tilde{t})}(X_1) = x,$$

ja  $\Lambda_X^*(x) = x\tilde{t} - \Lambda_X(\tilde{t})$ .

**Huomautus 14.0.3.** Legendren muunnos on konvekksi: kun  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \Lambda_X^*(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= \sup_t \{ \alpha(xt - \Lambda_X(t)) + (1 - \alpha)(yt - \Lambda_X(t)) \} \leq \\ &= \alpha \sup_t \{ xt - \Lambda_X(t) \} + (1 - \alpha) \sup_s \{ ys - \Lambda_X(s) \} = \alpha \Lambda_X^*(x) + (1 - \alpha) \Lambda_X^*(y) \end{aligned}$$

**Teoreema 14.0.2.** (Cramerin lause) Olkoon satunnaismuuttujat  $(X_n : n \in \mathbb{N})$  riippumattomia ja samoin jakautuneita, jolla  $m_X(t) = E_P(\exp(tX_1)) < \infty \forall t > 0$  (josta seuraa  $E_P^{(t)}(|X_1|^p) < \infty \forall p > 0, t \in \mathbb{R}$ ). Silloin,  $\forall x \geq \mu = E_P(X_1)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n \geq x) = -h(x) = -\Lambda^*(x)$$

Tod. Chebychevin epäyhtälöstä,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} P(\bar{S}_n \geq x) &\leq e^{-tx} E_P(\exp(t\bar{S}_n)) = \exp(-tx) m_X(t/n)^n = \exp(-tx + n\Lambda_X(t/n)) \\ &= \exp(-n(x t/n - \Lambda(t/n))) \end{aligned}$$

kun optimoidaan  $t$ :n suhteen

$$\begin{aligned} P(\bar{S}_n \geq x) &\leq \inf_{t \in \mathbb{R}} \exp(-n(tx - \Lambda(t))) \iff \frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n \geq x) \leq - \sup_{t \in \mathbb{R}} \{tx - \Lambda(t)\} \\ &= -\Lambda^*(x) \quad \forall n, x \geq \mu \end{aligned}$$

Alarajan todistus: Olkoon

$$b = \sup_{t \in \Lambda} \frac{d\Lambda}{dt} = P\text{-esssup}_\omega \{ X(\omega) \}$$

jossa  $m = E_P(X) \leq b$  ja  $b < \infty$  jos ja vain jos satunnaismuuttuja  $X$  on olennaisesti rajoitettu. Silloin osoitettiin jo että kun  $x > b$ ,  $P(\bar{S}_n > x) = 0$ , vauhtifunktio saa arvoa  $h(x) = +\infty$ , ja myös

$$\Lambda^*(t) = \sup_t \{xt - \Lambda(t)\} \geq \sup_t \{(x - b)t\} = +\infty$$

Olkoon sitten  $m < x < b$ . Silloin on olemassa parametri arvo  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  jolla  $\frac{d}{dt}\Lambda(\tilde{t}) = x$ .

Olkoon  $\tilde{P} = P^{(\tilde{t})}$  todennäköisyysmitan  $P$ :n Esscherin muunnos, parametrilla  $\tilde{t} = \tilde{t}(x)$  uskottavuusosamäärällä

$$\frac{dP^{(\tilde{t})}}{dP}(\omega) = \exp(X(\omega)\tilde{t} - \Lambda(\tilde{t}))$$

jolla  $E_{\tilde{P}}(X_1) = x$ . Koska  $\exp(tX_1(\omega)) > 0 \quad \forall t, \omega$ , seuraa  $P(A) = 0 \iff \tilde{P}(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$  ja kun  $X_1, \dots, X_n$  ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita jakaumalla  $P^{(\tilde{t})}$ , uskottavuusosamäärä on

$$\frac{dP}{d\tilde{P}}(\omega) \Big|_{\sigma(X_1, \dots, X_n)} = \left( \frac{d\tilde{P}}{dP}(\omega) \Big|_{\sigma(X_1, \dots, X_n)} \right)^{-1} = \exp(-\tilde{t}S_n(\omega) + n\Lambda_X(\tilde{t}))$$

Huomataan että kumulanttigeneroiva funktio  $\tilde{P}$  mitan suhteen on

$$\tilde{\Lambda}_X(s) := \log E_{\tilde{P}}(\exp(sX_1)) = \log E_P(\exp((s + \tilde{t}))) - \Lambda_X(\tilde{t}) = \Lambda_X(\tilde{t} + s) - \Lambda_X(\tilde{t})$$

Mitan vaihto kaavalla

$$\begin{aligned} P(|\bar{S}_n - a| < \varepsilon) &= E_{\tilde{P}}(\exp(-\tilde{t}S_n(\omega) + n\Lambda_X(\tilde{t})) \mathbf{1}(|\bar{S}_n - a| < \varepsilon)) \\ &\geq \exp(n(\Lambda_X(\tilde{t}) - (a + \varepsilon)\tilde{t})) \tilde{P}(|\bar{S}_n - a| < \varepsilon) \end{aligned}$$

186LUKU 14. JOHDATUS CRAMERIN SUURTEN POIKKEAMIEN TEORIAAN

Koska oletetusti  $E_P(\exp(tX)) < \infty$  myös  $\tilde{t}(a)$ :n ympärillä, tästä seuraa  $E_{\tilde{P}}(|X|^p) < \infty \forall p > 0$ , ja heikon suurten lukujen lain nojalla,  $\forall \varepsilon > 0$  seuraa

$$\begin{aligned} \tilde{P}(|\bar{S}_n - a| < \varepsilon) &\rightarrow 1 \quad \text{kun } n \rightarrow \infty, \\ \implies \frac{1}{n} \log P(|\bar{S}_n - a| < \varepsilon) &\geq \Lambda_X(\tilde{t}) - (a + \varepsilon)\tilde{t} + o(1/n) \end{aligned}$$

Kun  $a = x + \varepsilon$ , seuraa,  $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n \geq x) \geq \frac{1}{n} \log P(x \leq \bar{S}_n \leq x + 2\varepsilon) \geq \Lambda_X(\tilde{t}) - (x + 2\varepsilon)\tilde{t} + o(1/n)$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n \geq x) &\geq \Lambda_X(\tilde{t}) - (x + 2\varepsilon)\tilde{t} \geq -\sup_t \{(x + 2\varepsilon)t - \Lambda_X(t)\} \\ &= -\Lambda_X^*(x + 2\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

ja koska  $\Lambda_X^*(t)$  on konvekksi ja siksi jatkuva, siitä seuraa

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n \geq x) \geq -\Lambda_X^*(x) \quad \square$$

**Huomautus 14.0.4.** *Katkaisemalla  $X$  satunnaismuuttujan jakaumaa voidaan luopua oletuksesta  $m_X(t) < \infty \forall t \in \mathbb{R}$ , oletus  $X_1 \in L^1(P)$  riittää (Lause 27.3 Kallenbergin kirjasta, *Foundations of modern probability*).*

**Teoreema 14.0.3.** *(Dini) Olkoon  $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$  jono jatkuvia funktioita jossa  $K$  on kompakti topologinen avaruus, esimerkiksi  $K = [-T, T]$ .*

*Kun  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, x \in K$ ,  $f_n(x) \uparrow f(x) \in \mathbb{R}$  pistettäin. Jos raja-funktio  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva, silloin konvergenssi on tasainen*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \{f(x) - f_n(x)\} = 0$$

**Tod.** Koska funktio  $(f - f_n)$  on jatkuva,  $\forall \varepsilon > 0$

$$E_{\varepsilon, n} = \{x : (f(x) - f_n(x)) < \varepsilon\}$$

on avoin joukko, ja koska  $f_n(x) \uparrow f(x) \forall x \in K$ , seuraa että  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{\varepsilon, n} = K$ . Koska  $K$  on kompakti, on olemassa  $N(\varepsilon)$  jolla  $\bigcup_{n \leq N(\varepsilon)} E_{\varepsilon, n} = K$ . Koska  $f_n$  jono on monotoninen, seuraa että  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$  jolla

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{N(\varepsilon)}(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in K, n \geq N(\varepsilon) \quad \square$$

**Lemma 14.0.3.** *Olkoon  $f(t), g(t)$  jatkuvia funktioita kompaktissa  $K$ , ja*

$$f^* = \sup_{t \in K} f(t), \quad g^* = \sup_{t \in K} g(t).$$

*Silloin*

$$|f^* - g^*| \leq \sup_{t \in K} |f(t) - g(t)| = \|f - g\|_\infty$$

Tod. Epäyhtälö on triviaali kun  $f^* = g^*$ . Kun  $f^* > g^*$ ,  $\exists t^* \in K$  jolla  $f^* = f(t^*) > g(t^*) > g^*$ . Siitä seuraa

$$|f^* - g^*| \leq |f(t^*) - g(t^*)| \leq \|f - g\|_\infty$$

**Seuraus 14.0.1.** *Kun  $X_1 \in L^1(P)$ , Cramerin lause pätee, myös silloin kun  $E_P(\exp(tX)) = \infty$  jollekin  $t > 0$ .*

**Tod.** Olkoon  $x > \mu = E_P(X_1)$ . Cramerin lauseen yläraja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n > x) \leq -\Lambda^*(x)$$

seuraa joka tapauksessa Chebychevin epäyhtälöstä.

Olkoon

$$X_n^{(M)}(\omega) = (X_n(\omega) \wedge M) \uparrow X_n(\omega) \text{ kun } M \uparrow \infty,$$

$$\bar{S}_n^{(M)} = \frac{1}{n} (X_1^{(M)} + \dots + X_n^{(M)})$$

Kun  $x > \mu = E_P(X_1)$

$$\frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n > x) \geq \frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n^{(M)} > x) \rightarrow -(\Lambda^{(M)})^*(x) \quad \forall M > 0.$$

Väite on todistettu kun osoitamme että  $(\Lambda^{(M)})^*(x) \downarrow \Lambda^*(x)$  kun  $M \rightarrow \infty$ .

Monotonisen konvergenssilauseesta seuraa  $\forall t \geq 0$

$$\Lambda^{(M)}(t) = \log E_P(\exp(t(X_1 \wedge M))) \uparrow \Lambda(t) = \log E_P(\exp(tX_1)) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

jossa  $\Lambda^{(M)}(t) < +\infty \forall M, t \geq 0$ , ja Dinin lauseesta seuraa että suppeneminen on tasainen kompakteissa  $K$  joissa  $\Lambda(t) < \infty$ .

Kun kiinnitetään  $x > m$ , koska  $\Lambda^{(M)} \uparrow \Lambda^{(M)}$ , on olemassa  $K < \infty$  jolla

$$\Lambda^*(x) = \sup_t \{xt - \Lambda(t)\} = \sup_{t \in [0, K]} \{xt - \Lambda(t)\} =$$

$$(\Lambda^{(M)})^*(x) = \sup_t \{xt - \Lambda^M(t)\} = \sup_{t \in [0, K]} \{xt - \Lambda^M(t)\},$$

ja Dinin lemmasta 14.0.3 seuraa että  $(\Lambda^{(M)})^*(x) \downarrow \Lambda^*(x)$  kaikissa  $x > m$ .

188LUKU 14. JOHDATUS CRAMERIN SUURTEN POIKKEAMIEN TEORIAAN

# Luku 15

## Jakaumien konvergenssi

Olkoon  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jono todennäköisyysavaruuksia, ja  $X_n : \Omega_n \rightarrow (S, \mathcal{B}(S))$  satunnaismuuttujien jono jossa  $(S, \rho)$  on metrinen avaruus, esimerkiksi  $S = \mathbb{R}^d$ , Olkoon  $X(\omega)$  satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Määritelmä 15.0.1.** Sanotaan että jono  $X_n$  suppenee heikosti tai jakauman mielessä kohti  $X$ :n ja merkitään  $X \xrightarrow{d} X$ , kun

$$\forall f \in C_b(S; \mathbb{R}) = \{f : S \mapsto \mathbb{R}, \text{ jatkuva ja rajoitettu} \}, \\ E_{P_n}(f(X_n)) \rightarrow E_P(f(X)) \quad \text{kun } n \rightarrow \infty$$

Huomataan että heikko konvergenssin käsite koskee vain satunnaismuuttujien jakaumia, siksi soveltuu myös tapaukseen jossa satunnaismuuttujat eivät elä samalla todennäköisyysavaruudella. Kun  $\Omega_n = \Omega$ ,  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$  ja  $P_n = P \forall n$ , nähdään myös että heikko konvergenssi on kaikkien heikompi konvergenssikäsite:

**Lemma 15.0.1.** Kun  $X_n \xrightarrow{P} X$  (stokastisesti) ja  $f$  on jatkuva seuraa että  $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$ .

**Tod.** Kaikille alijonolle  $(n_k)$  on olemassa alijono  $(n_{k_l})$  jolla  $X_{n_{k_l}}(\omega) \rightarrow X(\omega)$   $P$ -melkein varmasti. Koska  $f$  on jatkuva seuraa myös että samalla alijonolla  $f(X_{n_{k_l}}(\omega)) \rightarrow f(X(\omega))$ . Tästä seuraa  $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$ .

**Lause 15.0.1.** Kun  $X_n \xrightarrow{P} X$  (stokastisesti) seuraa että  $X_n \xrightarrow{w} X$  (jakauman mielessä)

**Tod.** Olkoon  $f$  jatkuva ja rajoitettu. Seuraa lemmasta että  $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$ . Koska  $f$  on rajoitettu jono  $\{f(X_n) : n \in \mathbb{N}\}$  on tasaisesti integroituva ja siksi  $f(X_n) \xrightarrow{L^1(P)} f(X)$ , josta seuraa  $E_P(f(X_n)) \rightarrow E_P(f(X))$ .

Osoitamme vielä lauseessa 15.0.3 että stokastinen konvergenssi seuraa jakauman konvergenssista ainoastaan kun rajajakauma on degeneroitu,

**Lause 15.0.2.** Olkoon  $X_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  satunnaismuuttujat,  $F_n(t) = P_n(X_n \leq t)$ ,  $F(t) = P(X \leq t)$ . Silloin

$$X_n \xrightarrow{w} X \iff F_n(t) \rightarrow F(t) \quad \forall t : F(t-) = F(t)$$

**Tod.**  $\implies$  Approksimoidaan indikaattorin  $x \mapsto \mathbf{1}(x \leq t)$  jatkuvalla funktiolla  $h_\varepsilon$  jossa  $\varepsilon > 0$

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & t \geq x \\ 1 - \frac{t-x}{\varepsilon} & t < x < t + \varepsilon \\ 0 & t + \varepsilon < x \end{cases}$$

Huomataan että

$$\mathbf{1}(x \leq t) \leq h_\varepsilon(x) \leq \mathbf{1}(x \leq t + \varepsilon)$$

josta seuraa

$$\begin{aligned} F_n(t) &\leq E_{P_n}(h_\varepsilon(X_n)) \rightarrow E_P(h_\varepsilon(X)) \leq F(t + \varepsilon) \\ \implies \limsup_n F_n(t) &\leq F(t + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0, \\ \implies \limsup_n F_n(t) &\leq F(t+) = F(t) \end{aligned}$$

koska  $t \mapsto F(t)$  on oikealta jatkuva.

Samoin valitsemalla  $g_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(x + \varepsilon)$ , koska

$$\mathbf{1}(x < t) \geq g_\varepsilon(x) \geq \mathbf{1}(x \leq t - \varepsilon)$$

seuraa

$$\begin{aligned} F_n(t-) &\geq E_{P_n}(g_\varepsilon(X_n)) \rightarrow E_P(g_\varepsilon(X)) \geq F(t - \varepsilon) \\ \implies \liminf_n F_n(t-) &\geq F(t - \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \implies \liminf_n F_n(t-) &\geq F(t-) \end{aligned}$$

Kun  $F(t) = F(t-)$  saadaan

$$\limsup_n F_n(t) \leq F(t) = F(t-) \leq \liminf_n F_n(t-)$$

josta seuraa että  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t)$ .

Toinen implikaatio seuraa Skorokhodin esityksestä.

### 15.0.1 Skorokhodin esitys

Olkoon  $t \mapsto F(t)$  ei-vähenevä, oikealta jatkuva,  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$ . Kanonisessa todennäköisyysavaruudessa  $\Omega = [0, 1]$ , joka on varustettu Borelin  $\sigma$ -algebralla ja tasajakaumalla  $P$  (Lebesgue mitta), voidaan rakentaa satunnaismuuttuja  $X(\omega)$  jolla  $P(\omega : X(\omega) \leq t) = F(t)$ .

Määritellään kertymäfunktion  $F$ :n yleistetyt käänteisfunktiot

$$X^+(\omega) := \inf\{t : F(t) > \omega\} = \sup\{t : F(t) \leq \omega\}, \quad (15.0.1)$$

$$X^-(\omega) := \inf\{t : F(t) \geq \omega\} = \sup\{t : F(t) < \omega\} \quad (15.0.2)$$

- $X^+(\omega) \geq X^-(\omega)$  ovat ei väheneviä  $\omega$ :n suhteen
- $\omega \mapsto X^+(\omega)$  on oikealta jatkuva ja  $\omega \mapsto X^-(\omega)$  on vasemmalta jatkuva.
- Huomataan myös että  $F(X^-(\omega)-) \leq \omega \leq F(X^+(\omega))$ , koska  $F$  on oikealta jatkuva.

Osoitamme että  $P(\omega : X^-(\omega) \leq z) = P(\omega : X^+(\omega) \leq z) = F(z)$ ,

ja  $P(X^- = X^+) = 1$ . Koska

$$X^-(\omega) \leq z \iff \omega \leq F(X^-(\omega)) \leq F(z),$$

ja  $P$  on Lebesguen todennäköisyysmitta, seuraa

$$F(z) = P([0, F(z)]) = P(\omega : \omega \leq F(z)) = P(\omega : X^-(\omega) \leq z).$$

Koska  $X^+(\omega) \geq X^-(\omega) \geq X^+(\omega') \geq X^-(\omega')$  kun  $\omega > \omega'$ , seuraa

$$X^+(\omega) \geq X^-(\omega) \geq X^+(\omega-) := \lim_{\omega' \uparrow \omega} X^+(\omega'),$$

siksi joukko  $\{\omega : X^-(\omega) < X^+(\omega)\}$  on korkeintaan numeroituva ja

$P(X^- < X^+) = 0$  ( $P$  on Lebesguen mitta). Tästä seuraa

$$P(X^+ \leq z) = P(\{X^- \leq z\} \cap \{X^+ = X^-\}) = P(X^- \leq z) = F(z)$$

**Lauseen 15.0.2 implikaation  $\Leftarrow$  todistus** Olkoon  $z \in \mathbb{R}$  jolla  $F(z-) = F(z)$ , ja  $F_n(z) \rightarrow F(z)$ . Olkoon  $X_n^+(\omega), X_n^-(\omega)$  kertymäfunktion  $F_n$  yleistetyt käänteisfunktiot kuten kaavoissa 15.0.1-2.

Koska  $X^+(\omega) < z \iff \omega < F(z)$ , kun  $n$  on tarpeeksi suuri  $\omega < F_n(z)$  ja tämä tapahtuu jos ja vain jos  $X_n^+(\omega) < z$ . Silloin,  $\limsup_n X_n^+(\omega) \leq z$ . Tästä seuraa

$$\limsup_n X_n^+(\omega) \leq X^+(\omega)$$

muuten olisi olemassa  $z$  jolla

$$\limsup_n X_n^+(\omega) > z > X^+(\omega),$$

josta seuraa ristiriita.

Jos  $X^-(\omega) > z$  seuraa  $\omega > F(z)$  ja kun  $n$  on tarpeeksi suuri  $\omega > F_n(z)$  josta seuraa  $X_n^-(\omega) \geq z$ . Silloin  $\liminf_n X_n^-(\omega) \geq X^-(\omega)$ .

$$X^-(\omega) \leq \liminf_n X_n^-(\omega) \leq \liminf_n X_n^+(\omega) \leq \limsup_n X_n^+(\omega) \leq X^+(\omega)$$

Joukossa  $\{\omega : X^-(\omega) = X^+(\omega)\}$  jolla on todennäköisyys  $P = 1$ , pätee

$$\lim_n X_n^+(\omega) = \lim_n X_n^-(\omega) = X^+(\omega) = X^-(\omega)$$

Siis olemme rakentaneet satunnaismuuttujan  $X(\omega) = X^\pm(\omega)$  ja satunnaismuuttujen jonon  $X_n(\omega) = X_n^\pm(\omega)$  (ei ole väliä kumpaa versiota valitaan) samassa todennäköisyysavaruudessa jolla

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \quad P\text{-melkein varmasti}, \quad P(X_n \leq t) = F_n(t), \quad P(X \leq t) = F(t)$$

Jos  $f(x)$  on rajoitettu ja jatkuva testifunktio, seuraa dominoidun konvergenssin lauseesta  $E_P(f(X_n)) \rightarrow E_P(f(X))$ .  $\square$

**Varoitus:** Olkoon  $X_n, n \in \mathbb{N}$  ja  $X(\omega)$  satunnaismuuttujat jotka elävät samassa todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , jolla  $X_n \xrightarrow{d} X$ .

Koska  $P(X_n \leq t) = F_n(t) \rightarrow F(t) = P(X \leq t) \forall t$  jolla  $F(t) = F(t-)$  Skorokhodin esityksellä saadaan kanonisessa todennäköisyysavaruudessa  $\tilde{\Omega} = [0, 1]$  varustettuna Borelin  $\sigma$ -algebralla ja Lebesgue mitalla  $\tilde{P}$ ,

satunnaismuuttumien jono  $\tilde{X}_n(\tilde{\omega})$  ja satunnaismuuttujan  $\tilde{X}(\tilde{\omega})$  jotka elävät kanonisessa todennäköisyysavaruudessa  $\tilde{\Omega} = [0, 1]$  varustettuna Borelin  $\sigma$ -algebralla ja Lebesgue mitalla  $\tilde{P}$ , joilla

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\tilde{X}_n \in B) &= P(X_n \in B) \text{ ja } \tilde{P}(\tilde{X} \in B) = P(X \in B), \\ \tilde{X}_n(\tilde{\omega}) &\rightarrow \tilde{X}(\tilde{\omega}) \quad \tilde{P} \text{ m.v} \end{aligned}$$

Tämä ei kerro yhtään mitään alkuperäisestä jonon  $X_n(\omega)$   $P$ -melkein varma konvergenssista alkuperäisessä todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Skorokhodin esityksessä satunnaismuuttujien  $(\tilde{X}(\omega), \tilde{X}_n(\omega), n \in \mathbb{N})$  yhteinen jakauma sattaa olla aivan eri kun alkuperäisten satunnaismuuttujien  $(X(\omega), X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$  yhteistä jakaumaa, vaikka yksi-ulotteiset marginaalijakaumat täsmävät. Vaikka  $\tilde{X}_n(\tilde{\omega}) \rightarrow \tilde{X}(\tilde{\omega})$   $\tilde{P}$ -melkein varmasti kanonisessa avaruudessa  $\tilde{\Omega}$ , siitä ei saa tehdä johtopäätöksiä alkuperäisen jonon  $X_n(\omega)$  stokastisesta konvergenssista alkuperäisessä todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Esimerkki** Todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  olkoon  $(G_i(\omega) : i \in \mathbb{N})$  riippumattomia ja samoin jakautuneita standardi gaussisia satunnaismuuttujia, jolla  $E_P(G_1) = 0, E_P(G_1^2) = 1$ .

$$\text{Olkoon } \hat{S}_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2^n}}(G_1(\omega) + \dots + G_{2^n}(\omega))$$

Koska  $S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_1(\omega) + G_2(\omega))$  on standardi gaussinen (harjoitustettava) seuraa induktivisesti että myös  $\hat{S}_n$  on standardi gaussinen,  $P(\hat{S}_n \in B) = P(G_1 \in B)$ , ja koska Gaussinen jakauma säilyy on selvää että  $\hat{S}_n \xrightarrow{d} G_1$  jakauman mielessä, eikä kuitenkaan suppene stokastisesti.

Muuten voitaisiin kirjoittaa

$$\widehat{S}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{S}_n + \widehat{S}'_n)$$

jossa  $\widehat{S}'_n = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}(G_{2^{n-1}+1} + \dots + G_{2^n}) \perp\!\!\!\perp \widehat{S}_n$ .

Koska jono  $(\widehat{S}_n)$  olisi stokastisesti Cauchy, Koska  $\forall \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(|\widehat{S}_{n+1} - \widehat{S}_n| \geq \varepsilon) &= P(|\widehat{S}'_n - (\sqrt{2} - 1)\widehat{S}_n| \geq \sqrt{2}\varepsilon) \\ &= P(|G_1 - (\sqrt{2} - 1)G_2| \geq \sqrt{2}\varepsilon) = \eta > 0 \end{aligned}$$

jossa  $\eta > 0$  ei riipu  $n$ :sta, jono  $(\widehat{S}_n(\omega))$  ei voi olla stokastisesti Cauchy  $\square$

**Määritelmä 15.0.2.** Olkoon  $G, F$  todennäköisyysjakaumat todennäköisyysavaruudessa  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Niiden totaali-variaatio etäisyys on

$$d_{TV}(F, G) := \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |F(B) - G(B)|$$

Kun  $(F_n : n \in \mathbb{N})$  ja  $F$  ovat todennäköisyysjakaumien kertymäfunktiot ja  $F_n \xrightarrow{TV} F$  totaali-variaation mielessä, kun valitaan  $B = (-\infty, t]$  seuraa että  $F_n \xrightarrow{d} F$  heikon konvergenssin mielessä.

**Lemma 15.0.2.** (Scheffe) Oletetaan että kaikille jakaumille  $F$  ja  $(F_n : n \in \mathbb{N})$  on tiheydet  $f(t), f_n(t)$  yhteisen mitan  $\mu(dt)$  suhteen. Silloin

1.

$$d_{TV}(F_n, F) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \mu(dt) \quad (15.0.3)$$

2. Jos  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$   $\mu$ -melkein kaikille  $t$ , seuraa  $d_{TV}(F_n, F) \rightarrow 0$ .

Todistus  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$0 = 1 - 1 = \int_{\mathbb{R}} (f_n(t) - f(t)) \mu(dt) = \int_B (f_n(t) - f(t)) \mu(dt) + \int_{B^c} (f_n(t) - f(t)) \mu(dt)$$

josta seuraa

$$\left| \int_B (f_n(t) - f(t)) \mu(dt) \right| = \left| \int_{B^c} (f_n(t) - f(t)) \mu(dt) \right|$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned} 2|F_n(B) - F(B)| &= \left| \int_B (f_n(t) - f(t)) \mu(dt) \right| + \left| \int_{B^c} (f_n(t) - f(t)) \mu(dt) \right| \\ &\leq \int_B |f_n(t) - f(t)| \mu(dt) + \int_{B^c} |f_n(t) - f(t)| \mu(dt) = \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \mu(dt) \end{aligned}$$

Huomataan että kun  $B = \{t : f_n(t) \geq f(t)\}$ , epäyhtälöstä tulee yhtälö, ja (15.0.3) seuraa.

Koska  $f_n(t) \rightarrow f(t)$   $\mu$ -melkein kaikkialla, seuraa että  $(f(t) - f_n(t))^+ \rightarrow 0$   $\mu$ -melkein kaikkialla jossa  $0 \leq (f(t) - f_n(t))^+ \leq f(t)$  ja  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ . Lebesguen dominoidun konvergensin lauseesta seuraa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2d_{TV}(F, F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f(t) - f_n(t)| \mu(dt) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B (f(t) - f_n(t)) \mu(dt) = 0 \quad \square$$

**Esimerkki 15.0.1.** Olkoon  $X_n$  binomi-jakautunut parametreilla  $n$  ja  $p_n$

$$P_n(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad \text{jossa oletetaan } \lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0.$$

Silloin  $X_n \xrightarrow{d} X$  jossa  $X$  on Poisson( $\lambda$ ) jakautunut. Koska

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \dots \frac{(n-k+1)}{n} \frac{1}{k!} (np_n)^k \left(1 - \frac{(n-k)p_n}{(n-k)}\right)^{n-k}$$

$$\text{ja } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \exp(-\lambda),$$

Kun  $k$  on kiinteä ja  $n \rightarrow \infty$ ,  $np_n \rightarrow \lambda$ ,  $\frac{(n-k)}{n} \rightarrow 1$ ,  $(n-k) \rightarrow \infty$ , josta seuraa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \lambda^k \exp(-\lambda) = P(X = k)$$

jossa  $X$  on Poisson( $\lambda$ ) jakautunut.

**Esimerkki 15.0.2.** Olkoon  $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$   $P$ -riippumattomia ja samoin jakautuneita 1-eskponentiaalisia satunnaismuuttujia, jolla

$$P(X > t) = \exp(-t), \quad \forall t \geq 0,$$

ja olkoon

$$X_n^*(\omega) := \max\{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$

jonon juokseva maksimi. Silloin

$$(X_n^* - \log n) \xrightarrow{d} Y$$

jossa  $P(Y \leq t) = \exp(-e^{-t})$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  kutsutaan Gumbelin standardisoitu ääriarvo-jakaumaksi.

*Todistus*

$$\begin{aligned} P(X_n^* \leq t + \log n) &= P(X_k \leq t + \log n, k = 1, \dots, n) \\ &= \left\{ 1 - \exp(-(t + \log n)) \right\}^n = \left\{ 1 - \frac{\exp(-t)}{n} \right\}^n \rightarrow \exp(-e^{-t}) \text{ kun } n \rightarrow \infty \quad \square \end{aligned}$$

**Lause 15.0.3.** Jos  $\forall n$   $X_n$  on satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$  ja  $X_n \xrightarrow{d} c$  (jakauman mielessä) jossa  $c$  on vakio, seuraa että  $X_n \xrightarrow{P_n} c$  (stokastisesti), eli

$$P_n(|X_n - c| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{kun } n \rightarrow \infty$$

**Tod.** Koska

$$P_n(X_n \leq t) = F_n(t) \rightarrow F(t) = \mathbf{1}(c \leq t) \text{ kun } t \neq c.$$

seuraa  $\forall \varepsilon > 0$

$$P_n(|X_n - c| \leq \varepsilon) = P_n(X_n \leq c + \varepsilon) - P_n(X_n \leq c - \varepsilon) \rightarrow F(c + \varepsilon) - F(c - \varepsilon) = 1 - 0 \quad \square$$

Seuraavaksi yleistetään lause 15.0.2 satunnaisvektoreille.

**Lemma 15.0.3.** (Portmanteau) Olkoon  $X_n \in \mathbb{R}^d$  satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruuksissa  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$  ja  $X \in \mathbb{R}^d$  satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruuksissa  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Seuraavat lauseet ovat yhtä päteviä:

1.  $P_n(X_n \leq x) \rightarrow P(X \leq x)$  kaikissa pisteissä jossa  $F_X(x) = P(X \leq x)$  on jatkuva.
2.  $E_{P_n}(f(X_n)) \rightarrow E_P(f(X))$  kaikille jatkuville rajoitetuille funktioille  $f$ .
3.  $E_{P_n}(f(X_n)) \rightarrow E_P(f(X))$  kaikille rajoitetuille Lipschitz funktioille  $f$ .
4.  $\liminf_n E_{P_n}(f(X_n)) \geq E_P(f(X))$  kaikille ei-negatiivisille jatkuville funktioille  $f$ .
5.  $\liminf_n P_n(X_n \in U) \geq P(X \in U)$  kaikille avoimille  $U \subseteq \mathbb{R}^d$ .

6.  $\limsup_n P_n(X_n \in C) \leq P(X \in C)$  kaikille suljetuille  $C \subseteq \mathbb{R}^d$ .
7.  $P_n(X_n \in B) \rightarrow P(X \in B)$  kaikille  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  jolla  $P(X \in \partial B) = 0$ , jossa  $\partial B = (\overline{B} \setminus \mathring{B})$  on joukon reuna,  $\overline{B} = \left( \bigcap_{B \subseteq C \text{ suljettu}} C \right)$  on joukon sulkeuma,  $\mathring{B} = \left( \bigcup_{B \supseteq U \text{ avoin}} U \right)$  on joukon sisus.

**Huomautus 15.0.1.** Ei ollut ketään kuuluisaa ranskalaista matematiikkaa nimeltä Portmanteau. Ranskankieleinen sana tarkoittaa naulakko, lemman nimi viittaa sen käyttökelpoisuuteen.

**Tod** (1)  $\implies$  (2) Oletetaan ensin että  $F_X$  on jatkuva. Oletuksesta (1) seuraa  $P_n(X_n \in I) \rightarrow P(X \in I)$  kaikille suorakulmaisille tulojoukoille  $I$ . Olkoon  $\varepsilon > 0$  ja  $I$  suorakulmainen kompakti joukko jolla  $P(X \in I) > (1 - \varepsilon)$ . Koska  $f$  on jatkuva, se on tasaisesti jatkuva kompaktissa  $I$ . On olemassa äärellinen ositus  $I = \bigcup_{j=1}^m I_j$  jossa  $I_j$  ovat suorakulmaisia joukkoja ja  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  kun  $x, y \in I_j$  jollekin  $j$ . Valitaan  $x_j \in I_j \forall j = 1, \dots, m$  ja määrtiellään yksinkertainen funktio

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^m f(x_j) \mathbf{1}_{I_j}(x)$$

Koska  $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ , seuraa

$$\begin{aligned} |E_P(f(X)) - E_P(f_\varepsilon(X))| &< \varepsilon + P(X \notin I) < 2\varepsilon \\ |E_{P_n}(f(X_n)) - E_{P_n}(f_\varepsilon(X_n))| &< \varepsilon + P_n(X_n \notin I) \quad \forall n, \\ &\leq 2\varepsilon \text{ kun } n \text{ on tarpeeksi suuri.} \end{aligned}$$

Myös

$$\begin{aligned} |E_{P_n}(f_\varepsilon(X_n)) - E_P(f_\varepsilon(X))| &< \sum_{j=1}^m |f(x_j)| |P_n(X_n \in I_j) - P(X \in I_j)| \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{j=1}^m |P_n(X_n \in I_j) - P(X \in I_j)| \rightarrow 0 \text{ kun } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Kolmion epäyhtälön avulla

$$\begin{aligned} & |E_{P_n}(f(X_n)) - E_P(f(X))| \leq \\ & |E_{P_n}(f(X_n)) - E_{P_n}(f_\varepsilon(X_n))| + |E_{P_n}(f_\varepsilon(X_n)) - E_P(f_\varepsilon(X))| + |E_P(f_\varepsilon(X)) - E_P(f(X))| \\ & \leq 5\varepsilon \quad \text{kun } n \text{ on tarpeeksi suuri, ja väite seuraa.} \end{aligned}$$

Sanotaan  $B$  on  $F_X$  jatkuvuuden joukko jos  $P(X \in \partial B) = 0$ . Kun  $F_X(x)$  ei ole jatkuva, edellinen argumentti menee läpi jos voidaan valita kaikki suorakulmaisia joukkoja  $I$  ja  $I_k$  jatkuvuuden joukoiksi. Tämä on mahdollista koska jokaiselle satunnaisvektorin  $X(\omega) = (X^{(1)}(\omega), \dots, X^{(d)}(\omega))$  koordinaateille, joukko

$$\left\{ r \in \mathbb{R} : P(X^{(i)}(\omega) = r) > 0 \right\}$$

on korkeintaan numeroituva. Siis on olemassa joukkoja  $Q_i \subseteq \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$  joilla on numeroituva komplementti ja jokainen suorakulmainen joukko joilla on kulmat tulojoukossa  $Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_d$  on kertymäfunktion  $F_X(x)$  jatkuvuuden joukko.

(3)  $\implies$  (5) Olkoon  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  avoin. Määritellään Lipschitz funktioiden jono

$$f_n(x) := nd(x, U^c) \wedge 1 \quad \text{jolla } 0 \leq f_n(x) \uparrow \mathbf{1}_U(x)$$

jolla  $|f_n(x) - f_n(y)| \leq n|x - y|$ . Tässä  $d(x, A) := \inf_{y \in A} |x - y|$ . Kaikille  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\liminf_n P_n(X_n \in U) \geq \liminf_n E_{P_n}(f_m(X_n)) = E_P(f_m(X))$$

Kun  $m \uparrow \infty$ , monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa  $E_P(f_m(X)) \uparrow P(X \in U)$ .

5)  $\iff$  6) ottaamalla joukkojen komplementteja.

(5) + (6)  $\implies$  (7)

$$P(X \in \overset{\circ}{B}) \leq \liminf_n P_n(X_n \in \overset{\circ}{B}) \leq \limsup_n P_n(X_n \in \overline{B}) \leq P(X \in \overline{B})$$

Jos  $P(X \in \partial B) = 0$ , kaikki epäyhälöt ovat yhtälöitä, ja  $P(X \in B) = \lim_n P_n(X_n \in B)$ .

(7)  $\implies$  (1) Jos  $x$  on kuvauksen  $x \mapsto P(X \leq x)$  jatkuvuuden piste, suorakulmainen joukko  $B = (-\infty, x] = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_d]$  on jatkuvuuden joukko.

(2)  $\implies$  (4) Koska  $0 \leq f(x), \forall k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_n}(f(X_n) \wedge k) = E_P(f(X) \wedge k),$$

ja monotonisen konvergenssin lauseesta  $E_P(f(X) \wedge k) \uparrow E_P(f(X))$  kun  $k \uparrow \infty$ .

Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Kun  $k$  on tarpeeksi suuri,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_{P_n}(f(X_n)) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} E_{P_n}(f(X_n) \wedge k) = E_P(f(X) \wedge k) \geq E_P(f(X)) + \varepsilon$$

ja väite on osoitettu koska  $\varepsilon$  on mielivaltainen.

(4)  $\implies$  (2) Olkoon  $f(x)$  jatkuva ja rajoitettu.

Voidaan olettaa  $0 \leq f(x) \leq \|f\|_\infty$ , muuten osoitetaan erikseen väite rajoitetuille jatkuville funktioille  $f^+(x), f^-(x) \geq 0$ .

Koska  $g(x) := \|f\|_\infty - f(x) \geq 0$ , seuraa

$$\|f\|_\infty - \limsup_n E_{P_n}(f(X_n)) = \liminf_n E_{P_n}(g(X_n)) \geq E_P(g(X)) = \|f\|_\infty - E_P(f(X))$$

ja koska  $\liminf_n E_{P_n}(f(X_n)) \geq E_P(f(X))$ , seuraa

$$E_P(f(X)) \geq \limsup_n E_{P_n}(f(X_n)) \geq \liminf_n E_{P_n}(f(X_n)) \geq E_P(f(X)) \quad \square$$

**Teoreema 15.0.1.** (Jatkuvan kuvauksen lause)

Olkoon  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  jolla  $P(X \in C) = 1$ , ja  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  joka on jatkuva kaikissa pisteissä  $x \in C$ . Silloin jos  $X_n \xrightarrow{d} X$ , seuraa  $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$ .

**Tod.** Jos  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva ja rajoitettu,  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  on myös jatkuva ja rajoitettu, ja koska  $X_n \xrightarrow{d} X$ , seuraa

$$E_{P_n}(f(g(X_n))) \longrightarrow E_P(f(g(X))). \quad \square$$

**Seuraus 15.0.1.** (Slutskyn lemma) Jos  $(X_n, Y_n)$  ovat satunnaisuuttajat todennäköisyysavaruuksissa  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$  ja  $X_n \xrightarrow{d} c, Y_n \xrightarrow{d} Y$ , seuraa

$$1. (X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (c, Y)$$

$$2. (X_n + Y_n) \xrightarrow{d} (c + Y)$$

$$3. X_n Y_n \xrightarrow{d} cY$$

$$4. \frac{Y_n}{X_n} \xrightarrow{d} \frac{Y}{c} \text{ kun } c \neq 0.$$

**Huomautus 15.0.2.** Huomataan, jos  $X_n \xrightarrow{d} X$  ja  $Y_n \xrightarrow{d} Y$ , yleisesti ei seuraa että pareina  $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$ , koska ei ole mitään tietoa  $(X_n, Y_n)$ :n ja  $(X, Y)$ :n yhteisistä jakaumista. Tämä pätee pelkästään kun jommankumman jakauman raja on pistemassa.

**Tod** (1). Huomataan ensin että

$$(c, Y_n) \xrightarrow{d} (c, Y).$$

tämä seuraa koska jos  $f(x, y)$  jatkuva ja rajoitettu testi-funktio, väite seuraa koska kuvaus  $y \mapsto f(c, y)$  on jatkuva ja rajoitettu.

Jos  $f(x, y)$  on jatkuva ja rajoitettu,

$$\begin{aligned} & |E_{P_n}(f(X_n, Y_n)) - E_P(f(c, Y))| \leq \\ & |E_{P_n}(f(X_n, Y_n) - f(c, Y_n))| + |E_{P_n}(f(c, Y_n)) - E_P(f(c, Y))| \end{aligned}$$

jossa  $E_{P_n}(f(c, Y_n)) \rightarrow E_P(f(c, Y))$ .

Olkoon  $Z_n := (X_n, Y_n) - (c, Y_n)$ , osoitamme että  $Z_n \xrightarrow{d} \mathbf{0}$ .

Tämä seuraa Portmanteau lemman pykälöistä (5),(6)

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad 1 &= \liminf_n P(|(X_n, Y_n) - (c, Y_n)| < \varepsilon), \\ 0 &= \limsup_n P(|(X_n, Y_n) - (c, Y_n)| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

on tosi koska  $(X_n - c) \xrightarrow{P_n} 0$ , eli  $\lim_n P(|X_n - c| \geq \varepsilon) = 0$ .

Portmanteaun lemman pykälä soveltuu sitten avoimille joukolle  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , jossa

$$\liminf_n P(|(X_n, Y_n) - (c, Y_n)| \in U) = \mathbf{1}_U(\mathbf{0}) = P(\mathbf{0} \in U)$$

(2),(3),(4) seuraavat sitten (1) ja jatkuvan kuvausken lauseesta 15.0.1  $\square$ .

**Huomautus 15.0.3.** (Van Der Vaartin kirjasta 'Asymptotic Statistics'): Slutsky's lemmän pykälät (4) sovelutuvat myös kun  $X_n, c, Y_n, Y$  ovat matriisi arvoisia ja  $c$  on  $d \times d$  kääntyvä matriisi. Matriisin käännös on jatkuva kuvaus  $\mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  kaikissa pisteissa jossa matriisi on kääntyvä.

**Määritelmä 15.0.3.** Satunnaismuuttujen jono  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  on tiukka (engl. tight) kun

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_n P_n(|X_n| > K) = 0$$

**Lause 15.0.4.** (Hellyn valinta lause)

- Olkoon  $(F_n : n \in \mathbb{N})$  kertymäjkaumien jono. On olemassa alijono  $F_{n_k}$  ja ei-vähenevä ja oikealta jatkuva  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  jolla  $F_{n_k}(t) \rightarrow F(t)$  kaikissa  $t$  jossa  $F(t) = F(t-)$ .
- Ilman lisäoletuksia, rajafunktio  $F(t)$  ei ole välttämättä kertymäfunktio, eli

$$F(+\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) \leq 1 \text{ ja } F(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) \geq 0$$

jossa epäyhtälöt saavat olla aitoja. Seuraava tulos on Prohorovin lause:

Jos jono  $(F_n : n \in \mathbb{N})$  on tiukka, kaikki alijonojen rajafunktiot  $F$  ovat kertymäfunktioita.

**Tod.**

Olkoon  $\mathbb{Q} = \{\mathbb{Q}_n : n \in \mathbb{N}\}$  rationaali lukujen numerointi.

Koska  $F_n(q_1) \in [0, 1]$  joka on kompakti, on olemassa alijono  $n(1, k)$  ja rajapiste  $G(q_1)$  jolla  $F_{n(1,k)}(q_1) \rightarrow G(q_1)$ .

Koska  $F_{n(1,k)}(q_1) \in [0, 1]$  on olemassa alijonon alijono  $n(2, k)$  ja rajapiste  $G(q_2)$  jolla  $F_{n(2,k)}(q_1) \rightarrow G(q_1)$  ja  $F_{n(2,k)}(q_2) \rightarrow G(q_2)$  kun  $k \rightarrow \infty$ .

Induktiivisesti, kaikille  $i$  on olemassa alijono  $\{n(i, k) : k \in \mathbb{N}\}$  ja rajaarvot joilla  $\forall j = 1, \dots, i, F_{n(i,k)}(q_j) \rightarrow G(q_j)$  kun  $k \rightarrow \infty$ .

Olkoon  $n_k = n(k, k)$  diagonaali jono. Seuraa että  $\forall q \in \mathbb{Q}, F_{n_k}(q) \rightarrow G(q)$  kun  $k \rightarrow \infty$ . Koska kertymäfunktio  $F_n$  ovat ei väheneviä, myös kuvaus  $q \mapsto G(q)$  on ei-vähenevä. Olkoon jatkossa  $F_k = F_{n(k,k)}$  kyseinen alijono.

Olkoon  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$F(t) := \inf\{G(q) : q \in \mathbb{Q} \text{ ja } q > t\}$$

Kun  $t$  kasvaa inf pienemmästä joukosta ei-vähene,  $F(t)$  on ei-vähenevä.  $F(t)$  on oikealta jatkuva: kun  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists q > t$  jolla  $\forall t \leq t' < q$ , infimumin määritelmästä seuraa

$$F(t') - \varepsilon \leq G(q) - \varepsilon \leq F(t) \leq F(t') \leq G(q)$$

Osoitamme että jos  $F(t) = F(t-)$  seuraa  $F_n(t) \rightarrow F(t)$ .

$\forall \varepsilon > 0$  On olemassa  $s < t$  jolla  $F(s) < F(t) < F(s) + \varepsilon$ . Olkoon  $r, q \in \mathbb{Q}$  jolla  $s < r < t < q$  ja  $G(q) < F(t) + \varepsilon$ . Koska

$$F_n(r) \leq F_n(t) \leq F_n(q)$$

väite seuraa arviosta

$$F(t) - \varepsilon < F(s) \leq G(r) \leq \liminf_n F_n(t) \leq \limsup_n F_n(t) \leq G(q) < F(t) + \varepsilon$$

jossa  $\varepsilon$  on mielivaltainen.

Jos  $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$  on tiukka, määritelmästä seuraa että

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \inf_{n \in \mathbb{N}} F_n(K) = 1, \quad \lim_{K \rightarrow -\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} F_n(K) = 0$$

ja koska kun  $K \in \mathbb{Q}$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} F_n(K) \leq \lim_{n \in \mathbb{N}} F_n(K) = G(q)$$

tästä seuraa että  $\lim_{K \rightarrow \infty} G(K) = \lim_{K \rightarrow \infty} F(q) = 1$ . Samoin

$$\lim_{K \rightarrow -\infty} G(K) = \lim_{K \rightarrow -\infty} F(q) = 0.$$

# Luku 16

## Karakteristinen funktio ja Konvoluutio

### 16.0.1 Lyhyesti kompleksi-analyysistä

Olkoon satunnaisvektori  $(\xi(\omega), \eta(\omega)) \in \mathbb{R}^2$ .  $\zeta(\omega) = \xi(\omega) + i\eta(\omega) \in \mathbb{C}$  on kompleksi-arvoinen satunnaismuuttuja jossa  $i = \sqrt{-1}$  on imaginaarinen yksikkö jolla  $(i)^2 = -1$ .

Muistetaan myös että kun  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{z} := x - iy$  ja  $|\zeta|^2 = \zeta\bar{\zeta} = \xi^2 + \eta^2$ .

Olkoon  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  jossa  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = (x + iy)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

Sanotaan että  $f(z)$  on analyyttinen pisteessä  $z$  jos ja vain jos on olemassa derivaatta

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

riippumatta siitä suunnasta josta  $w$  lähestyy  $z$ :n.

Sijoittamalla  $w = z + \varepsilon$ ,  $w = z + i\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

josta seuraavat Cauchy Riemannin ehdot:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

Kun  $f(z)$  on analyyttinen  $\forall z \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$ , pätee Cauchyn lause:

$$\oint f(w)dw = 0, \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(w)}{w-z} dw \quad z \in \Omega \setminus \partial\Omega$$

jossa integroidaan suljetun  $\partial\Omega$  käyrän yli.

**Määritelmä 16.0.1.** Olkoon  $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_d(\omega)) \in \mathbb{R}^d$  satunnaisvektori todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Sen karakteristinen funktio  $\varphi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  on

$$\varphi_X(t) = E_P \left( \exp(\sqrt{-1}(t \cdot X)) \right) = E_P \left( \exp(\sqrt{-1} \sum_{k=1}^d t_k X_k) \right)$$

Tässä  $\exp(iX(\omega) \cdot t) = \cos(X(\omega) \cdot t) + i \sin(X(\omega) \cdot t)$ . Koska  $X(\omega) \cdot t \in \mathbb{R}$ , seuraa  $|\exp(it \cdot X(\omega))| \leq 1$ , ja siksi karakteristinen funktio on aina olemassa ja  $|\varphi_X(t)| \leq 1$ .

Muita ominaisuuksia:

- $\varphi_X(0) = 1$
- $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$
- $\varphi_{a+bX}(t) := E_P(\exp(i(a+bX) \cdot t)) = e^{ia \cdot t} \varphi_X(bt)$ , kun  $a, t \in \mathbb{R}^d$ ,  $b \in \mathbb{R}$
- Kuvaus  $t \mapsto \varphi_X(t)$  on jatkuva (dominoidun konvergenssin lauseesta),
- $\varphi_X(t)$  on ei-negatiivi-definiitti, eli kaikille  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$  matriisi  $\left[ \varphi_X(t_j - t_k) \right]_{1 \leq j, k \leq n}$  on ei-negatiivinen:

$$\sum_{j, k=1}^n z_j \bar{z}_k \varphi_X(t_j - t_k) \geq 0, \quad \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$$

**Tod.**

$$\begin{aligned}
 0 &\leq E_P \left( \left| \sum_{j=1}^n z_j \exp(iX \cdot t_j) \right|^2 \right) \\
 &= E_P \left( \left\{ \sum_{j=1}^n z_j \exp(iX \cdot t_j) \right\} \overline{\left\{ \sum_{k=1}^n z_k \exp(iX \cdot t_k) \right\}} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n z_j \bar{z}_k E_P \left( \exp(iX \cdot (t_j - t_k)) \right)
 \end{aligned}$$

**Lause 16.0.1.** Olkoon  $X(\omega), Y(\omega)$   $P$ -riippumattomia. Silloin satunnaisvektorin  $(X, Y)$  karakteristinen funktio faktorisoituu

$$\varphi_{X,Y}(s, t) := E_P(\exp(i(sX + tY))) = \varphi_X(s)\varphi_Y(t) := E_P(\exp(isX))E_P(\exp(itY))$$

*Erityisesti*

$$\varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \varphi_{X,Y}(t, t) = E_P(\exp(it(X + Y))) = \varphi_{X+Y}(t)$$

Osoitamme pian että tämä on myös riittävä ehto.

**Esimerkki 16.0.1.** Olkoon  $G(\omega)$  standardi gaussinen jolla  $E(G) = 0$   $E(G^2) = 1$ . silloin

$$E_P(\exp(itG)) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$

Koska kuvaus  $z \mapsto \exp(-\frac{1}{2}z^2)$  on analyyttinen, Cauchyn lauseesta seuraa

$$\oint_{\Gamma} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz = 0$$

kun integroidaan suljetun polun yli. Valitaan suljettu polku joka kulkee suoraana linjana pisteiden  $(R - i\theta, R, -R, -R - i\theta)$  välissä kellon vastaisesti, jossa  $R > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Siksi

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\theta}^0 \exp\left(-\frac{1}{2}(R - i\psi)^2\right) d\psi + \int_R^{-R} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr \\
&+ \int_0^{-\theta} \exp\left(-\frac{1}{2}(-R - i\psi)^2\right) d\psi + \int_{-R}^R \exp\left(-\frac{1}{2}(r - i\theta)^2\right) dr = \\
&\exp\left(-\frac{1}{2}R^2\right) \int_{-\theta}^0 (\exp(iR\psi) - \exp(-iR\psi)) \exp\left(\frac{1}{2}\psi^2\right) d\psi \\
&+ \int_{-R}^R \exp(ir\theta + \frac{1}{2}\theta^2) \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr - \int_R^{-R} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr
\end{aligned}$$

Kun  $R \rightarrow \infty$ , ensimmäinen integraali suppenee kohti nollaan, ja seuraa

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr = \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ir\theta) \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr$$

Kun  $X = aG + b$ , määritelmän mukaan  $X$  on edelleen Gaussinen odotusarvolla  $E(X) = b$  ja varianssilla  $E(X^2) - E(X)^2 = a^2$  ja sen karakteristinen funktio on

$$\varphi_X(\theta) = \exp(i\theta b)\varphi(a\theta) = \exp\left(i\theta b - \frac{\theta^2 a^2}{2}\right)$$

Karakteristinen funktio määrää satunnaismuuttujan jakauman:

**Teoreema 16.0.1.** (Lévy'n inversio lause)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\exp(-iat) - \exp(-ibt)}{it} \varphi_X(t) dt = \quad (16.0.1)$$

$$\frac{1}{2} \{ F(b) + F(b-) \} - \frac{1}{2} \{ F(a) + F(a-) \} \quad (16.0.2)$$

Kun  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_X(t)| dt < \infty$ , yllä oleva integraali suppenee absoluuttisesti ja satunnaismuuttujan jakaumalla on tiheysfunktio

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-itx) \varphi_X(t) dt$$

**Tod.**

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-iat) - \exp(-ibt)}{it} \exp(itx) P_X(dx) dt = \\
&\int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^T \frac{\exp(it(x-a)) - \exp(it(x-b))}{it} dt P_X(dx),
\end{aligned}$$

jossa Fubinin lause soveltuu koska

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^T \left| \frac{\exp(it(x-a)) - \exp(it(x-b))}{it} \right| dt P_X(dx) \leq 2T(b-a)$$

koska  $|\exp(i\theta) - \exp(i\psi)| \leq |\theta - \psi|$  kun  $\theta, \psi \in \mathbb{R}$ .

$$\int_{-T}^T \frac{\exp(it(x-a)) - \exp(it(x-b))}{it} dt = 2 \int_0^T \frac{\sin(t(x-a)) - \sin(t(x-b))}{t} dt$$

koska  $t \rightarrow \sin(t)$  on ei-parillinen ja  $t \rightarrow \cos(t)$  on parillinen, ja integroidaan  $[-T, T]$  välissä,

$$= 2\{U(T(x-a)) - U(T(x-b))\}$$

jossa  $U(t) = \int_0^t \sin(x)x^{-1}dx$ .

Huomataan että kun  $x \in (k2\pi, (k+1)2\pi]$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \geq \frac{1}{(k+1)2\pi} \varepsilon \mathbf{1}(|\sin(x)| > \varepsilon)$$

ja siksi

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \geq \frac{2\varepsilon}{\pi} (\pi/2 - \arcsin(\varepsilon)) \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty.$$

Kuitenkin,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin(x)}{x} dx$$

ja tätä kautta määritellään integraali joka ei suppene absoluuttisesti. Siinä käytetään Cauchyn kaavaa: Olkoon  $\Gamma$  on suljettu käyrä joka koostuu paloista

$$\Gamma_1 := \{z = x + i0 : x \in [-R, -\varepsilon]\},$$

$$\Gamma_2 = \{z = \varepsilon(\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)), \theta \in [0, \pi]\}$$

$$\Gamma_3 := \{z = x + i0 : x \in [\varepsilon, R]\},$$

$$\Gamma_4 := \{z = R(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \theta \in [0, \pi]\}$$

jossa  $0 < \varepsilon < R$ . Koska  $f(z)/z$  on analyyttinen kun  $z \neq 0$ , erityisesti  $\Gamma$  käyrän rajoittaman alueen sisällä ja,

$$\oint_{\Gamma} \frac{\exp(iz)}{z} dz = 0$$

Seuraa

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_4} \frac{\exp(iz)}{z} dz &= \int_0^{\pi} \frac{\exp(iR(\cos(\theta) + i \sin(\theta)))}{Re^{i\theta}} \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\exp(iR \cos(\theta) - R \sin(\theta))}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{\pi} \exp(iR \cos(\theta)) \exp(-R \sin(\theta)) d\theta \end{aligned}$$

ja kun  $R \rightarrow +\infty$

$$\left| \int_0^{\pi} \exp(iR \cos(\theta)) \exp(-R \sin(\theta)) d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} \exp(-R \sin(\theta)) d\theta \rightarrow 0$$

jossa  $\sin(\theta) > 0$  kun  $\theta \in (0, \pi)$ , ja käytämme dominoidun konvergenssin lausetta.

Samoin

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma_2} \frac{\exp(iz)}{z} dz = - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i \int_0^{\pi} \exp(i\varepsilon \cos(\theta)) \exp(-\varepsilon \sin(\theta)) d\theta = i \int_0^{\pi} d\theta = -i\pi$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} \frac{\exp(iz)}{z} dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos(r) + i \sin(r)}{r} dr + \int_{\varepsilon}^R \frac{\cos(r) + i \sin(r)}{r} dr \\ &= 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(r)}{r} dr \end{aligned}$$

koska  $\cos(r) = \cos(-r)$  ja  $\sin(r) = -\sin(-r)$ . Kun  $R \uparrow \infty$ ,  $\varepsilon \downarrow 0$ , Cauchyn kaavasta seuraa

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(r)}{r} dr = \frac{\pi}{2},$$

ja

$$\lim_{T \rightarrow \infty} U(Tx) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{kun } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

Kun  $T \rightarrow \infty$ ,  $a \leq b$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} 2\{U(T(x-a)) - U(T(x-b))\} = \begin{cases} 0 & \text{kun } x > b \text{ tai } x < a \text{ tai } x = a = b \\ 2\pi & \text{kun } x \in (a, b) = 2\pi \\ \pi & \text{kun } x = a < b \text{ tai } x = b > a \end{cases},$$

dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa väite 16.0.1

$$\frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} E_P \left( U(T(X-a)) - U(T(X-b)) \right) = F_X(b-) - F_X(a) + \frac{F_X(b) - F_X(b-)}{2} + \frac{F_X(a) - F_X(a-)}{2}$$

**Teoreema 16.0.2.** (Lévy) Olkoon  $X_n(\omega_n) \in \mathbb{R}$  satunnaismuuttujien jono todennäköisyysavaruudeilla  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ja  $\varphi_n(\theta) = E_{P_n}(\exp(i\theta X_n))$  niiden karakteristiset funktiot.

Kun

1. On olemassa

$$\varphi(\theta) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

2. kuvaus  $\theta \mapsto \varphi(\theta)$  on jatkuva pisteessä  $\theta = 0$ ,

siitä seuraa että  $\varphi(\theta) = E_P(\exp(i\theta X))$  on jonkun satunnaismuuttujan  $X$ :n karakteristinen funktio ja  $X_n \xrightarrow{d} X$  jakauman mielessä.

Tod. Osoitamme ensin että jono  $(X_n : n \in \mathbb{N})$  on tiukka. Koska

$$\varphi_n(\theta) + \varphi_n(-\theta) = 2E_{P_n}(\cos(\theta X_n)) \in \mathbb{R}$$

seuraa että  $(\varphi(\theta) + \varphi(-\theta)) \in [-2, 2] \subset \mathbb{R}$ .

Koska  $\varphi(\theta)$  on jatkuva pisteessä 0,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  jolla

$$|1 - \varphi(\theta)| < \varepsilon/4 \quad \text{kun } |\theta| < \delta$$

Tästä seuraa

$$0 < \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (2 - \varphi(\theta) - \varphi(-\theta)) d\theta \leq \varepsilon/2$$

Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa että kun  $n$  on tarpeeksi suuri

$$0 < \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (2 - \varphi_n(\theta) - \varphi_n(-\theta)) d\theta \leq \varepsilon$$

Kuitenkin

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^\delta \int_{\mathbb{R}} (1 - \exp(i\theta x)) F_n(dx) d\theta \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\delta}^\delta (1 - \exp(i\theta x)) d\theta F_n(dx) = 2 \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin(\delta x)}{\delta x}\right) F_n(dx) \end{aligned}$$

jossa Fubinin lause soveltuu koska  $|1 - \exp(i\theta x)| \leq 2$ . Kun  $n$  on tarpeeksi suuri, saadaan

$$\varepsilon \geq 2 \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin(\delta x)}{\delta x}\right) F_n(dx) \geq 2 \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{1}{\delta|x|}\right) F_n(dx) \geq P_n(|X_n| > 1/\delta)$$

eli jakaumien jono  $F_n(\cdot) = P_n(X_n \leq \cdot)$  on tiukka.

Helly valinnan lauseesta 15.0.4 seuraa että on olemassa alijono  $F_{n_k}$  ja rajajakauma  $F$  jolla  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$  ja  $F_{n_k}(t) \rightarrow F(t)$  kun  $k \rightarrow \infty$  kaikisissa  $t$  jossa  $F(t) = F(t-)$ .

Heikon konvergenssin karakterisaatiosta seuraa että

$$\varphi_{n_k}(\theta) \rightarrow \varphi_F(\theta); = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) F(dx) \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

josta seuraa että  $\varphi(\theta) = \varphi_F(\theta)$ .

Osoitamme nyt että kun  $F(t) = F(t-)$ , koko jono  $F_n(t) \rightarrow F(t)$ . Se tarkoittaa että jokaisesta alijonosta  $n_\ell$  löytyy alijonon alijono  $n_{\ell_j}$  jolla

$$F_{n_{\ell_j}}(t) \rightarrow F(t).$$

Mutta tämä seuraa kuten ennen, koska tiukkuuden avulla löytyy alijonon alijono jolla  $F_{n_{\ell_j}}$  suppenee heikosti kohti rajajakaumaa  $\tilde{F}$ , ja koska sen karakteristinen funktio pitää olla myös  $\varphi(\theta)$ , Lévy inversio lauseesta seuraa nähdään että myös tämä alijonon alijonon raja-jakauma on sama  $F$   $\square$

**Teoreema 16.0.3.** (Lévy keskeinen raja-arvo lause) Olkoon  $(X_n)$   $P$ -riippumattomia ja samoin jakautuneita jolla  $E_P(X_1) = 0$ ,  $\text{Var}_P(X) = \sigma^2 < \infty$

Olkoon

$$S_n(\omega) = X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega), \quad G_n(\omega) := \frac{S_n(\omega)}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Kun  $n \rightarrow \infty$ ,

$$P(G_n > x) \longrightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = P(G \leq x)$$

Eli  $G_n \xrightarrow{d} G$  jossa  $G$  on standardi Gaussinen.

Todistus.

Kun kehitetään funktion  $\exp(ix)$  Taylorin sarjaksi, jäännöstermille

$$R_n(x) = e^{ix} - \sum_{k=0}^n \frac{(ix)^k}{k!}$$

pätee

$$R_0(x) = e^{ix} - 1 = i \int_0^x e^{iy} dy, \text{ josta seuraa } |R_0(x)| \leq \min\{2, |x|\}$$

ja rekursio

$$R_n(x) = \int_0^x iR_{n-1}(y) dy, \text{ josta seuraa}$$

$$|R_n(x)| = \int_0^{|x|} \int_0^{x_1} \dots \int_{x_{n-1}}^{|x|} |R_0(x_n)| dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 \leq \int_0^{|x|} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} x_n dx_n dx_{n-1} \dots dx_1$$

$$= \int_0^{|x|} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} \int_0^{x_n} dx_{n+1} dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\text{ja } |R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} 2 dx_n = 2 \frac{|x|^n}{n!}$$

$$\text{eli } |R_n(x)| \leq \min\left\{\frac{2|x|^n}{n!}, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\right\}$$

Koska  $E(X) = 0$  ja  $\text{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$ ,

$$|\varphi_X(\theta) - 1 + \sigma^2\theta^2/2| = |E_P(R_2(\theta X))| \leq E_P(|R_2(\theta X)|) \leq \theta^2 E_P\left(X^2 \wedge |\theta| \frac{|X|^3}{6}\right) < \infty$$

ja Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} E_P \left( X^2 \wedge |\theta| \frac{|X|^3}{6} \right) = 0$$

siksi

$$\varphi_X(\theta) = 1 - \frac{\sigma^2 \theta^2}{2} + o(\theta^2) \quad \text{kun } \theta \rightarrow 0 \quad (16.0.3)$$

Huomataan myös että kun  $\log(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta$  kun  $r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$  on logaritmin pääarvo,

$$\log(1+z) - z = \int_0^z \frac{-w}{1+w} dw = -z^2 \int_0^1 \frac{t}{1+tz} dt,$$

ja kun  $z \in \mathbb{C}, |z| < 1/2$  seuraa  $|1+tz| \geq 1/2$ , ja

$$|\log(1+z) - z| \leq |z|^2, \quad \text{kun } |z| \leq 1/2. \quad (16.0.4)$$

Mennään nyt keskeisen raja-arvo lauseen todistukseen: kun  $\theta \in \mathbb{R}$ , arviosta (16.0.3) seuraa

$$\begin{aligned} \varphi_{G_n}(\theta) &= \varphi_{S_n} \left( \frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}} \right) = \varphi_X \left( \frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}} \right)^n = \\ &= \left\{ 1 - \frac{\theta^2}{2n} + o\left(\frac{\theta^2}{n}\right) \right\}^n \end{aligned}$$

jossa  $\theta^2/n \rightarrow 0$  kun  $n \rightarrow \infty$ . Arviosta (16.0.4) seuraa

$$\log \varphi_{G_n}(\theta) = n \log \left\{ 1 - \frac{\theta^2}{2n} + o\left(\frac{\theta^2}{n}\right) \right\} = n \left\{ -\frac{\theta^2}{2n} + o\left(\frac{\theta^2}{n}\right) \right\} \rightarrow -\frac{\theta^2}{2} \quad \square$$

**Sovellus: Ennäysten jono** Olkoon  $(X_n : n \in \mathbb{N})$   $P$ -riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, jolla on jatkuva kertymäfunktio  $F_X(t)$ . Jatkuvuudesta seuraa että  $P(N) = 0$  jossa

$$N := \{\omega : \exists i \neq j : X_i(\omega) = X_j(\omega)\}$$

eli tasatuloksilla on nolla todennäköisyys (harjoitusetteävä). Määritellään ennätys-tapahtumia

$$A_n := \{\omega : X_n(\omega) > X_k(\omega) \forall 1 \leq k \leq n\}$$

ja  $n$ -satunnaismuuttujan sijoitus

$$R_n := \sum_{k=1}^n \mathbf{1}(X_k \geq X_n)$$

**Teoreema 16.0.4.** (Rényi) *Satunnaismuuttujat  $(R_n : n \in \mathbb{N})$  ovat  $P$ -riippumattomia*

$$P(R_n = k) = 1/n \quad k = 1, \dots, n$$

Tästä seuraa että tapahtumat  $(A_n : n \in \mathbb{N})$  ovat  $P$ -riippumattomia ja  $P(A_n) = P(R_n = 1) = 1/n$

**Todistus** Koska satunnaismuuttujat ovat  $P$ -riippumattomia ja samoin jakautuneita,

$$P(X_{\pi(1)} < X_{\pi(2)} < \dots < X_{\pi(n)}) = 1/n!$$

kaikille joukon  $\{1, \dots, n\}$  permutaatioille  $\pi$ , eli kaikki otoksen järjestykset ovat yhtä-todennäköisiä.

Huomataan myös ett jokainen realisaatio  $(R_1 = 1, R_2 = r_2, \dots, R_n = r_n)$  jossa  $r_k \in \{1, 2, \dots, k\}$  määrä otoksen järjestykstä, siksi

$$P(R_1 = 1, R_2 = r_2, \dots, R_n = r_n) = 1/(n!)$$

$\forall r_k \in \{1, \dots, k\}, k \leq n$ . Erityisesti

$$P(\{R_n = k\}) = P(\{\pi(k) = n\}) = \frac{(n-1)!}{n!} = 1/n$$

josta seuraa

$$\prod_{k=1}^n P(\{R_k = r_k\}) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n!} = P(R_1 = 1, R_2 = r_2, \dots, R_n = r_n) \quad \square$$

Olkoon nyt

$$\mu_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(\omega) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}(R_k = 1)$$

ennätysten määrä jonossa  $(X_1, \dots, X_n)$ .

**Lause 16.0.2.**

$$\frac{\mu_n(\omega)}{\log(n)} = 1 \quad P\text{-melkein varmasti}$$

**Todistus** Olkoon

$$M_n = \mu_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left\{ \mathbf{1}_{A_k}(\omega) - \frac{1}{k} \right\}$$

$M_n$  on  $P$ -martingaali omassa filtraatiossa jolla on ennustettava kovariaatio

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

# Luku 17

## Keskeinen raja-arvo lause , Steinin todistus

**Lemma 17.0.1.** (Gaussinen osittaisintegrointi kaava ) Olkoon  $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , jolla on jakauma

$$\gamma(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx .$$

ja olkoon  $f, h \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \gamma)$  jolla myös  $f', h' \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \gamma)$ . Silloin

$$E_P(f'(G)h(G)) = E_P\left(f(G)(h(G)G - h'(G))\right)$$

erityisesti, kun  $h(x) = 1$  saadaan

$$E_P(f'(G)) = E_P(f(G)G) = \text{Cov}_P(f(G), G)$$

kun  $h(x) = x$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R})$

$$E_P(f''(G)) = E_P(f'(G)G) = E_P(f(G)(G^2 - 1)) = \text{Cov}_P(f(G), G^2)$$

Kun  $f(x) = x^m$ ,  $h = 1$  seuraa

$$mE_P(G^{m-1}) = E_P(f'(G)) = E_P(f(G)G) = E_P(G^m G) = E_P(G^{m+1})$$

Tod.

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(y)dy$$

Koska  $\partial\gamma(x) = -x\gamma(x)$ , Fubinin lauseesta

$$\begin{aligned} E_P(f'(G)) &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\gamma(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} f'(x) \int_{-\infty}^x y\gamma(y)dydx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left( \int_y^{\infty} f'(x)dx \right) y\gamma(y)dy = \\ &= -f(\infty) \int_{\mathbb{R}} y\gamma(y)dy + \int_{\mathbb{R}} f(y)y\gamma(y)dy = -f(\infty)E_P(G) + E_P(f(G)G) \end{aligned}$$

jossa  $E_P(G) = 0$ , ainakin silloin kun on olemassa  $f(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} f(T) \in \mathbb{R}$ , ja vaikka näin ei olisi,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(T) \int_{-T}^T y\gamma(y)dy = 0$$

joka tapauksessa, koska Gaussinen jakauma on symmetrinen.

Tämä pätee kun  $f(x)$  on absoluuttisesti jatkuva Lebesgue mitan suhteen ja  $f'(x) \in L^1(\mathbb{R}, \gamma)$  eli  $\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\gamma(x)dx < \infty$ , silloin Fubinin lauseen integroituvuuden ehto on voimassa

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\gamma(x)dx = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^x |f'(x)y| \gamma(y)dydx + \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} |f'(x)y| \gamma(y)dydx < \infty$$

Olkoon  $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$  riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien jono, ja  $E_P(X_1) = 0$ ,  $E_P(X_1^2) = 1$  ja  $E_P(|X_1|^m) < \infty \forall m > 0$ .

Merkitään  $S_n(\omega) = X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)$ . Osoitamme aluksi että, kun  $f(x)$  on polynomi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_P \left( f(S_n/\sqrt{n}) \right) = E_P(f(G))$$

jossa satunnaismuuttuja  $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0, 1)$  on standardi gaussinen.

Oletamme induktio hypotheesia: kaikille  $\ell = 1, \dots, m$

$$\exists L_\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} E_P \left( \left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right)^\ell \right).$$

Selvästi  $L_1 = 0$  ja  $L_2 = 1$ .

Kun  $l = (m + 1)$ , symmetrisyydestä ja Newtonin kaavasta  $(a + b)^m = \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} a^\ell b^{m-\ell}$  seuraa

$$\begin{aligned} E_P(S_n^{m+1}) &= E_P \left( (S_{n-1} + X_n)^m (X_1 + \dots + X_{n-1} + X_n) \right) = \\ &= n E_P \left( (S_{n-1}(\omega) + X_n)^m X_n \right) \\ &= n \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} E_P(S_{n-1}^{m-j} X_n^{j+1}) \\ &= n \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} E_P(S_{n-1}^{m-j}) E_P(X_n^{j+1}) \\ &= nm E_P(S_{n-1}^{m-1}) + \sum_{j=2}^m \binom{m}{j} E_P(S_{n-1}^{m-j}) E_P(X_n^{j+1}) \end{aligned}$$

koska  $E_P(X_n) = 0$  ja  $E_P(X_n^2) = 1$ . Jakamalla kertoimella  $n^{(m+1)/2}$  saadaan

$$\begin{aligned} E_P \left( \left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right)^{m+1} \right) &= \\ m E_P \left( \left( \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} \right)^{m-1} \right) &+ \sum_{j=2}^m n^{(1-j)/2} \binom{m}{j} E_P \left( \left( \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} \right)^{m-j} \right) E_P(X_n^{j+1}) \end{aligned}$$

Kun  $n \rightarrow \infty$  induktio hypotheesistä seuraa

$$L_{m+1} := \lim_{n \rightarrow \infty} E_P \left( \left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right)^{m+1} \right) = mL_{m-1}$$

Koska  $L_1 = 0$ , seuraa induktiolla  $L_{2m+1} = 0 \quad \forall m$ , ja koska  $L_2 = 1$  seuraa

$$L_{2m} = (2m - 1)L_{2(m-1)} = (2m - 1)(2m - 3)L_{2(m-2)} = \dots = \prod_{\ell=1}^m (2\ell - 1) = \frac{(2m)!}{m!2^m}$$

Lemmasta 17.0.1 seuraa että satunnaismuuttujan  $(S_n(\omega)/\sqrt{n})$  asympottiset momentit täsmävät  $\mathcal{N}(0, 1)$  jakauman momenttien kanssa, riippumatta satunnaismuuttujan  $X_1$ :n jakaumasta.

Voidaan myös laskea formaalisesti raja-jakauman momentti generoiva funktion

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_P \left( \exp \left( t \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_P \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right)^m \right) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} E_P \left( \left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right)^m \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} L_m = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} L_{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( \frac{t^2}{2} \right)^m = \exp \left( \frac{t^2}{2} \right) = E_P(\exp(tG)) \end{aligned}$$

eli formaalisesti  $n^{-1/2}S_n(\omega)$  raja-jakauman momentti generoiva funktio on standardi gaussinen.

**Lemma 17.0.2.** Olkoon  $\{X_k(\omega) : k \in \mathbb{N}\}$  riippumattomien satunnaismuuttujien jono, jolla  $E_P(X_k) = 0$  ja  $E_P(X_k^2) = \sigma_k^2 < \infty$

*Merkitään*

$$\begin{aligned} \Sigma_n &= \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2} \\ \hat{S}_n(\omega) &= \frac{1}{\Sigma_n} (X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)) \\ r_n &= \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\sigma_k}{\Sigma_n} \\ g_n(\varepsilon) &= \frac{1}{\Sigma_n^2} \sum_{k=1}^n E_P \left( X_k^2 \mathbf{1}(|X_k| > \varepsilon \Sigma_n) \right), \quad \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

ja  $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0, 1)$  on standardi gaussinen satunnaismuuttuja.

Olkoon  $f(x) \in C^3(\mathbb{R})$  jolla on rajoitetut derivaatat:

$$\|f''\|_{\infty} := \sup_x |f''(x)| < \infty, \quad \|f'''\|_{\infty} := \sup_x |f'''(x)| < \infty,$$

1. Silloin  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\left| E_P(f(\hat{S}_n)) - E_P(f(G)) \right| \leq \left( \frac{\varepsilon}{6} + \frac{r_n}{2} \right) \|f'''\|_{\infty} + g_n(\varepsilon) \|f''\|_{\infty}$$

2. Koska  $r_n^2 \leq \varepsilon^2 + g_n(\varepsilon)$ , kun  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\varepsilon) = 0 \forall \varepsilon > 0$ , seuraa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_P(f(\hat{S}_n)) = E_P(f(G))$$

Tod. Olkoon  $\{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$  riippumattomia gaussisia satunnaismuttujat jotka ovat myös riippumattomia  $(X_k : k \in \mathbb{N})$  jonosta, ja  $E_P(\xi_k) = 0$  ja  $E_P(\xi_k^2) = E_P(X_k^2) = \sigma_k^2$ . Merkitään

$$\hat{G}_n(\omega) = \frac{1}{\Sigma_n}(\xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega))$$

Huomataan että  $\forall n \hat{G}_n(\omega)$  on standardi gaussinen.

Kiinnitämme nyt  $n$ , ja merkitään

$$\begin{aligned} \hat{X}_k(\omega) &= \frac{X_k(\omega)}{\Sigma_n}, & \hat{\xi}_k(\omega) &= \frac{\xi_k(\omega)}{\Sigma_n}, \\ \hat{U}_m(\omega) &= (\hat{X}_1(\omega) + \cdots + \hat{X}_{m-1}(\omega) + \hat{\xi}_{m+1}(\omega) + \cdots + \hat{\xi}_n(\omega)) \quad m \leq n \end{aligned}$$

Koska  $f(\hat{U}_k + \hat{X}_k) = f(\hat{U}_{k+1} + \hat{\xi}_{k+1})$ , teleskoppisella summalla,

$$\begin{aligned} f(\hat{S}_n) - f(\hat{G}_n) &= f(\hat{U}_n + \hat{X}_n) - f(\hat{U}_n + \hat{\xi}_n) \\ &+ f(\hat{U}_{n-1} + \hat{X}_{n-1}) - f(\hat{U}_{n-1} + \hat{\xi}_{n-1}) + \cdots + f(\hat{U}_1 + \hat{X}_1) - f(\hat{U}_1 + \hat{\xi}_1) \end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\left| E_P(f(\hat{S}_n)) - E_P(f(G)) \right| \leq \sum_{k=1}^m \left| E_P\left(f(\hat{U}_k + \hat{X}_k)\right) - E_P\left(f(\hat{U}_k + \hat{\xi}_k)\right) \right|$$

Olkoon

$$R_k(x) := f(\hat{U}_k(\omega) + x) - f(\hat{U}_k(\omega)) - x f'(\hat{U}_k(\omega)) - \frac{x^2}{2} f''(\hat{U}_k(\omega))$$

toisen asteen Taylorin kehittämän jäännöstermi, jossa

$$R_k(x) \leq \min\left(x^2 \|f''\|_\infty, \frac{|x|^3}{6} \|f'''\|_\infty\right)$$

Koska  $\hat{X}_k \perp\!\!\!\perp \hat{U}_k$  ja  $\hat{\xi}_k \perp\!\!\!\perp U_k$ ,  $E_P(\hat{X}_k) = E_P(\hat{\xi}_k) = 0$ ,  $E_P(\hat{X}_k^2) = E_P(\hat{\xi}_k^2) = (\sigma_k^2/\Sigma_n)$  seuraa

$$\left| E_P\left(f(\hat{U}_k + \hat{X}_k)\right) - E_P\left(f(\hat{U}_k + \hat{\xi}_k)\right) \right| \leq E_P\left(|R_k(\hat{X}_k)|\right) + E_P\left(|R_k(\hat{\xi}_k)|\right)$$

jossa

$$\sum_{k=1}^n E_P \left( |R_k(\hat{\xi}_k)| \right) \leq \frac{E_P(|G|^3)}{6} \|f'''\|_\infty \sum_{k=1}^n \left( \frac{\sigma_k^3}{\Sigma_n^3} \right) \leq \frac{r_n}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|f'''\|_\infty$$

jossa  $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$  ja  $E_P(|G|^3) = 2^{3/2}\pi^{-1/2}$ , ja

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n E_P \left( |R_k(\hat{X}_k)| \right) \\ & \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{6} \sum_{k=1}^n E_P \left( |\hat{X}_k|^3 \mathbf{1}(|\hat{X}_k| \leq \varepsilon) \right) + \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^n E_P \left( \hat{X}_k^2 \mathbf{1}(|\hat{X}_k| > \varepsilon) \right) \\ & \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{6} \sum_{k=1}^n E_P \left( \varepsilon \hat{X}_k^2 \mathbf{1}(|\hat{X}_k| \leq \varepsilon) \right) + \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^n E_P \left( \hat{X}_k^2 \mathbf{1}(|\hat{X}_k| > \varepsilon) \right) \\ & \leq \varepsilon \frac{\|f'''\|_\infty}{6} + \|f''\|_\infty g_n(\varepsilon) \end{aligned}$$

Väite seuraa kun summataan yhteen näitä approksimatioita  $\square$

Huomamme että kun satunnaismuuttujat  $(X_k : k \in \mathbb{N})$  ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, joilla  $E_P(X_1) = 0$  ja  $E_P(X_1^2) = \sigma^2$ , automaattisesti lemmän 17.0.2 oletus on voimassa, koska

$$g_n(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma^2} E_P(X_1^2 \mathbf{1}(|X_1| > n\varepsilon\sigma^2)) \rightarrow 0 \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Seuraavaksi yleistämme lemmän 17.0.2 siloitustekniikalla myös jatkuville funktioille joilla on korkeintaan kvadraattinen kasvu:

**Teoreema 17.0.1.** (Lindebergin keskeinen raja-arvo lause).

Lemman 17.0.2 asetuksissa, olkoon  $f(x)$  jatkuva funktio jolle

$$|f(x)| \leq c(1 + x^2) \quad \forall x, \text{ jollekin } c > 0$$

1. Jos  $g_n(\varepsilon) \rightarrow 0$  kaikille  $\varepsilon > 0$  seuraa

$$E_P \left( f(\hat{S}_n) \right) \rightarrow E_P(f(G))$$

jossa  $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

2. Sen lisäksi, kaikille  $a < b$

$$P\left(a < \hat{S}_n \leq b\right) \rightarrow P\left(a < G \leq b\right)$$

Tod. Olkoon  $Y(\omega) \in (-1, 1)$  satunnaismuuttuja jolla on sileä tiheysfunktio  $\rho(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Muuttujan vaihto-kaavalla seuraa että satunnaismuuttujalla  $(Y(\omega)/k)$  on tiheysfunktio  $k\rho(yk)$  kun  $k > 0$ . Määritellään

$$\begin{aligned} f_k(x) &:= E_P\left(f(x - Y/k)\mathbf{1}(|x - Y/k| \leq k)\right) \\ &= \int_{-1/k}^{1/k} f(x - y)\mathbf{1}(|x - y| \leq k)k\rho(ky)dy = \int_{-k}^k f(y)k\rho(k(x - y))dy \end{aligned}$$

$f_k(x)$  on kompaktikantainen, ja koska  $f_k(x) = 0$  kun  $|x| > (k + k^{-1})$ , ja koska  $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$  ja  $f$  on jatkuva, kuvaus

$$(x, y) \mapsto k^2\rho'((x - y)k)f(y)$$

on rajoitettu kompaktissa

$$C_k = \left\{ (x, y) : y \in [-k, k], x \in [y - k, y + k] \right\}$$

siksi dominoiudun konevergenssin lauseesta seuraa että  $f_k$  on derivoituva ja

$$\frac{d}{dx}f_k(x) = k^2 \int_{-k}^k f(y)\rho'((x - y)k)dy$$

Samoin seuraa korkeimpien derivaattojen olemassaolo.

Kun  $k \rightarrow \infty$  dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} E_P\left(f\left(x - \frac{Y}{k}\right)\mathbf{1}\left(\left|x - \frac{Y}{k}\right| \leq k\right)\right) = E_P(f(x - 0)) = f(x)$$

Osoitamme että  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  tasaisesti kompakteissa. Koska  $f$  on tasaisesti jatkuva kompakteissa,  $\forall R > 0, \varepsilon > 0$  on olemassa  $\delta > 0$  jolla  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  kun  $|x| \leq R$  ja  $|x - y| < \delta$ . Siksi kun  $k \geq \delta^{-1}$ , kaikille

$$|x| \leq R$$

$$\begin{aligned} & |f(x) - f_k(x)| = \\ & = \left| f(x) - E_P(f(x - Y/k) \mathbf{1}(|x - Y/k| \leq k)) \right| \\ & = \left| E_P(f(x) - f(x - Y/k)) \right| \quad \forall x : |x| \leq R \text{ kiinteä ja } k \text{ tarpeeksi suuri} \\ & \leq E_P(|f(x) - f(x - Y/k)|) < \varepsilon \end{aligned}$$

Kolmion epäyhtälöstä,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} & \left| E_P\left(f(\hat{S}_n) - f(G_n)\right) \right| \\ & \leq \left| E_P\left(f(\hat{S}_n) - f_k(\hat{S}_n)\right) \right| + \left| E_P\left(f_k(\hat{S}_n) - f_k(G_n)\right) \right| + \left| E_P\left(f_k(G_n) - f(G_n)\right) \right| \end{aligned}$$

Jokaiselle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_k(x)$  on sileä ja kompaktikantainen, rajoitetuilla derivaatoilla, ja täyttää 17.0.2 ehtoja

Oletuksesta  $\forall \varepsilon > 0 \ g_n(\varepsilon) \rightarrow 0$  kun  $n \rightarrow \infty$ , seuraa  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left| E_P\left(f_k(\hat{S}_n) - f_k(G_n)\right) \right| \rightarrow 0 \quad \text{kun } n \uparrow \infty$$

Tasaisesta konvergenssista seuraa  $\forall R > 0, \varepsilon$  on olemassa  $\delta > 0$  jolle

$$|f(\hat{S}_n) - f_k(\hat{S}_n)| \mathbf{1}\left(|\hat{S}_n| \leq R\right) \leq \varepsilon$$

kun  $k \geq \delta^{-1}$ . Siksi  $\forall n, R$ .

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_n E_P\left(|f(\hat{S}_n) - f_k(\hat{S}_n)| \mathbf{1}\left(|\hat{S}_n| \leq R\right)\right) = 0$$

Samoin

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E_P\left(|f(G) - f_k(G)| \mathbf{1}\left(|\hat{G}| \leq R\right)\right) = 0$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned} & \limsup_n \left| E_P\left(f(\hat{S}_n) - f(G)\right) \right| \leq \\ & \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_n E_P\left(|f(\hat{S}_n) - f_k(\hat{S}_n)| \mathbf{1}\left(|\hat{S}_n| > R\right)\right) \\ & + \limsup_{k \rightarrow \infty} E_P\left(|f(G) - f_k(G)| \mathbf{1}\left(|G| > R\right)\right) \end{aligned}$$

Nyt käytämme hypotheesia  $|f(x)| \leq c(1+x^2)$ . Kun  $|x| \geq 2$  seuraa

$$|f_k(x)| \leq E_P(|f(x - Y/k)|) \leq c(1+(|x|+1)^2) \leq 2c(1+x^2) \text{ ja}$$

$$|f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x)| + |f(x)| \leq 3c(1+x^2), \text{ siksi}$$

$$\begin{aligned} & \limsup_n \left| E_P \left( f(\hat{S}_n) - f(G) \right) \right| \\ & \leq \limsup_n 3c E_P \left( (1 + \hat{S}_n^2) \mathbf{1}(|\hat{S}_n| > R) \right) + c E_P \left( (1 + G^2) \mathbf{1}(|G| > R) \right) \end{aligned}$$

Koska  $G \in L^2(P)$ ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E_P \left( (1 + G^2) \mathbf{1}(|G| > R) \right) = 0.$$

Seuraavaksi approksimoidaan indikaattori  $\mathbf{1}(|x| > R)$  sileällä funktiolla.

Olkoon  $\eta \in C^\infty : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , jolla

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{kun } |x| \leq 1/2 \\ \in (0, 1) & 1/2 < |x| < 1 \end{cases}$$

$$\psi_R(x) := (1+x^2)\eta(x/R) \leq (1+x^2) \quad \text{jolla}$$

$$(1+x^2)\mathbf{1}(|x| > R) \leq \psi_R(x) \leq (1+x^2)\mathbf{1}(|x| > R/2).$$

Koska

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_R(x) = R^{-2} \eta''(x/R)(1+x^2) + R^{-1} \eta'(x/R)2x + 2\eta(x/R)$$

ja derivaatat  $\eta^{(\ell)}(x/R) = 0$ ,  $\ell \geq 1$ , ovat kompaktikantaisia seuraa

$$\sup_x |\psi_R''(x)| < \infty, \quad \sup_x |\psi_R'''(x)| < \infty.$$

Lemmasta 17.0.2 seuraa

$$\left| E_P(\psi_R(\hat{S}_n)) - E_P(\psi_R(G)) \right| \rightarrow 0$$

kun  $n \rightarrow \infty$ , ja

$$\begin{aligned} & E_P \left( (1 + S_n^2) \mathbf{1}(|\hat{S}_n| > R) \right) \\ & \leq E_P(\psi_R(\hat{S}_n)) \rightarrow E_P(\psi_R(G)) \leq E_P \left( (1 + G^2) \mathbf{1}(|G| > R/2) \right) \rightarrow 0 \text{ kun } R \uparrow \infty. \end{aligned}$$

Lopuksi olkoon  $a < b$ . On olemassa jatkuvien funktioiden jonoja  $(\bar{\psi}_m)$ ,  $(\underline{\psi}_m) \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$  joilla

$$0 \leq \underline{\psi}_m(x) \uparrow \mathbf{1}_{(a,b]}(x), \quad 1 \geq \bar{\psi}_m(x) \downarrow \mathbf{1}_{(a,b]}(x)$$

Väitteestä (1) ja monotonisesta konvergenssista seuraa

$$\begin{aligned} \liminf_n P(a < \hat{S}_n \leq b) &\geq \liminf_n E_P(\bar{\psi}_m(S_n)) = E_P(\bar{\psi}_m(G)) \downarrow P(a < G \leq b) \\ \limsup_n P(a < \hat{S}_n \leq b) &\leq \limsup_n E_P(\underline{\psi}_m(S_n)) = E_P(\underline{\psi}_m(G)) \uparrow P(a < G \leq b) \end{aligned}$$

kun  $m \rightarrow \infty$   $\square$

**Teoreema 17.0.2.** *Yleistetty keskeinen raja-arvo lause* Olkoon  $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$  jono  $P$ -riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden tiheysfunktio  $p(x)$  on olemassa ja totetuttaa

1.  $p(x) = p(-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)x^{\alpha+1} = c \in (0, +\infty)$ , jossa  $0 < \alpha < 2$ ,

Silloin

$$\hat{S}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d} \hat{Y}$$

jossa  $Y$ :n jakaumalla on karakteristinen funktio  $\varphi_Y(t) = \exp(-c|t|^\alpha)$ .

**Tod.** Osoitamme ensin että

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_X(t) = 1 - c|t|^\alpha + o(|t|^\alpha) \quad \text{kun } t \rightarrow 0$$

Tästä seuraa

$$\varphi_{\hat{S}_n}(t) = \left( \varphi_X(tn^{-1/\alpha}) \right)^n = \left( 1 - \frac{c|t|^\alpha + o(1)}{n} \right)^n \rightarrow \exp(-c|t|^\alpha) \quad \text{kun } n \rightarrow \infty$$

Lähdetään nyt arvioimaan  $\varphi_X(t)$  kun  $t \rightarrow 0$ . Käytämme symmetriaa  $p(x) = p(-x)$ , josta seuraa  $\varphi_X(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)} \in \mathbb{R}$ . Kun  $M > 0$  kiinteä,

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} p(x)e^{itx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)p(x) dx = 1 - \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(tx))p(x) dx$$

olkoon  $t > 0$

$$\int_0^{\infty} (1 - \cos(tx)) dx = \int_0^{1/t} (1 - \cos(tx)) p(x) dx + \int_{1/t}^{\infty} (1 - \cos(tx)) p(x) dx \leq t \int_0^{1/t} xp(x) dx$$

$$\int_0^M p(x) \cos(tx) dx + \int_M^{1/t} p(x) \cos(tx) dx + \int_{1/t}^{+\infty} p(x) \cos(tx) dx$$

jossa kun  $t \downarrow 0$

$$\left| \int_{1/t}^{+\infty} p(x) \cos(tx) dx \right| \leq \text{Const.} t^\alpha \downarrow 0$$

Koska  $1 - \cos(x) \leq x^2/2$ ,

$$\left| \int_0^M p(x) (\cos(tx) - 1) dx \right| \leq \frac{ct^2}{2} \int_0^M p(x) x^2 dx \leq \frac{cM^2 t^2}{2} \rightarrow 0 \text{ kun } t \rightarrow 0$$

$$\text{ja } \left| e^{itx} - 1 \right| \leq |tx|$$

$$\left| \int_M^{1/t} p(x) \left( e^{itx} - 1 - itx \right) dx \right| \leq \frac{ct^2}{2} \int_M^{1/t} x^{1-\alpha} dx \leq \text{Const.} t^\alpha \rightarrow 0 \text{ kun } t \rightarrow 0$$

Siis

$$\varphi_X(t) = \int_0^{1/t} p(x) dx + \int_M^{1/t} itx$$



# Luku 18

## Suurten satunnaismatriisien ominaisarvojen jakauma

Olkoon  $\{\xi_{ij}(\omega) : i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq i\}$   $P$ -riippumattomia ja samoinjakautuneita satunnaismuuttujia jolla pätee

1.  $E(|\xi_{ij}|^k) < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .
2.  $E(\xi_{ij}) = 0, E(\xi_{ij}^2) = 1$
3.  $\xi_{ij}$  jakauma on symmetrinen, eli  $P(\xi_{ij} \in B) = P(-\xi_{ij} \in B)$ .

Jakauman symmetriasta seuraa että  $E_P(\xi_{ij}^{2k+1}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ . Merkitään myös  $\xi_{ij}(\omega) = \xi_{ji}(\omega)$  kun  $j > i$ .

Olkoon  $A^{(n)}(\omega) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrinen satunnaismatriisi jolla  $A_{ij}^{(n)}(\omega) = A_{ji}^{(n)}(\omega) = \frac{\xi_{ij}(\omega)}{2\sqrt{n}}$ , ja olkoon  $\lambda_1^{(n)} \leq \lambda_2^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_n^{(n)}$  sen ominaisarvot.

Ominaisarvojen jakauma on

$$Q^{(n)}(B) = E_P \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(\lambda_i^{(n)} \in B) \right), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Osoitamme että  $Q^{(n)}$  suppenee jakauman mielessä kohti satunnaismuuttujan jakaumaa.

Tutkimme  $Q^{(n)}$  momentteja

$$M^{n,k} := \int_{\mathbb{R}} \lambda^k Q^{(n)}(d\lambda) = E_P \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(n)})^k \right) =$$

$$E_P \left( \frac{1}{n} \text{Trace}((A^{(n)})^k) \right) = \frac{1}{2^k n^{1+k/2}} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n E_P \left( \xi_{i_1 i_2} \xi_{i_2 i_3} \cdots \xi_{i_k i_1} \right)$$

$P$ -riippumattomuudesta ja jakauman symmetriasta huomataan että odotusarvo on nolla silloin kun satunnaismuuttuja  $\xi_{j\ell}$  esiintyy paritonta monta kertaa. Erityisesti  $M^{n,k} = 0$  kun  $k$  on pariton. Oletetaan sitten että  $k = 2m$  on parillinen.

Todistamme että kun  $n \rightarrow \infty$ , rajaarvoon kontribuovat pelkästään termit jossa jokainen indeksi pari  $\{j, \ell\}$  esiintyy täsmälleen 0 tai 2 kertaa.

Jokainen termi summassa vastaa suljettua polkua  $i_1 i_2 i_3 \dots i_{2m} i_1$  joka kulkee joukossa  $\{1, \dots, n\}$  ja palaa takaisin alkutilaan. Sanotaan että polku kulkee parin  $\{j, \ell\}$  kautta jos  $i_s = j, i_{s+1} = \ell$  tai  $i_s = \ell, i_{s+1} = j$  jollekin  $s = 1, \dots, 2m$ . Myös  $\{j, j\}$  on mahdollinen pari.

Polun kontribuutio on 0 jos jokin pari esiintyy polussa paritonta monta kertaa. Että polun kontribuutio summalle olisi positiivinen, jokain pari  $\{j, \ell\}$  pitää esiintyä parillista monta kertaa.

Sanotaan että  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m) \in \mathbb{N}^m$  on  $m$ -osituksen jos

$$1\pi_1 + 2\pi_2 + \cdots + m\pi_m = m$$

Merkitään  $|\pi| = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m$ .

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_{2m}=1}^n E_P \left( \xi_{i_1 i_2} \xi_{i_2 i_3} \cdots \xi_{i_k i_1} \right) = \sum_{\pi} N_{\pi} C_{\pi}$$

jossa  $\pi$  on  $(2m)$ -ositus,

$$C_{\pi} = \prod_{\ell=1}^m E_P(\xi_{11}^{2\ell})^{\pi_{\ell}}$$

$$N_{\pi} =$$

Olkoon  $X^{(n)}(\omega) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satunnaismatriisi jolla  $X_{ij}^{(n)}(\omega)$  ovat satunnaisia.