Todennäköisyysteorian luennot, kevät 2015

Dario Gasbarra[1]

11. tammikuuta 2015

[1]Helsingin Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Sisältö

Luku 0

Miksi todennäköisyydet ovat additiivisia ?

My Thesis, paradoxically and a little provocatively, but nonetheless genuinely, is simply this:

PROBABILITY DOES' NOT EXISTS.

The abandonment of superstitious beliefs about the existence of Phlogiston , the Cosmic Ether, Absolute Space and Time, ..., or Faires and Witches was an essential step along the road on scientific thinking. Probability too, if regarded as something endowed with some kind of objective existence is no less a misleading misconception, an illusory attempt to exteriorize or materialize our true probabilistic beliefs. Bruno De Finetti, Theory of Probability , a critical introductory treatment (1972).

Aloitan tällä (ja lopetan saman tien) tätä pohdiskelua: On merkillistä että, matemaattisesta sivistyksestä riippumatta, todennäköisyyskäsite on kaikille tuttu: me kaikki ymmärrämme mitä jalkapallonvalmentaja tarkoittaa kun kertoo haastattelussa että hänen mielestä joukkueensa voittomahdollisuudet ovat noin 60% (vaikka me voimme olla eri mieltä luvusta ja todennäköisyyden filosofiasta).

Kuten meidän kauaiset esi-isämme, joudumme jatkuvasti tekemaan isompia tai pienempiä päätöksiä epävarmuuden tilassa. Luonnon valinta on muokannut meidän aivoihimme vaistomaista älykkyyttä hahmottamaan ja vertailemaan eri mahdollisuuksien "uskottavuuksia", ottaamalla huomioon aikaisempaa kokemusta ja ympäristöltä tulevaa informaatiota.

Mittateoria saa uuden maun, koska sen ongelmat ja tulokset voidaan tulkita "jokamiehen" todennäköisyyskäsitteen valossa.

M. Kac sen lausui:*"Probability theory is measure theory with a soul"* eli (*"Todennäköisyysteoria on mittateoria jolla on sielua"*).

Kun hypoteettiset avaruusolennot vihdoinkin saapuvat maahan ja ilmenee että he osaavat jo koko meidän matematiikamme ja mittateoriamme, pystyisivätkö he silti ymmärtämään mitä todennäköisyys tarkoittaa meille ?

Todennäköisyys = Hinta Bruno De Finetti (1906-1985) oli matemaatikko, taloustietelijä ja filosofi. Hänen tieteenfilosofiassa torjutaan absoluttisen todennäköisyyden käsite. Sen sijaan todennäköisyydellä on puhtaasti operaativinen merkitys. Todennäköisyydet ovat aina suhteellisia, meidän tiedon tilasta riippuen.

Epävarmassa maailmassa, tapahtumat voidaan luokitella kahteen luokkaan, $\mathcal{V} = \{$ *varmat tapahtumat* $\}$ ja $\mathcal{E} = \{$ *epävarmat tapahtumat* $\}$.

Kun tapahtuma $E \in \mathcal{V}$ on varma ja $F \supseteq E$ eli F tapahtuu aina silloin kun E tapahtuu, seuraa että myös $F \in \mathcal{V}$ on varma. Tapahtuma E on mahdoton jos sen negaatio E^c (joka tapahtuu silloin kun E ei tapahdu) on varma.

Merkitään luokka $\mathcal{N} = \{$ *mahdottomat tapahtumat* $\}$ ja sanotaan että tapahtumat E, F ovat keskenään *ei sopivia* kun niiden yhteensattuma on mahdoton, eli $(E \cap F) \in \mathcal{N}$. Huomataan myös että jokaiselle tapahtumalle E, $(E \cup E^c) \in \mathcal{V}$. Kun E ja F ovat tapahtumia, $(E \cup F)$ merkitsee tapahtuman jossa E tai F tapahtuvat.

Eräs vedonlyöntimeklari ottaa vastaan vetoja tapahtumista $E_1, \ldots, E_n$, jotka ovat keskenään ei-sopivia, siis $(E_i \cap E_j) \in \mathcal{N}$ (mahdoton tapahtuma) kun $i \neq j$. Tarkemmin, meklarin on pakko ottaa vastaan mitä tahansa vetoja (myös negatiivisilla panoksilla) tapahtumista E_i, $i = 1, \ldots, n$, ja niiden yhdisteistä $(E_i \cup E_j), (E_i \cup E_j \cup E_k), \ldots$ jne.

Meklari valitsee kuitenkin vetojen hinnat (tulkinta: **todennäköisyydet**) $Pr(E_i), Pr(E_i \cup E_j), Pr(E_i \cup E_j \cup E_k) \ldots$ jne.

Merkinnät: $p_i := Pr(E_i)$, "satunnaissuure" $\mathbf{1}_{E_i}$ on tapahtuman E_i:n indikaattori joka saa arvon 1 jos "sattuma" E_i tapahtuu, muuten 0.

Pr lyhennys sopii hyvin molemmille englanninkielisille sanoille

Price = hinta ja **Pr**obability = todennäköisyys.

Vastapuolen voitto on satunnaissuure

$$V = (\mathbf{1}_{E_1} - p_1)y_1 + \cdots + (\mathbf{1}_{E_1} - p_n)y_n$$

jossa $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on vastapuolen vapaasti valittavissa oleva vedonlyöntistrategia.

Johdonmukainen meklari määrää vedonlyönnin hinnat siten, että vastapuolelle ei syntyisi *arbitraasimahdollisuuksia*, eli mahdollisuuksia tehdä riskitönta voittoa.

Teoreema 0.0.1. *(Tämä on väite eikä määritelmä !)*

Arbitraasivapausoletuksesta seuraa välittömästi:

1. *Vetojen hinnat ovat yksikäsitteisiä (yhden hinnan laki), vedolle $\mathbf{1}_{E_i}$ on vain yksi hinta $Pr(E_i) \in [0, 1]$.*

2. *Jos $E_i \in \mathcal{V}$ (varma tapahtuma), $Pr(E_i) = 1$ ja vastaavasti jos $E_i \in \mathcal{N}$ (mahdoton tapahtuma), niin $Pr(E_i) = 0$.*

3. *Hinnat (eli todennäköisyydet) ovat (äärellisesti)-additiivisia.*

Todistus :

1. Jos vedolle $\mathbf{1}_E$ olisi kaksi hintaa, $p_1 > p_2$, vastapuoli voisi ostaa meklatilta x vedonlyöntilippua hinnalla p_1 ja myydä meklarille x vedonlyöntilippua hinnalla p_2, jossa $x > 0$ voi olla mielivaltainen suuri. Vastapuolen voitto (meklarin tappio) on kaikissa tapauksissa

$$(\mathbf{1}_E - p_1)x - (\mathbf{1}_E - p_2)x = (p_1 - p_2)x$$

2. Jos E on varma tapahtuma, ja vedolle $\mathbf{1}_E$ on hinta $p \neq 1$, vastapuolelle syntyy varmasti voitto

$$(\mathbf{1}_E - p)x = (1 - p)x$$

Kun $p > 1$ (vastaavasti $p < 1$) vastapuoli saa mielivaltainen suuri voittoa valitsemalla $x < 0$ (vastaavasti $p > 1$). Jos E on mahdoton tapahtuma, vastapuolen voitto on varmasti

$$(\mathbf{1}_E - p)x = -px$$

jossa $x < 0$ on mielivaltainen.

3. Olkoon ensin $n = 2$, $(E_1 \cap E_2) \in \mathcal{N}$,

sen lisäksi oletamme että $(E_1 \cup E_2) \in \mathcal{V}$ (eli on varma tapahtuma). Siitä seuraa $Pr(E_1 \cup E_2) = 1$. Lineaarisella systeemillä

$$\begin{cases} V(E_1) = (1 - p_1)y_1 - p_2y_2 = & \text{vastapuolen voitto kun } E_1 \text{ tapahtuu} \\ V(E_2) = -p_1y_1 + (1 - p_2)y_2 = & \text{vastapuolen voitto kun } E_2 \text{ tapahtuu} \end{cases}$$

on ratkaisu mille tahansa voitto-vektorille $(V(E_1), V(E_2))$ jos ja vain jos kertoimien matriisi on kääntyvä, eli

$$\det \begin{pmatrix} (1 - p_1) & -p_2 \\ -p_1 & (1 - p_2) \end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 \neq 0$$

Estääkseen vastapuolta tekemistä riskitöntä voittoa, on välttämätöntä että

$$Pr(E_1) + Pr(E_2) = 1 = Pr(E_1 \cup E_2).$$

Kun $n > 2$, $E_i \cap E_j \in \mathcal{N}$ kun $i \neq j$ ja, $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{V}$ (eli on varma), meklari on johdonmukainen jos ja vain jos

$$\det \begin{pmatrix} (1-p_1) & -p_2 & \dots & -p_n \\ -p_1 & (1-p_2) & \dots & -p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_1 & -p_2 & \dots & (1-p_n) \end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_n = 0$$

Tämä determinantti lasketaan induktiolla tai lineaari-algebran Sylvesterin lemman kautta:

Lemma 0.0.1. *Jos A on $n \times m$ ja B on $m \times n$ matriisi, ja I_n on $n \times n$ identiteetti matriisi,*

$$\det\Big(I_n + AB\Big) = \det\Big(I_m + BA\Big)$$

Yleisemmin, kun $(E_1 \cap E_2) \in \mathcal{N}$, koska $\big(E_1 \cup E_2 \cup (E_1 \cup E_2)^c\big) \in \mathcal{V}$, seuraa

$$1 = Pr(E_1) + Pr(E_2) + Pr((E_1 \cup E_2)^c) = Pr(E_1) + Pr(E_2) + \big(1 - Pr(E_1 \cup E_2)\big)$$

siis $Pr(E_1 \cup E_2) = Pr(E_1) + Pr(E_2)$ $\square$

Oletetaan että meklari on hinnoitellut johdonmukaisesti keskenään eisopivia tapahtumia $E_1, \dots, E_n$ ja niiden yhdisteitä hinnoilla $Pr(E_1), \dots, Pr(E_n)$, jossa P on äärellisesti additiivinen.

Käsitellään vielä monimutkaisempaa vedonlyöntisopimusta ("satunnaissuuretta")

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \mathbf{1}_{E_x}$$

jossa

$$E_x := \bigcup_{1 \leq i \leq n : x_i = x} E_i = \big(\text{“}X \text{ saa arvon } x\text{“}\big).$$

ja $E_x = \emptyset$ jos $x \neq x_i \ \forall i$.

Vedonlyönninsopimus X maksaa vastapuolelle etukäteen sovittua summaa $x_i \in \mathbb{R}$ silloin kun "sattuma" E_i tapahtuu.

Tämä sopimus on "toistettavissa" vedonlyönnin strategialla $(x_1, \dots, x_n)$.

Koska arbitraasivapaassa hinnoittelusysteemissä hinnat ovat yksikäsitteisiä , seuraa että X:n ainoa johdonmukainen hinta (tulkinta: satunnaissuureen **odotusarvo**, englanniksi Expectation) on

$$\mathbb{E}_{Pr}(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i Pr(E_i) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x Pr(E_x) \ .$$

- Odotusarvo on lineaarinen: kun a, b ovat vakioita ja X, Y satunnaisia,

$$E_{Pr}(aX + bY) = aE_{Pr}(X) + bE_{Pr}(Y)$$

- Odotusarvo on positiivinen: jos $(X \geq 0)$ on varma tapahtuma Pr todennäköisyyden suhteen, eli $Pr(X \geq 0) = 1$, seuraa

$$E_{Pr}(X) \geq 0$$

Huomautus 0.0.1. *Olkoon*

$$\mathcal{X} \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}(E_i) \ : n \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

vedonlyönninsopimusten osajoukko.

Matemaattisessa rahoitusteoriassa, karakterisoidaan arbitraasivapaita hintasysteemejä

$$c = (c(X) : X \in \mathcal{X})$$

Lause 0.0.1. *(Rahoitusteorian ensimmäinen päälause) Hintasysteemi $c(\cdot)$ on arbitraasi-vapaa jos ja vain jos on olemassa hinnoittelu-todennäköisyys Pr, jolla $Pr(E) = 0 \iff E \in \mathcal{N}$, ja kaikille $X \in \mathcal{X}$*

$$c(X) = \mathbb{E}_{Pr}(X) = \sum_{x} x Pr(X = x).$$

Yleisesti Pr ei tarvitse olla yksikäsitteinen, voi olla useita hinnoittelutodennäköisyyksia jotka generoivat samaa hintasysteemia $c(\cdot)$.

Todistus *($\Longleftarrow$): Olkoon $X_1, \ldots, X_m$ satunnaisuureita ja Pr hinnoittelu-todennäköisyys, joka määrä hintasysteemiä*

$$c_k = E_{Pr}(X_k) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x Pr(X_k = x), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Tässä oletamme että $\{ \, x : Pr(X_k = x) > 0\}$ on äärellinen, $\forall k = 1, \ldots, m$.

Olkoon $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ vedonlyönti strategia jolla tapahtuma

$$\left\{ \sum_{k=1}^{m} y_k (X_k - c_k) \geq 0 \right\} \in \mathcal{V}$$

on varma.

$$E_{Pr}\left(\sum_{k=1}^{m} y_k (X_k - c_k) \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(E_{Pr}(X_k) - c_k \right) = 0$$

seuraa että

$$\left\{ \sum_{k=1}^{m} y_k (X_k - c_k) > 0 \right\} \in \mathcal{N}$$

on mahdoton, koska muuten

$$Pr\left(\sum_{k=1}^{m} y_k (X_k - c_k) > 0 \right) > 0$$

josta seuraa ristiriita

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{m} \left(E_{Pr}(X_k) - c_k \right) = E_{Pr}\left(\sum_{k=1}^{m} y_k (X_k - c_k) \right) \\ &= E_{Pr}\left(\left(\sum_{k=1}^{m} y_k (X_k - c_k) \right) \mathbf{1}\left\{ \sum_{k=1}^{m} y_k (X_k - c_k) > 0 \right\} \right) > 0. \end{aligned}$$

Implikaatio ($\Longrightarrow$) osoitetaan rahoitusteorian kurssilla konveksianalyysin argumentilla $\square$

Arbitraasi-vapaassa tilanteessa, hinnoittelu-todennäköisyyden Pr:n avulla, määrittelemällä

$$c(Y) = \mathbb{E}_{Pr}(Y) = \sum_{i} y_i Pr(E_i)$$

laajennetaan alkuperäistä hintasysteemiä säilyttämällä arbitraasivapautta.

Kun on olemassa, hinnoittelutodennäköisyys Pr ei tarvitse olla yksikäsitteinen, siis jos hinta-systeemi $(c(X) : X \in \mathcal{X})$ on arbitraasi-vapaa, sillä voi olla useita arbitraasi-vapaita laajennuksia.

Huomautus 0.0.2. *Tässä johdannossa emme ole vielä paljastaneet että Kolmogorovin todennäköisyyden aksioomeissa tapahtumat E_i tulevat olemaan jonkun pistetapahtumien avaruuden Ω:n osajoukkoja. Sen sijaan De Finetti kannatti minimaalista lähestymistapaa, jossa pistetapahtumien avaruutta Ω ei edes tarvita.*

Todennäköisyys logiikan laajennuksena [1] Vuonna 1949 fyysikko R.T. Cox osoitti miten De Finettin additiivisen todennäköisyyden aksioomat seuraavat kun laajennetaan perinteistä logikkaa epävarmoihin väitteisiin pitämällä kiinni minimaalisista tervejärkisistä ehdoista.

Olkoon A, B, C väitteitä (tapahtumia), I merkitsee (sinun) taustatietoa. Notaatio

$$(A|I) \geq (B|I)$$

tarkoittaa että taustatiedon I:n perusteella väite A on (sinulle) yhtä uskottava tai uskottavampi kun B väiteettä.

- Vaatimus 1): $\geq$ relaatio on täydellinen järjestys,

  eli on *transitiivinen*

  $$(A|I) \geq (B|I) \text{ ja } (B|I) \geq (C|I) \text{ seuraa } (A|I) \geq (C|I), \qquad (0.0.1)$$

  ja taustatiedolla I kaikki väitteet ovat verrattavissa, eli

  $$(A|I) \geq (B|I) \text{ tai } (B|I) \geq (A|I) \qquad (0.0.2)$$

  Kun molemmat ovat voimassa $(B|I) = (A|I)$, eli taustatiedolla I, väitteet A ja B ovat sinulle yhtä uskottavia.

[1] Tämä kappale voidaan sivuuttaa

Koska väitteiden järjestys on täydellinen, taustatiedon I:n perusteella voidaan asentaa jokaiselle väitteelle A uskottavuusaste joka on reaaliluku jota merkitsemme aluksi samalla notaatiolla $(A|I)$. Väitteiden järjestys palautuu reaalilukujen järjestykseen. Tämä uskottavuusaste-funktio ei ole tietenkään yksikäsitteinen. Näytämme että on olemassa funktionaali $\pi(A|I)$ jokä säilyttää $\geq$ järjestyksen ja toteuttaa De Finettin additiivisen todennäköisyyden vaatimukset.

Jatkossa merkitään $AB = A \cap B$.

- Vaatimus 2) On olemassa kuvaus $F(x, y)$ joka on kasvava ja derivoituva ja x, y:n suhteen

$$(AB|I) = F((A|I), (B|A, I)) = F((B|I), (A|B, I))$$

  Siis $(A|I)$ ja $(B|AI)$ määrävät $(AB|I)$ terveen järjen mukaisesti, ja joudutaan samaan arvoon arvioimalla ensin $(B|I)$ ja sitten $(A|B, I)$.

Erityisesti

$$\begin{aligned} (ABC|I) &= F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z)) && (0.0.3) \\ &= F(u, z) = F(x, v) && (0.0.4) \end{aligned}$$

jossa $x = (A|I), y = (B|A, I), z = (C|AB, I), u = F(x, y), v = F(y, z)$

Lemma 0.0.2. *Vaatimuksista seuraa että on olemassa kasvava kuvaus* $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jolla* $w(F(x, y)) = w(x) + w(y)$

Tod. Olkoon $F_1(x, y), F_2(x, y)$ osittaisderivaatat. Derivoimalla 0.0.3 saadaan

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(F(F(x,y),z))}{\partial x} = \frac{\partial(F(x,F(y,z)))}{\partial x} \\
&\Longleftrightarrow F_1(u,z)F_1(x,y) = F_1(x,v), \\
&\frac{\partial(F(F(x,y),z))}{\partial y} = \frac{\partial(F(x,F(y,z)))}{\partial y} \\
&\Longleftrightarrow F_1(u,z)F_2(x,y) = F_2(x,v)F_1(y,z), \\
&\frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)} = \frac{F_2(x,v)}{F_1(x,v)}F_1(y,z) \\
&\Longleftrightarrow G(x,y) = G(x,v)F_1(y,z) \\
&\Longleftrightarrow G(x,v)F_2(y,z) = G(x,y)G(y,z) \text{ jossa } G(x,y) := \frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)}
\end{aligned}
$$

Derivoimalla seuraa

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial z}\Big(G(x,v)F_1(y,z)\Big) = G_2(x,v)F_2(y,z)F_1(y,z) + G(x,v)F_{12}(y,z) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\Big(G(x,v)F_2(y,z)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(G(x,y)G(y,z)\Big)
\end{aligned}
$$

eli $G(x,y)G(y,z)$ ei riipu y:stä. Tämä pätee jos ja vain jos G on muotoa

$$G(x,y) = r\frac{H(x)}{H(y)}$$

Tästä seuraa

$$F_1(y,z) = \frac{H(v)}{H(y)} \quad F_2(y,z) = r\frac{H(v)}{H(z)}$$

Seuraa

$$
\begin{aligned}
&dv = dF(y,z) = F_1(y,z)dy + F_2(y,z)dz \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{H(v)}dv = \frac{1}{H(y)}dy + r\frac{1}{H(z)}dz
\end{aligned}
$$

Olkoon

$$W(x) := \exp\left(\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{H(t)}dt\right)$$

Seuraa kun $v_0 = F(y_0, z_0)$

$$\frac{W(F(y,z))}{W(F(y_0,z_0))} = \frac{W(v)}{W(v_0)} = \exp\left(\int_{v_0}^{v} \frac{1}{H(t)}dt\right) = \exp\left(\int_{F(y_0,z_0)}^{F(y,z)} \frac{1}{H(t)}dt\right) =$$
$$\exp\left(\int_{y_0}^{y} \frac{1}{H(t)}dt + r\int_{z_0}^{z} \frac{1}{H(s)}ds\right) = \exp\left(\int_{y_0}^{y} \frac{1}{H(t)}dt\right)\exp\left(r\int_{z_0}^{z} \frac{1}{H(s)}ds\right) =$$
$$= \frac{W(y)}{W(y_0)}\left(\frac{W(z)}{W(z_0)}\right)^r$$
$$\iff W(v) = W(F(y,z)) = cW(y)W(z)^r$$
jossa $c = \dfrac{W(F(y_0,z_0))}{W(y_0)W(z_0)^r}$ on vakio

Yhtälöstä 0.0.3

$$W(F(x,v)) = cW(x)W(v)^r = W(F(u,z)) = cW(u)W(z)^r$$

Tästä sijoittamalla $W(v) = cW(y)W(z)^r$ saadaan

$$W(x)c^rW(y)^rW(z)^{r^2} = W(u)W(z)^r = W(F(x,y))W(z)^r = W(x)W(y)^rW(z)^r$$
$$\iff cW(z)^r = W(z) \quad \forall z$$

joka pätee jos ja vain jos $r = c = 1$, eli

$$W(F(x,y)) = W(x)W(y)$$

Ottamalla $w(x) := \log(|W(x)|)$, saadaan

$$w(F(x,y)) = \log(|W(F(x,y))|) = \log(|W(x)W(y)|)$$
$$= \log(|W(x)|) + \log(|W(y)|) = w(x) + w(y) \quad \square$$

Huomataan että $w(A|I)$ säilyttää uskottavuusjärjestyksen, se mittaa väitteiden uskottavuutta eri asteikolla.

- Vaatimus 3) On olemassa kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jolla $w(\overline{A}|I) = f(w(A|I))$, jossa $\overline{A}$ on väitteen A:n negaatio.

Tästä seuraa $f(f(x)) = x$. Oletetaan nyt että $\overline{B} \implies A$, josta seuraa $\overline{B}A = \overline{B}$.

$$\begin{aligned}
w(AB|I) &= w(A) + w(B|AI) \\
&= w(A) + f(w(\overline{B}|AI)) \\
&= w(A) + f(w(\overline{B}A|I) - w(A|I)) \\
&= w(A) + f(w(\overline{B}|I) - w(A|I)) \\
&= w(A) + f(f(w(B|I)) - w(A|I)) \\
&= x + f(f(y) - x) \\
&= y + f(f(x) - y)
\end{aligned}$$

jossa $x = w(A), y = w(B|I)$

ja viimeinen yhtälö seuraa vaihtamalla A ja B:n roolit.

Lemma 0.0.3. *On olemassa $c > 0$ jolla*

$$f(x) = \frac{1}{c}\log(1 - \exp(cx))$$

Tod. Olkoon

$$\begin{aligned}
&u := f(y) - x, \quad v := f(x) - y, \\
&x + f(u) = y + f(v) \\
&\frac{\partial(x + f(u))}{\partial x} = 1 - f'(u) = \frac{\partial(y + f(v))}{\partial x} = f'(v)f'(x) \\
&\frac{\partial(x + f(u))}{\partial y} = f'(u)f'(y) = \frac{\partial(y + f(v))}{\partial x} = 1 - f'(v) \\
&\frac{\partial^2(x + f(u))}{\partial y \partial x} = -f''(u)f'(y) = -f''(v)f'(x) \\
&\iff \frac{f''(u)}{f'(u)(1 - f'(u))} = \frac{f''(v)}{f'(v)(1 - f'(v))} = c
\end{aligned}$$

Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{d}{dx}\log(|f'(x)|) = c(1 - f'(x))$$

integroimalla

$$
\begin{aligned}
&\log(f'(x)) = \log(f'(x_0)) + c\int_{x_0}^{x}(1 - f'(t))dt = \\
&\log(f'(x_0)) + c\big((x - x_0) - (f(x) - f(x_0)\big) = a + c(x - f(x)) \\
&f'(x) = A\exp(c(x - f(x))) \\
&\exp(cf(x))df(x) = A\exp(cx)dx \\
&d\exp(cf(x)) = \frac{A}{c}\exp(cx)dx \\
&\exp(cf(x)) = \exp(cf(x_0)) + \frac{A}{c}\int_{x_0}^{x}\exp(ct)dt = \\
&= \exp(cf(x_0)) + \frac{A}{c^2}\big(\exp(cx) - \exp(cx_0)\big) = k + B\exp(cx) \\
&\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{c}\log(k + b\exp(cx))
\end{aligned}
$$

Koska

$$x + f(f(y) - x) = y + f(f(x) - y)$$

saadaan

$$
\begin{aligned}
&x + \frac{1}{c}\log\big(k + b\exp(\log(k + b\exp(cy)) - cx)\big) = \\
&x + \frac{1}{c}\log\big(k + b(k + b\exp(cy))\exp(-cx)\big) = \\
&x + \frac{1}{c}\log\big(k + bk\exp(-cx) + b^2\exp(c(y - x))\big) \\
&= \frac{1}{c}\log\big(k\exp(cx) + bk + b^2\exp(cy)\big) = \frac{1}{c}\log\big(k\exp(cy) + bk + b^2\exp(cx)\big)
\end{aligned}
$$

josta seuraa että $b^2 = k$, siis

$$f(x) = \frac{1}{c}\log(b^2 + b\exp(cx))$$

Koska $f(f(x)) = x$,

$$\frac{1}{c}\log(b^2 + b^3 + b^2\exp(cx)) = x \quad \forall x$$

seuraa $b^2 + b^3 = 0$ ja $b^2 = 1$, josta seuraa $b = -1$ ja

$$f(x) = \frac{1}{c}\log(1 - \exp(cx)) \qquad \square$$

Otetaan uusi uskottavus-skaala $Pr(A|I) = \exp(cw(\overline{A}|I))$. Seuraa lemmasta että

$$\begin{aligned}
&Pr(A|I) = 1 - Pr(\overline{A}),\\
&Pr(\overline{A}|\, I) \in [0,1]\\
&Pr(AB|I) = Pr(A|I)Pr(B|A,I) = Pr(B|I)Pr(A|B,I)
\end{aligned}$$

Kutsutaan $Pr(A|I)$ väitteen A:n todennäköisyydeksi taustatiedolla I.

Huomataan että uskottavuutta voidaan mitata eri skaalalla, säilyttämällä järjestyksen, esimerkiksi vedonlyöntisuhteen (englanniksi odds ratio) skaalalla:

$$\phi(A|I) = \frac{Pr(A|I)}{1 - Pr(A|I)} \in \mathbb{R}$$

Vedonlyöntisuhde ei sovi vedonlyönnin hinnaksi, koska ei täytä De Finettin additiivisuuden vaatimusta.

Todennäköisyysskaala on laskennallisesti kätevämpi, laskenta perustuu tulon ja summan operaatioihin:

$$\begin{aligned}
&Pr(A+B|I) = Pr(A|I) + P(B|I) \quad \text{kun } B \subseteq \overline{A},\\
&Pr(AB|\, I) = Pr(A|I)Pr(B|\, AI) = Pr(B|I)Pr(A|BI)
\end{aligned}$$

Huomautus 0.0.3. *Todennäköisyys on aina ehdollinen todennäköisyys, joka riippuu taustatiedoista. Uskottavuus-järjestys määrää todennäköisyyden yksikäsitteisesti. Mittapuuna voidaan käyttää hypoteettista arpajaispelia, arpalipuilla* $\{1,2,\ldots,N\}$ *jossa* X *on ensimmäiseksi arvottu arpa.*

Olkoon väite $A_k = \{X = k\}$, *ja oletamme että* $(A_k|I) = (A_\ell|I)\ \forall k,\ell$ *eli (sinun mielestä taustatietojen perusteella) kaikki arpajaispelin tulokset ovat yhtä uskottavia. Tämä symmetriaa kutsutaan yhdentekeväisyyden periaatteeksi . Symmetriasta ja additiivisuudesta ja seuraa välittömasti että todennäköisyysasteikolla* $Pr(A_k|I) = 1/N$.

Tämän hypoteettisen pelin todennäköisyyksiä voidaan sitten käyttää mittapuuna. Olkoon B *väite, jolla ei tarvitse olla tekemisessä meidän hypoteettisen arpapelin kanssa, ja*

$$M := \min\left\{ 1 \leq k \leq N : \ (B|I) \leq (A_1 + \cdots + A_k|I) \right\}$$

Seuraa

$$\frac{(M-1)}{N} < Pr(B|I) \leq \frac{M}{N}$$

Silloin kun N *kasvaa, nähdään että väitteiden uskottavuuden järjestys määrää yksikäsitteisesti* $Pr(B|T)$.

Huomataan kuitenkin että samalla taustatiedolla eri henkilöt saattavat asettaa väitteitä eri uskottavuusjärjestykseen, siksi todennäköisyys ei ole yksikäsitteinen. Objektiivisessa Bayes-teoriassa valitaan todennäköisyysmitta joka on vähiten informatiivinen (jolla on maksimaalinen entropia) olleessaan yhteensopiva taustatietojen kanssa.

Kirjallisuutta

[1] Jaynes ET, *Probability theory, the logic of science*. Cambridge 2003.

[2] Sivia DS, Skilling J: *Data Analysis, a Bayesian tutorial*. 2nd edition Oxford 2006

[3] De Finetti B: *Theory of probability: a critical introductory treatment* Wiley 1972

Luku 1

Kolmogorovin aksioomat.

De Finetti osoitti, että ainoa johdonmukainen tapa hinnoitella epävarmoja tapahtumia on additiivisella todennäköisyydellä. Filosofisesti voidaan kiistaanalaistaa numeroituvan additiivisuuden aksiooman tarpellisuus, näin teki De Finetti joka kehitti oman äärellisesti-additiivisen todennäköisyyden teorian. Kuitenkin, todennäköisyyden numeroituva- eli σ-additiivisuus on luonteva oletus rajatapahtumien käsittelemisessä.

Vuonna 1933, venäläinen matemaatikko Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) julkaisi teoksen *Foundation of the Theory of Probability*, joka sisälsi modernin todennäköisyysteorian aksioomeja, todennäköisyysmitan konstruktiota ääretön-ulotteisessa tuloavaruudessa, sekä ehdollisen todennäköisyyden yleistä teoriaa.

Määritelmä 1.0.1 (Algebrat ja σ-algebrat). *Olkoon Ω abstrakti joukko. 2^Ω on Ω:n potenssijoukko, eli kaikkien $\Omega : n$ alijoukkojen kokoelma.*

Olkoon $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ (mahdollisesti pienempi) alijoukkojen perhe. Sanotaan

- *$\mathcal{A}$ algebraksi kun*

  1. $\Omega \in \mathcal{A}$
  2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c = (\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$
  3. $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$

  Kun huomataan että $A \cap B = \big(A^c \cup B^c\big)^c$, määritelmästä seuraa että algebra on suljettu äärellisten leikkauksen ja yhdisteen operaatioiden suhteen.

- *Algebra $\mathcal{A}$ on σ-algebra kun se on suljettu numeroituvan yhdisteen suhteen*

$$\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A} \Longrightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathcal{A}$$

  Seuraa että σ-algebra on suljettu myös numeroituvan leikkauksen suhteen.

- *Pari $(\Omega, \mathcal{A})$ jossa $\mathcal{A}$ on Ω:n σ-algebra kutsutaan mitta-avaruudeksi tai todennäköisyysavaruudeksi .*

- *σ-algebran jäseniä $A \in \mathcal{A}$ kutsutaan mitallisiksi joukoiksi tai tapahtumiksi.*

Määritelmä 1.0.2. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{A})$ todennäköisyysavaruus, jossa $\mathcal{A}$ on Ω:n σ-algebra.*

- *Kuvaus $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ on (positiivinen)* **mitta** *kun $\mu(\emptyset) = 0$ ja μ on σ-additiivinen, eli kaikille jonoille $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ joilla $A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall m \neq n$,*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

- *Mitta μ on* **äärellinen** *kun $\mu(\Omega) < +\infty$, ja on σ-***äärellinen** *jos on olemassa numeroituva mitallinen peite $\{\Omega_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ jolla*

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \quad \text{ja } \mu(\Omega_n) < \infty \quad \forall n.$$

- *Positiivinen mitta μ on* **todennäköisyysmitta** *kun $\mu(\Omega) = 1$.*

Huomautus 1.0.1. *Normalisoimalla, saadaan äärellisestä mitasta μ todennäköisyysmitta:*

$$P(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Tehtävä 1.0.1. *Äärellisesti additiivinen todennäköisyys voi olla melko erikoinen: Olkoon $\Omega = \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \text{ } A \text{ tai } A^c \text{ on äärellinen } \}$$

$$\mu : \mathcal{A} \to [0,1], \quad \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{jos } A \text{ on äärellinen} \\ 1 & \text{jos } A^c \text{ on äärellinen} \end{cases}$$

Osoita että

- $\mathcal{A}$ *on algebra mutta ei ole* σ*-algebra.*

- μ *on äärellisesti additiivinen mutta ei* σ*-additiivinen todennäköisyys.*

Huomautus 1.0.2. *Potenssijoukko* 2^Ω *on* σ*-algebra. Onko mahdollista valita aina todennäköisyysavaruudeksi* $(\Omega, 2^\Omega)$ *, ja määritellä* $P(B)$ *jokaiselle alijoukolle* $B \subseteq \Omega$ *?*

On olemassa esimerkkejä (kts. Banachin ja Tarskin paradoksi) todennäköisyyskolmikosta $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, jossa todennäköysyysmitan* P*:n laajennus* σ*-additiiviseksi mitaksi* $P^* : 2^\Omega \to [0,1]$ *ei ole olemassa. Kun* Ω *on ei-numeroituva, potenssijoukko sattaa olla liian suuri.*

Esimerkki 1.0.1 (Vitali). *Olkoon* $\Omega = \mathbb{T} = \{z = e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$ *,* $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{T}) = \sigma($ $\mathbb{T}$*:n avoimet välit* $)$ *eli pienin* σ*-algebra joka sisältää kaikki ympyrän avoimet välit* (z, w) *(avoimet karteet).*

Määrittelemme todennäköisyysmitan ensin avointen välien kautta

$$P((z,w)) = \frac{\textit{pituus}((z,w))}{2\pi} = \frac{\textit{kulma}(\theta,\psi)}{2\pi}$$

jossa $w = e^{i\psi}$*.*

Caratheodoryn lauseen (1.1.1) avulla voidaan laajentaa P*:n koko Borelin* σ*-algebralle* $\mathcal{B}(\mathbb{T})$*. Osoitamme kuitenkin että* P *ei laajene* σ*-additiiviseksi mitaksi koko potenssijoukolle* 2^Ω*.*

Määritellään ekvivalenssirelaatio

$$z = e^{i\theta} \sim w = e^{i\psi} \iff \left(\frac{\theta - \psi}{2\pi}\right) \in \mathbb{Q}$$

Ylinumeroituvan valinnan aksiooman avulla voidaan valita jokaisesta ekvivalenssiluokasta yhden jäsenen ja muodostaa joukon E*. Määritellään*

$$E_q = \{ze^{i2\pi q} : z \in E\}, \quad q \in \mathbb{Q}.$$

Koska E *koostuu ekvivalenssiluokkien edustajista, seuraa* $E_0 = E$*,* $E_q = E_r$ *kun* $q \sim r$ *ja* $(E_q \cap E_r) = \emptyset$ *kun* $q \neq r \mod 2\pi$*, jossa kun* $q, r \in \mathbb{Q}$*,* $q \sim r \iff q = r \mod 2\pi$*. Näillä notaatioilla,*

$$\mathbb{T} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}/\sim} E_q.$$

Huomataan että mitta P on rotaatio-invariantti $\mathbb{T}$:n avoimille väleille ja niiden virittämällä σ-algebralla koska

$$\text{pituus}(z, w) = \text{pituus}(yz, yw) \text{ kun } y, z, w \in \mathbb{T}.$$

Jos $P(E)$ olisi hyvin määritelty, seuraisi $P(E_q) = P(E)$, mikä johtaa riistiriitaan, koska σ-additiivisuudesta seuraa

$$1 = P(\mathbb{T}) = P\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_q\right) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} P(E_q) = \infty \times P(E) \quad \square$$

1.1 Mitan laajennus

Määritelmä 1.1.1. *Olkoon P todennäköisyysmitta todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{A})$. Kun $A \in \mathcal{A}$ ja $P(A) = 1$ sanotaan, että A tapahtuu P-melkein varmasti (lyhennys: m.v.) ja A^c on P-nollajoukko.*

Sen lisäksi jos $B \notin \mathcal{A}$ mutta $B \supseteq A$ (vastaavasti $B \subseteq A$) jossa $A \in \mathcal{A}$ ja $P(A) = 1$ (vastaavasti $P(A) = 0$), asetetaan $P(B) = 1$ (vastaavasti $P(B) = 0$).

Lemma 1.1.1 (mitan monotoninen suppeneminen). *Olkoon $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoon $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ tapahtumien jono jolla $A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall n$,*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}, \text{ ja merkitään } A_n \uparrow A.$$

Silloin $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ kun $n \uparrow \infty$.

Vastaavasti kun $B_n \supseteq B_{n+1} \in \mathcal{A} \quad \forall n$ ja

$$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}, \text{ merkitään } B_n \downarrow B.$$

Silloin $\mu(B_n) \downarrow \mu(B)$.

Olkoon $C_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n \in \mathcal{A}$.

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \text{ jossa } C_i \cap C_j = \emptyset \text{ kun } \quad i \neq j.$$

P mitan σ-additivisuudesta

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(C_k) = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{k=1}^{n} P(C_k) = \lim_{n\uparrow\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} C_k\right) = \lim_{n\uparrow\infty} P(A_n) \quad \square$$

Toinen väite seuraa ottamalla komplementtijoukkoja, joilla
$P(B^c) = \big(1 - P(B)\big)$.

Lemma 1.1.2. *P-nollajoukkojen numeroituva yhdiste on P-nollajoukko. P-melkein varma tapahtumien numeroituva leikkaus on P-melkein varma.*

Tehtävä 1.1.1. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{A})$ todennäköisyysavaruus, ja $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ additiivinen mitta. Osoita että P on σ-additiivinen jos ja vain jos*

$$\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}, \quad B_n \downarrow \emptyset \quad \Longrightarrow \quad P(B_n) \downarrow 0 \text{ kun } n \uparrow \infty$$

Määritelmä 1.1.2. *Olkoon $(S, \mathcal{T})$ Topologinen avaruus, jossa topologia $\mathcal{T}$ koostuu kaikista $\mathcal{S}$:n avoimista joukoista.* **Borelin** *σ-algebra $\mathcal{B}(S) := \sigma(\mathcal{T})$ on avointen joukkojen virittämä σ-algebra.*

$\mathcal{B}(S)$:n jäseniä kutsutaan Borelin joukoiksi. Koska yleinen Borelin joukko voi olla liian monimutkainen esitettäväksi, on hyödyllistä tietää yksinkertaisempi joukkoperhe joka virittää $\mathcal{B}(S)$:n numeroituvien yhdisteiden ja leikkausten kautta.

Tässä vaiheessa on hyvä palauttaa mieleen topologian aksioomat: $\emptyset$ ja koko avaruus S ovat avoimia, avointen joukkojen mielivaltainen (myös ylinumeroituva) yhdiste on avoin, ja avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin.

Esimerkki 1.1.1. *Olkoon $S = \mathbb{R}$, silloin*

$$\mathcal{A} := \sigma\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Todistus: koska

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, x + n^{-1})$$

on Borelin joukko, seuraa että $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Kun $a < b$,

$$(a, b) = (-\infty, a]^c \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, b - n^{-1}] \right) \in \mathcal{A}$$

Olkoon $U \subseteq \mathbb{R}$ avoin. Jokaiselle $q \in U \cap \mathbb{Q}$ on olemassa $\varepsilon_q > 0$ jolla

$(q-\varepsilon_q, q+\varepsilon_q) \subseteq U$. Koska $\mathbb{Q}$ on tiheä $\mathbb{R}$:ssa, seuraa että

$$U = \bigcup_{q \in U \cap \mathbb{Q}} (q-\varepsilon_q, q+\varepsilon_q)$$

jossa yhdiste on numeroituva. Tästä seuraa että $U \in \mathcal{S}$ ja siksi $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}$.

Mitan määräys ja laajennukset Tämä materiaali pohjautuu Williamsin kirjaan *Probability with Martingales*. Charatheodoryn lausetta voit myös lukea suomeksi Elfving ja Tuomisen kirjasta.

Määritelmä 1.1.3. *Joukkoperhettä $\mathcal{D} \subseteq 2^\Omega$ kutsutaan d-luokaksi kun*

1. $\Omega \in \mathcal{D}$.
2. $A, B \in \mathcal{D}, A \subseteq B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$.
3. $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}, A_n \uparrow A \Longrightarrow A \in \mathcal{D}$.

Määritelmä 1.1.4. *Joukkoperhe $\mathcal{I} \subseteq 2^\Omega$ kutsutaan π-luokaksi jos on suljettu äärellisen leikkauksen suhteen:*

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I} \Longrightarrow I_1 \cap I_2 \in \mathcal{I}$$

Tehtävä 1.1.2. *Mielivaltainen π(vastaavasti d)-luokkien, leikkaus on π(vastaavasti d)-luokka. Eli*

$$d(\mathcal{C}) = \bigcap_{d\text{-luokat } \mathcal{I} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{I}$$

on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä d-luokka, ja

$$\pi(\mathcal{C}) = \bigcap_{\pi\text{-luokat } \mathcal{J} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{J}$$

on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä π-luokka. Myös

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\sigma\text{-algebrat } \mathcal{A} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{A}$$

on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä σ-algebra.

Lemma 1.1.3 (Dynkin)**.** *1. Joukkoperhe $\mathcal{C}$ on σ-algebra jos ja vain jos on sekä π-luokka että d-luokka.*

2. *Jos $\mathcal{I}$ on π-luokka, pienin d-luokka joka sisältää $\mathcal{I}$ on σ-algebra, siis $d(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I})$*

1. Tod. Selvästi σ-algebra on sekä d- että π-luokka. Toisinpäin rittää osoittaa, että numeroituvan yhdisteen ominaisuus on voimassa. Olkoon $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$ oletuksesta seuraa että

$$A_n := B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = (B_1^c \cap B_2^c \cap \cdots \cap B_n^c)^c \in \mathcal{C}$$
$$A_n \uparrow A := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \in \mathcal{C} \quad \square$$

2. Tod. Lemman ensimmäisestä osasta riittää osoittaa että $d(\mathcal{I})$ on π-luokka. Osoitetaan ensin että

$$\mathcal{D}_1 := \{B \in d(\mathcal{I}) : B \cap E \in d(\mathcal{I}) \ \forall E \in \mathcal{I}\} \text{ , jossa } \mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}_1 \subseteq d(\mathcal{I})$$

on d-luokka:

$\Omega \in \mathcal{D}_1$, koska $\Omega \in d(\mathcal{I})$, $(\Omega \cap E) = E \in \mathcal{I} \ \forall E \in \mathcal{I}$.

Jos $B_1 \subseteq B_2$, $B_i \in \mathcal{D}_1, i = 1, 2$, $(B_2 \setminus B_1) \in d(\mathcal{I})$, ja $\forall E \in \mathcal{I}$, $(B_2 \setminus B_1) \cap E = (B_2 \cap E) \setminus (B_1 \cap E)$. Nyt $(B_i \cap E) \in d(\mathcal{I}), i = 1, 2$ ($\mathcal{D}_1$ määritelmä), ja koska $d(\mathcal{I})$ on d-luokka, seuraa että $(B_2 \setminus B_1) \cap E \in d(\mathcal{I}) \ \forall E \in \mathcal{I}$, siis $(B_2 \setminus B_1) \in \mathcal{D}_1$.

Samoin, kun $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}_1$, $B_n \uparrow B = \bigcup_n B_n$ ja $E \in \mathcal{I}$,

$$B \cap E = \bigcup_n (B_n \cap E)$$

jossa $(B_n \cap E) \uparrow (B \cap E)$. Nyt $(B_n \cap E) \in d(\mathcal{I})$ ($\mathcal{D}_1$)-määritelmä) ja koska $d(\mathcal{I})$ on d-luokka seuraa että $(B \cap E) \in \mathcal{D}_1 \ \forall E \in \mathcal{I}$. Siis on osoitettu että $\mathcal{D}_1$ on d-luokka. Koska $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}_1 \subseteq d(\mathcal{I})$, seuraa että $\mathcal{D}_1 = d(\mathcal{I})$.

Olkoon nyt

$$\mathcal{D}_2 := \{B \in d(\mathcal{I}) : B \cap A \in d(\mathcal{I}) \ \forall A \in d(\mathcal{I})\} \subseteq d(\mathcal{I})$$

Seuraa myös että $\mathcal{D}_2 \supseteq \mathcal{I}$, koska olemme osoittaneet että jos $E \in \mathcal{I}, B \in \mathcal{D}_1 = d(\mathcal{I})$ silloin $(E \cap B) \in d(\mathcal{I})$.

Kuten edellisissä askeleissa voidaan osoittaa että $\mathcal{D}_2$ on d-luokka, ja siksi $\mathcal{D}_2 = d(\mathcal{I})$. Tästä seuraa että d-luokka $d(\mathcal{I})$ on π-luokka, ja lemman ensimmäisestä osasta seuraa että $d(\mathcal{I})$ on σ-algebra. Yleisesti $d(\mathcal{I}) \subseteq \sigma(\mathcal{I})$, koska $d(\mathcal{I})$ on σ-algebra joka sisältää $\mathcal{I}$, seuraa että $d(\mathcal{I}) \supseteq \sigma(\mathcal{I})$, siis $d(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I})$ $\square$

Lause 1.1.1 (Laajennuksen yksikäsitteisyyys). *Olkoon $\mathcal{I}$ π-luokka, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{I})$, P ja Q todennäköisyys mittoja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{A})$, jolla $P(\Omega) = Q(\Omega) = 1$ ja $P(I) = Q(I) \quad \forall I \in \mathcal{I}$. Silloin $P(A) = Q(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$.*

Tod. Olkoon

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : \ Q(A) = P(A)\} \subseteq \mathcal{A}$$

$\mathcal{D}$ on d-luokka: $\Omega \in \mathcal{D}$ (oletus) jos $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subseteq B$,

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) = Q(B) - Q(A) = Q(B \setminus A)$$

koska P, Q ovat todennäköisyysmittoja $(\Omega, \mathcal{A})$-avaruudessa.

Jos $A_n \uparrow A$, $A_n \in \mathcal{D}$, $A \in \mathcal{A}$, lemmasta (1.1.1) seuraa

$$P(A) = \lim_n P(A_n) = \lim_n Q(A_n) = Q(A)$$

josta seuraa että $A \in \mathcal{D}$. Koska $\mathcal{D}$ on d-luokka, ja oletuksesta $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{I}$ joka on π-luokka, Dynkin lemmasta 1.1.3 seuraa että $\mathcal{D} \supseteq \sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{A}$, eli $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ $\square$.

Esimerkki 1.1.2. *Kun $\Omega = \mathbb{R}$, joukkoperhe*

$$\mathcal{I} := \{(-\infty, t], t \in \mathbb{R}\}$$

on π-luokka, ja $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Borelin σ-algebra). Kun $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, todennäköisyysavaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on olemassa korkeintaan yksi todennäköisyys mitta P jolla $F(t) := P((-\infty, t])\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Riittävät ja välttämättömät ehdot todennäköisyysmitan P:n olemassaololle ovat:

kuvaus $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ on ei-vähenevä,oikealta jatkuva ja $\lim_{t\uparrow+\infty} F(t) = 1$, $\lim_{t\uparrow+\infty} F(-t) = 0$.

Teoreema 1.1.1 (Caratheodoryn laajennuslause)**.** *Olkoon $\mathcal{A}_0$ Ω:n tapahtumien algebra, ja olkoon $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$.*

Jos kuvaus $\lambda_0 : \mathcal{A}_0 \to [0,\infty]$ on σ-additiivinen, on olemassa yksikäsitteinen σ-additiivinen mittalaajennus $\lambda : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ jolla $\lambda(A) = \lambda_0(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}_0$.

Tod. Laajennuksen yksikäsittyys on osoitettu lemmassa (1.1.1). Olemassaolon todistus on jaettu eri vaiheisiin:

Lemma 1.1.4. *Olkoon $\mathcal{A}_0 \subseteq 2^\Omega$ algebra, ja mielivaltainen kuvaus $\lambda : \mathcal{A}_0 \to [0,+\infty]$ jolla $\lambda(\emptyset) = 0$.*

Sanotaan että $L \in \mathcal{A}_0$ on λ-joukko jos se jakaa siististi $\mathcal{A}_0$:n seuraavalla tavalla:

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap L) + \lambda(A \cap L^c), \quad \forall A \in \mathcal{A}_0$$

- *λ-joukkojen kokoelma $\mathcal{L}_0$ on algebra ja $\lambda : \mathcal{L}_0 \to [0,+\infty]$ on äärellisesti additiivinen.*

- *Jos $L_1, L_2, \dots L_n \in \mathcal{L}_0$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ kun $i \neq j$, $A \in \mathcal{A}_0$,*

$$\lambda\biggl(\bigcup_{k=1}^n (L_k \cap A)\biggr) = \sum_{k=1}^n \lambda(L_k \cap A)$$

Tod. Selvästi Ω on λ-joukko ja λ-joukon komplementti on λ-joukko.
Olkoon L_1, L_2 λ-joukot. Osoitamme että $L = (L_1 \cap L_2) \in \mathcal{L}_0$
$L^c \cap L_2 = L^c \cap L_1$, $L^c \cap L_2^c = L_2^c$. Kun $A \in \mathcal{A}_0$, koska L_2 on λ-joukko

$\lambda(A) = \lambda(L_2 \cap A) + \lambda(L_2^c \cap A)$
$\lambda(L^c \cap A) = \lambda(L_2 \cap (L^c \cap A)) + \lambda(L_2^c \cap (L^c \cap A)) = \lambda(L_2 \cap L_1^c \cap A) + \lambda(L_2^c \cap A)$
$\lambda(L_2 \cap A) = \lambda(L_1 \cap L_2 \cap A) + \lambda(L_1^c \cap L_2 \cap A)$ (koska L_1 on λ-joukko)

Tästä seuraa

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \lambda(L_1 \cap L_2 \cap A) + \lambda(L_1^c \cap L_2 \cap A) + \lambda(L_2^c \cap A) \\ &= \lambda(L \cap A) + \lambda(L^c \cap A) - \lambda(L_2^c \cap A) + \lambda(L_2^c \cap A),\end{aligned}$$

siis $L = (L_1 \cap L_2)$ on λ-joukko. Komplementin avulla näemme että myös $(L_1 \cup L_2)$ on λ-joukko, siis $\mathcal{L}_0$ on algebra.

Kun $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_0$, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, $A \in \mathcal{A}_0$, koska $L_1^c \supseteq L_2$,

$$\lambda(A \cap (L_1 \cup L_2)) = \lambda(A \cap (L_1 \cup L_2) \cap L_1) + \lambda(A \cap (L_1 \cup L_2) \cap L_1^c) = \lambda(A \cap L_1) + \lambda(A \cap L_2)$$

Äärellinen additiivisuus seuraa kun $A = \Omega$ $\square$.

Määritelmä 1.1.5. *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{A})$ *todennäköisyysavaruus.*

Kuvaus $\lambda : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *on ulkomitta (engl. outer measure) jos*

1. $\lambda(\emptyset) = 0$,
2. $A_1 \subseteq A_2 \quad, A_i \in \mathcal{A},\ i = 1, 2, \quad \Longrightarrow \quad \lambda(A_1) \leq \lambda(A_2)$
3. λ *on ali-*σ*-additiivinen: kun* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$,

$$\lambda\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \lambda(A_n)$$

Lemma 1.1.5 (Caratheodory)**.** *Olkoon* λ*-ulkomitta todennäköisyysavaruudessa* $(\Omega, \mathcal{A})$*. Joukkoperhe*

$$\mathcal{L} = \{L \in \mathcal{A} : L \text{ on } \lambda\text{-joukko}\}$$

on σ*-algebra ja kuvaus* $\lambda : \mathcal{L} \to [0, +\infty]$ *on* σ*-additiivinen mitta.*

Tod. Lemman (1.1.4) nojalla jää osoitettavaksi että kun $\{L_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ kun $i \neq j$, seuraa

$$L = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n\right) \in \mathcal{L} \text{ ja } \lambda(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(L_n) \ .$$

Koska λ on sub-σ-additiivinen, kun $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) \leq \lambda(A \cap L) + \lambda(A \cap L^c)$$

Olkoon $M_n := \bigcup_{k\le n} L_k$. Lemmasta (1.1.4) seuraa että $M_n \in \mathcal{L}$ (koska $\mathcal{L}$ on algebra), eli kaikille $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap M_n^c) + \lambda(A \cap M_n) \ge \lambda(A \cap L^c) + \lambda(A \cap M_n)$$
$$= \lambda(A \cap L^c) + \sum_{k=1}^{n} \lambda(A \cap L_k)$$

koska λ on ali-σ-additiivinen $\mathcal{A}$:ssa ja äärellisesti additiivinen $\mathcal{L}$:ssa. Tämä pätee jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ eli

$$\lambda(A) \ge \lambda(A \cap L^c) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A \cap L_k) \ge \lambda(A \cap L^c) + \lambda(A \cap L)$$

Ali-additiivisuudesta seuraa $\lambda(A) = \lambda(A \cap L) + \lambda(A \cap L^c)$, eli $L \in \mathcal{L}$. Kun sijoitetaan A=L, σ-additiivisuus seuraa

$$\lambda(L) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(L_k) \ . \quad \square$$

Caratheodoryn laajennuslauseen (1.1.1) todistus:

Olkoon $\mathcal{G} = 2^{\Omega}$, ja määritellään

$$\lambda(G) := \inf_{\{F_n\}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_0(F_n) \qquad \forall G \subseteq \Omega$$

jossa infimum otetaan yli tapahtumien jonot $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}_0$ jolla $\bigcup_n F_n \supseteq G$.

a) Kuvaus $\lambda : 2^{\Omega} \to [0, +\infty]$ on ulkomitta.

Tod. Selvästi $\lambda(\emptyset) = 0$ ja λ on kasvava. Olkoon jono $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq 2^{\Omega}$, ja $\varepsilon > 0$. Jokaiselle n:lle on olemassa jono $\{F_{n,k} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}_0$ jolla

$$G_n \subseteq \bigcup_k F_{n,k} \quad \text{ja} \quad \lambda(G_n) \le \sum_k \lambda_0(F_{n,k}) \le \lambda(G_n) + \varepsilon 2^{-n}.$$

Olkoon $G = \bigcup_n G_n \subseteq \bigcup_n \bigcup_k F_{n,k}$. Koska joukot $\{F_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}$ peittävät G:n

$$\lambda(G) \le \sum_n \sum_k \lambda_0(F_{n,k}) \le \sum_n \lambda(G_n) + \varepsilon$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, ali-σ-additiivisuus seuraa.

Lemmasta (1.1.5) seuraa että λ on σ-additiivinen mitta todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{L})$, jossa λ-joukkojen σ-algebra on

$$\mathcal{L} = \{L \subseteq \Omega : \lambda(G) = \lambda(G \cap L) + \lambda(G \cap L^c)\ \forall G \subseteq \Omega\}$$

Osoitan seuraavaksi että **b)** $\lambda(A) = \lambda_0(A)$ kun $A \in \mathcal{A}_0$ ja **c)**$\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{L}$. Tästä seuraa että λ on λ_0:n laajennusmitta todennäköisyysavaruuteen $(\Omega, \mathcal{L})$, jossa σ-algebra $\mathcal{L} \supseteq \sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$.

b) Kun $A \in \mathcal{A}_0$, $\lambda(A) \leq \lambda_0(A)$. Olkoon $A \subseteq \bigcup_n A_n$ jossa $A_n \in \mathcal{A}_0$. Koska $\mathcal{A}_0$ on algebra, voidaan olettaa että joukot $\{A_n\}$ ovat erillisiä,

muuten otetaan $A'_1 = A_1$, ja rekursiivisesti $A'_n = (A_n \setminus A'_{n-1})$. Silloin $\left(\bigcup_n A'_n\right) = \left(\bigcup_n A_n\right) \supseteq A$ ja koska $\mathcal{A}_0$ on algebra, $A'_n \in \mathcal{A}_0$.

$$\lambda_0(A) = \lambda_0\left(\bigcup_n (A \cap A_n)\right) = \sum_n \lambda_0(A \cap A_n) \leq \sum_n \lambda_0(A_n)$$

(tässä tulee käyttöön laajennuslauseen oletus, $\lambda_0 : \mathcal{A}_0 \to [0, +\infty]$ on σ-additiivinen algebralla $\mathcal{A}_0$). Ottamalla infimumin oikealta puolelta seuraa että $\lambda_0(A) \leq \lambda(A)$.

c) Olkoon $A \in \mathcal{A}_0$ ja $G \subseteq \Omega$.

$\forall \varepsilon > 0$, on olemassa jono $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}_0$ jolla $G \subseteq \bigcup\limits_n A_n$ ja

$$\lambda(G) + \varepsilon \geq \sum_n \lambda_0(A_n).$$

Koska $A \in \mathcal{A}_0$ λ:n-määritelmästä

$$\sum_n \lambda_0(A_n) = \sum_n \lambda_0(A_n \cap A) + \sum_n \lambda_0(A_n \cap A^c) \geq \lambda(G \cap A) + \lambda(G \cap A^c)$$

koska joukot $\{(A_n \cap A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ peittävät $(G \cap A)$:n ja joukot $\{(A_n \cap A^c)\}_{n \in \mathbb{N}}$ peittävät $(G \cap A^C)$. Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen,

$$\lambda(G) \geq \lambda(G \cap A) + \lambda(G \cap A^c)$$

Koska $\lambda : 2^\Omega \to [0, +\infty]$ on ulkomitta ja siksi ali-additiivinen, yhtäsuuruus seuraa, eli $A \in \mathcal{L}$ $\square$

Esimerkki: Yleinen todennäköisyysmitta reaaliakselilla (Kuten esimerkissa 1.1.2) olkoon $\Omega = \mathbb{R}$ ja $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Olkoon $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ kuvaus joka on

1. ei-vähenevä funktio
2. oikealta jatkuva eli $F(t+) := \lim_{u \downarrow t} F(u) = F(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$.
3. $F(+\infty) := \lim_{t \uparrow +\infty} F(t) = 1$, $F(-\infty) := \lim_{t \downarrow -\infty} F(t) = 0$.

Seuraa että on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ jolla $P((a,b]) = (F(b) - F(a))$, $a < b \in \mathbb{R}$.

Tod. Yksikäsitteisyys seuraa lemmasta (1.1.2) koska $\{(a,b] : a < b \in \mathbb{R}\}$ on π-luokka. Olkoon $\mathcal{A}_0$ on kokoelma joukoista joilla on esitys

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} (a_k, b_k]$$

jossa $m \in \mathbb{N}, a_k \le b_k \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{A}_0$ on algebra joka virittää Borelin σ-algebran $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Määritellään kuvaus $P^{(0)} : \mathcal{A}_0 \to [0,1]$

$$P^{(0)}(A) = \sum_{k=1}^{m} \big(F(b_k) - F(a_k)\big)$$

silloin kun esityksen joukot ovat erillisiä, $(a_k, b_k] \cap (a_h, b_h] = \emptyset\ h \neq k$.

$P^{(0)}(A)$ ei riipu A:n esityksestä, ja on additiivinen $\mathcal{A}_0$ algebrassa.

Kun osoitamme että $P^{(0)}$ on σ-additiivinen algebrassa $\mathcal{A}_0$, Caratheodoryn laajennuslauseesta seuraa että on olemassa laajennus P koko Borelin σ-algebralle.

Tod. Vastaoletus: on olemassa ei-kasvava jono $A_n \in \mathcal{A}_0$, $A_n \supseteq A_{n+1}$, ja ϵ jolla $P^{(0)}(A_n) \ge 4\varepsilon > 0\ \forall n$. σ-additiivisuus on todistettu kun osoitamme

$$\bigcap_n A_n \neq \emptyset$$

Olkoon

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} (a_k^n, b_k^n]$$

jossa $-\infty < a_k^n \le b_k^n \le a_{k+1}^n \le b_{k+1}^n < +\infty$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletuksesta (3) seuraa että on olemassa $z \ge 0$ jolla $F(-z) < \varepsilon$ ja $(1 - F(z)) < \varepsilon$.

Muuten olisi olemassa $\varepsilon > 0$ jolla $\forall z \ge 0$ $F(-z) > \varepsilon$ tai $F(z) < 1 - \varepsilon$, joka on riistiriidassa oletuksen $F(-\infty) = 0$ ja $F(+\infty) = 1$ kanssa.

Koska F on oikealta jatkuva, on olemassa $x_k^n \in (a_k^n, b_k^n]$ jolla

$$F(x_k^n) \le F(a_k^n) + \varepsilon 2^{-(k+n)}$$

Olkoon

$$B_n' = \left(\bigcup_{k=1}^{m_n} (x_k^n, b_k^n] \cap [-z, z] \right) \subseteq A_n, \quad B_n = \left(\bigcap_{l \le n} B_l' \right) \subseteq A_n$$

jossa $B_n \in \mathcal{A}_0$. Seuraa

$$A_n \setminus B_n = \bigcup_{l \le n} (A_n \setminus B_l') \subseteq \bigcup_{l \le n} (A_l \setminus B_l')$$

Koska P_0 on äärellisesti additiivinen $\mathcal{A}_0$:ssa ,

$$P^{(0)}(A_n \setminus B_n) \le P^{(0)}((-z, z]^c) + \sum_{l=1}^{n} P^{(0)}\big((A_l \setminus B_l') \cap (-z, z]\big)$$

$$\le P^{(0)}((-z, z]^c) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_l} P^{(0)}\big((a_k^l, x_k^l]\big)$$

$$= F(-z) + (1 - F(z)) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_l} \big\{F(x_k^l) - F(a_k^l)\big\} \le 2\varepsilon + \varepsilon \sum_{l=1}^{n} 2^{-l} \sum_{k=1}^{m_l} 2^{-k} \le 3\varepsilon,$$

jossa geometriselle sarjalle pätee $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$. Tästä seuraa

$$P^{(0)}(B_n) = P^{(0)}(A_n) - P^{(0)}(A_n \setminus B_n) \ge (4 - 3)\varepsilon \quad \forall n$$

josta seuraa $B_n \ne \emptyset$. Olkoon $\bar{B}_n$ joukon B_n sulkeuma. Koska $[x_k^n, b_k^n] \subseteq (a_k^n, b_n^k]$,

$\forall n$ $A_n \cap [-z, z] \supseteq \bar{B}_n \supseteq B_n \ne \emptyset$.

Koska $B_n \supseteq B_{n+1}$, myös $\bar{B}_n \supseteq \bar{B}_{n+1}$. Tästä seuraa

$$\bigcap_n A_n \supseteq \bigcap_n \bar{B}_n \ne \emptyset$$

muuten kokoelma $\{(\bar{B}_n)^c = \mathbb{R} \setminus \bar{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ olisi kompaktin joukon $[-z, z]$ avoin peite ilman äärellistä alipeitettä:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus \bar{B}_n) \supseteq [-z, z]$$

jossa $\bar{B}_n \supseteq \bar{B}_{n+1} \, \forall n$, ja $(\mathbb{R} \setminus \bar{B}_n) \not\supseteq [-z, z]$, koska $[-z, z] \supseteq \bar{B}_n \neq \emptyset$ $\square$

Esimerkki 1.1.3. *Kun*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , -\infty < x \leq 0 \\ x & , 0 < x \leq 1 \\ 1 & , 1 < x < \infty \end{cases}$$

P on tasainen jakauma välissä $[0, 1]$, jolla

$$P((a, b]) = F(b) - F(a) = \min(b, 1) - \max(a, 0), \quad a < b.$$

Voidaan myös määritellä Lebesguen mitan koko reaali-akselille:

$$\lambda(A) := \sum_{z \in \mathbb{Z}} P(A + z), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

jolla $\lambda((a, b]) = (b - a)$, $a < b$. Lebesguen mitta on σ-äärellinen ja siirto-invariantti $\lambda(A + x) = \lambda(A)$, $x \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.2 Sovellus: Tulo σ-algebra ja tulo-todennäköisyys

Olkoon $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ ja $(\Omega'', \mathcal{F}'', P'')$ todennäköisyyskolmikot , ja olkoon $\Omega = \Omega' \times \Omega''$.

Tuloavaruus Ω varustetaan tulo-σ-algebralla

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 := \sigma\big(A \times B : A \in \mathcal{F}', B \in \mathcal{F}'', \big)$$

eli mitallisten joukkojen tulojen virittämä σ-algebra.

Olkoon

$$\mathcal{A} = \left\{ C \subseteq \widetilde{\Omega} : C = \bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times B_k) \text{ jossa } A \in \mathcal{F}', B \in \mathcal{F}' \right\}$$

Selvästi $\mathcal{A}$ on algebra ja $\sigma(\mathcal{A}) = \widetilde{\mathcal{F}}$.

Määritellään ensin additiivinen kuvaus $P^{(0)} : \mathcal{A} \to [0,1]$: kun

$$C = \bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times B_k)$$

jossa $(A_k \times B_k) \cap (A_l \times B_l) = \emptyset$ kun $l \neq k$,

$$P^{(0)}(C) = \sum_{k=1}^{m} P'(A_k) P''(B_k),$$

joka ei riipu C:n esityksestä (harjoitustehtävä). Kun osoitamme että kuvaus $P^{(0)} : \widetilde{\mathcal{A}} \to [0,1]$ on myös σ-additiivinen, Caratheodoryn laajennuslauseesta seuraa että on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitan $\widetilde{P}^{(0)}$ laajennus $\widetilde{P} = (P_1 \otimes P_2) : \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \to [0,1]$ jolla $\widetilde{P}^{(0)}(\widetilde{A}) = \widetilde{P}(\widetilde{A})$ kun $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{A}}$. $(P_1 \otimes P_2)$ kutsutaan tulo-todennäköisyydeksi. Todistuksen esitämme myöhemmin Fubinin lauseen yhteydessä monotonisen konvergenssin avulla. Tämä tulos yleistyy suoraan myös äärellisiin tuloavaruuksiin $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$. Äärettömän ulotteisen tulomitan konstruktio myös onnistuu Kolmogorovin laajennuslauseen seurauksena, ainakin kun $\Omega = \mathbb{R}$ (tai yleisemmin kun Ω on Borelin avaruus, kts. seuraava luku).

Esimerkki Yleinen Todennäköisyysmitta $(\mathbb{R}^d)$-avaruudessa Voidaan osoittaa (harjoitustehtävä) että

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} := \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{d\text{-kertaa}}$$

Kun $s = (s_1, \ldots, s_d), t = (t_1, \ldots, t_d) \in \big(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\big)^d$, merkitään

$$s \le t \iff s_i \le t_i,\ i = 1, \ldots, d, \quad s < t \iff s_i < t_i,\ i = 1, \ldots, d,$$
$$(s,t] = \big\{x \in \mathbb{R}^d : s < x \le t\big\} = (s_1, x_1] \times \cdots \times (s_d, t_d]$$

Kun $d > 1$, järjestys-relaatio $\le$ ei ole täydellinen, eivät kaikki parit $s, t \in \mathbb{R}^d$ ovat verrattavissa.

Voidaan osoittaa että $\sigma\big((-\infty, q] : q \in \mathbb{Q}^d\big) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (harjoitustehtävä).

Olkoon P todennäköisyys $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$:ssa.
Määritellään kertymäfunktio

$$F(t) = P\big((-\infty, t]\big) = P\big(\{\, x \in \mathbb{R}^d : x_i \le t_i,\ i = 1, \dots, d\}\big),\ t \in \mathbb{R}^d$$

Seuraa että

1. $F(t)$ on ei vähenevä $\le$ osittais-järjestyksen suhteen,
2. $F(t)$ on oikealta jatkuva, eli kun $t_n \downarrow t$, $F(t_n) \downarrow F(t)$,
3. $F(-\infty) := \lim_{t \downarrow -\infty} F(t) = 0$ ja $F(+\infty) := \lim_{t \uparrow +\infty} F(t) = 1$.

Toisinpäin, jos funktio $F : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ toteuttaa $(1), (2), (3)$, On olemassa todennäköisyysmitta P $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$:ssa jolla $F(t) = P((-\infty, t])$ $\forall t \in \mathbb{R}^d$. Lauseen 1.1 todistus yleistyy suoraan äärellis-ulotteiseen tilanteeseen.

Esimerkki 1.2.1. *Jos $P_1, \dots, P_d$ ovat todennäköisyysmittoja $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avaruudessa, ja $F_1(t_1), \dots, F_d(t_d)$ niiden kertymäfunktio, on olemassa tulotodennäköisyys $\mathbb{P} = (P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_d)$ $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ avaruudessa, jolla on kertymäfunktio*

$$\mathbb{F}(t) := F_1(t_1) F_2(t_2) \dots F_d(t_d), \quad t \in \mathbb{R}^d$$

ja jos $B_1, \dots, B_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(B_1 \times \cdots \times B_d) = P_1(B_1) \times \cdots \times P_d(B_d)$$

Luku 2

Todennäköisyys äärettömissä tulo-avaruuksissa ja Kolmogorovin laajennuslause

Jatkossa työskentelemme todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ joka on tarpeeksi rikas sisältämään P-rippumattomien satunnaismuuttujen jonoja $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$. Haluamme varmistaa ensin että selläinen on olemassa.

Vaikka tässä kurssissa todennäköisyysmittojen jonon tulomitan olemassaolo tuloavaruudessa riittäisi meille hyvin pitkälle, todistamme saman tien Kolmogorovin laajennuslausetta, joka koskee mielivaltaisia tuloavaruuksia, eikä rajoitu tulomittoihin. Todistuksessa ei käytetä muuta kun Caratheodoryn laajennuslauseetta ja pientä kompaktisuuden argumenttia.

Määritelmä 2.0.1. *Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$ satunnaisprosessi on satunnaismuuttujen perhe $(X_t : t \in \mathbb{T})$ jossa $\mathbb{T}$ on mielivaltainen indeksijoukko, ja $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$.*

Esimerkiksi $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ voidaan tulkita aikaparametriksi, joka voi olla diskreetti tai jatkuva.

Määritelmä 2.0.2. *Äärellisulotteisten todennäköisyysmittojen perhe $\mathbb{R}$:ssa on*

$$\left(P_{t_1,\dots,t_n} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,1], \quad n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T} \right)$$

on **yhteensopiva** *, jos*

1.

$$P_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n) = P_{t_{\pi(1)},\dots t_{\pi(n)}}\big(A_{t_{\pi(1)}} \cdots \times A_{t_{\pi(n)}}\big)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, A_1, \dots A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}, \quad \forall \text{ permutaatiolle } \pi$$

2.

$$P_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n) = P_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(A_1 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{R})$$

Korostamme että seuraavassa lauseessa indeksijoukko $\mathbb{T}$ on mielivaltainen.

Teoreema 2.0.1. *(Daniell-Kolmogorov,1933) Olkoon*

$$\left(P_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}^n\right)$$

yhteensopiva perhe äärellisulotteisista todennäköisyysjakaumoista $\mathbb{R}$:ssa, indeksijoukolla $\mathbb{T}$.

On olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ tuloavaruudella $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ varustettuna tulo-topologian virittämällä sylinterien σ-algebralla $\sigma(\mathcal{C})$,

jolla $\forall n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : \ (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in B_n\right\}\right) = P_{t_1,\dots,t_n}(B_n) \tag{2.0.1}$$

Todistus

Tuloavaruuden $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ jäsenet ovat kuvaukset $t \mapsto \omega_t \in \mathbb{R}$.

Määritellään algebra $\mathcal{C}$ joka koostuu sylintereistä

$$C = \left\{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in B_n\right\}$$

jossa $n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Kaava (2.0.1) määrittelee kuvauksen $\mathbb{P}_0 : \mathcal{C} \to [0, 1]$.

Yhteensopivuuden oletuksesta seuraa että $\mathbb{P}_0(C)$ on hyvin määritelty, siis ei riipu sylinterin C:n esityksestä.

Koska kahdelle sylintereille löytyy esityksiä yhteisellä indeksijoukolla, ja koska äärellis-ulotteiset jakaumat ovat todennäköisyydet, ei ole vaikea osoittaa että kuvaus $\mathbb{P}_0 : \mathcal{C} \to [0,1]$ on äärellisesti additiivinen. (harjoitus tehtävä).

Kun osoitamme että $\mathbb{P}_0$ on myös σ-additiivinen $\mathcal{C}$ algebrassa, Caratheodoryn laajennuslause astuu voimaan ja $\mathbb{P}_0$ voidaan laajentaa yksikäsitteisesti σ-additiiviseksi todennäköisyysmitaksi σ-algebralle $\sigma(C)$.

Eli jää osoitettavaksi väite:
jos $\{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$ on sylinterien jono jolla

$$C_n \supseteq C_{n+1} \forall n, \text{ ja } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \emptyset,$$

seuraa $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_0(C_n) = 0$.

Vastaoletuksen kautta, oletamme että on olemassa cylinterien jono $\{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$ jolla $C_n \supseteq C_{n+1}$ ja $\mathbb{P}_0(C_n) \geq \varepsilon \; \forall n$ jollekin $\varepsilon > 0$, näytämme että $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Valitsemalla sopivasti sylinterien esityksiä ja mahdollisesti toistaamalla sylintereita jonossa, voidaan aina rakentaa indeksijonoa $(t_n) \subseteq \mathbb{T}$ ja sylinterijono $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ jolla on esitys

$$D_n = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}) \in A_n \right\}$$

jossa $D_n \supseteq D_{n+1} \forall n$, $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $A_n \times \mathbb{R} \supseteq A_{n+1} \forall n$, ja kaikille $m \in \mathbb{N}$ on olemassa n jolla $D_n = C_m$.

Seuraa että $\mathbb{P}_0(D_n) \geq \varepsilon > 0 \; \forall n$ ja

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n \; .$$

Koska $P_{t_1,\ldots,t_n}$ on todennäköisyysmitta $\mathbb{R}^n$:ssa ja siksi σ-additiivinen, ja A_n on Borel mitallinen, on olemassa suljettu joukko $F_n \subseteq A_n$ jolla

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(A_n \setminus F_n) < \varepsilon 2^{-n} \; .$$

Valitsemalla tarpeeksi suurta origo-keskeistä palloa $B(0, r_n)$, löytyy myös kompakti $K_n = \big(F_n \cap B(0, r_n)\big) \subseteq A_n$ jolla edelleen

$$P_{t_1,\dots,t_n}(A_n \setminus K_n) = \mathbb{P}_0(D_n \setminus G_n) < \varepsilon 2^{-n}$$

jossa

$$G_n := \Big\{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in K_n\Big\}$$

Koska nämä eivät välttämättä muodosta vähenevää jonoa, otamme leikkaukset

$$G'_n = \bigcap_{m=1}^{n} G_m = \Big\{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in K'_n\Big\}$$

jossa

$$K'_n := K_n \cap (K_{n-1} \times \mathbb{R}) \cap \dots \cap (K_1 \times \mathbb{R}^{n-1}) \subseteq K_n$$

ovat kompakteja (kompakti ja sulijetun joukon leikkaus on kompakti).

Seuraa $G'_n \supseteq G'_{n+1}$, ja $(K'_n \times \mathbb{R}) \supseteq K'_{n+1}$.

Tästä seuraa

$$\begin{aligned}
&P_{t_1,\dots,t_n}(K'_n) = \mathbb{P}_0(G'_n) = \mathbb{P}_0(D_n) - \mathbb{P}_0(D_n \setminus G'_n) = \\
&P_{t_1,\dots,t_n}(A_n) - P_{t_1,\dots,t_n}\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_n \setminus (K_m \times \mathbb{R}^{(n-m)})\right) \\
&\geq P_{t_1,\dots,t_n}(A_n) - P_{t_1,\dots,t_n}\left(\bigcup_{m=1}^{n} (A_m \setminus K_m) \times \mathbb{R}^{(n-m)}\right) \\
&(\text{ koska } A_m \times \mathbb{R}^{(n-m)} \supseteq A_n \text{ kun } n \geq m \text{ }) \\
&= \mathbb{P}_0(D_n) - \mathbb{P}_0\left(\bigcup_{m=1}^{n} D_m \setminus G_m\right) \\
&\geq \mathbb{P}_0(D_n) - \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_0(D_m \setminus G_m) \geq \varepsilon - \sum_{m=1}^{n} \varepsilon 2^{-m} > \frac{\varepsilon}{2} > 0
\end{aligned}$$

jossa käytettiin vastaoletusta $\mathbb{P}_0(D_n) > \varepsilon$.

Siksi $\forall n$, $\exists (x_1^{(n)} \dots, x_n^{(n)}) \in K'_n \neq \emptyset$.

Koska jono G'_n ei kasva, seuraa että $(x_1^{(n)}) \subseteq K'_1 \subseteq \mathbb{R}$.

Koska K'_1 on kompakti, Heine-Borelin lauseesta seuraa että on olemassa suppeneva alijono $x_1^{(n_l)} \to x_1^* \in K'_1$.

Myös alijono $(x_1^{(n_l)}, x_2^{(n_l)}) \subseteq K'_2$, ja on olemassa suppeneva alijonon alijono jolla on raja $(x_1^*, x_2^*) \in K'_2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Induktiivisesti löytyy jono (x_n^*) jolla $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in K'_n \subseteq \mathbb{R}^n \ \forall n$.

Joukot

$$D^* = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : \omega_{t_n} = x_n^* \quad \forall n \right\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G'_n \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

eivät ole tyhjiä □

Huomautus 2.0.1. *Näytämme pian että Kolmogoroviin lause on voimassa ei pelkästään kun $\Omega_t = \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{T}$ mutta myös hyvin yleisemmilla Borelin todennäköisyysavaruuksilla.*

Luku 3

Satunnaismuuttujat

Olkoon $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ kuvaus todennäköisyysavaruuksien välillä. X on mitallinen kuvaus, todennäköisyyskielella *satunnaismuuttuja* , kun $\forall B \in \mathcal{E}$, mitallisen joukon alkukuva on mitallinen , eli

$$X^{-1}(B) := \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Tyypillisesti $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ jossa $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ on avoimien joukkojen virittämä σ-algebra. Kun X on satunnaismuuttuja, merkitään $X \in L^0(\Omega, \mathcal{F})$ tai lyhyesti $X \in \mathcal{F}$ silloin kun kontekstista on selvää että X on funktio ω:sta eikä Ω:n alijuokko.

Huomautus 3.0.1. *Huomataan samankaltaisuus jatkuvan funktion määritelmän kanssa: olkoon $(S_i, \mathcal{S}_i)$, $i = 1, 2$ topologiset avaruudet, jossa $\mathcal{S}_i$ ovat avointen joukkojen kokoelmat. Sanotaan että $f : (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ on jatkuva jos ja vain jos kaikille avoimille $U \in \mathcal{S}_2$ pätee*

$$f^{-1}(U) = \{x \in S_1 : f(x) \in U\} \in \mathcal{S}_1,$$

eli se on avoin S_1:n topologiassa.

Lemma 3.0.1. *Jos $X : \Omega \mapsto E$ on kuvaus, (ei välttämättä mitallinen)*

$$X^{-1}\Big(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\Big) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X^{-1}(A_i), \qquad X^{-1}(A^c) = \Big(X^{-1}(A)\Big)^c$$

jossa $A, A_i \subseteq E$ ja $\mathcal{I}$ on mielivaltainen indeksi joukko (ei välttämättä numeroituva).

Lemma 3.0.2. *Olkoon $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ ja $Y : (E, \mathcal{E}) \to (G, \mathcal{G})$ mitalliset kuvaukset todennäköisyysavaruuksien välissä. Silloin kuvaus $(Y \circ X)(\omega) := Y(X(\omega))$ on mitallinen $(\Omega, \mathcal{F})$ ja $(G, \mathcal{G})$ välissä.*

Tod. Kun $B \in \mathcal{G}$,

$$(Y \circ X)^{-1}(G) = \{\omega : Y(X(\omega)) \in G\} = \{\omega : X(\omega)) \in Y^{-1}(G)\} \in \mathcal{F}$$

koska $Y^{-1}(G) \in \mathcal{E}$ ja X on $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-mitallinen.

Lemma 3.0.3. *Olkoon $f : E \to H$, jatkuva funktio topologisten avaruuksien välissä, ja olkoon $\mathcal{B}(E)$ ja $\mathcal{B}(H)$ vastaavat avointen joukkojen virittämiä Borelin σ-algebrat. Silloin*

- *kuvaus $f : (E, \mathcal{B}(E)) \to (H, \mathcal{B}(H))$ on mitallinen.*
- *$f^{-1}(\mathcal{B}(E)) = \sigma\{f^{-1}(U) : U \subseteq H \text{ avoin }\}$, on pienin E:n σ-algebra jonka suhteen f on Borel-mitallinen.*

Tod. Kun $U \subseteq H$ avoin, seuraa että $f^{-1}(U) \subseteq E$ on avoin E:ssä. Tästä seuraa

$$\sigma\{f^{-1}(U) : U \subseteq H \text{ avoin }\} \subseteq \mathcal{B}(E)$$

Joukko perheet

$$\{U \subseteq H \text{ avoin }\} \text{ ja } \{f^{-1}(U) : U \subseteq H \text{ avoin }\}$$

ovat π-luokkia koska avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin.

Kun $\mathcal{D}$ on d-luokka H:ssa,

$$f^{-1}(\mathcal{D}) = \left\{ f^{-1}(D) : D \in \mathcal{D} \right\}$$

on d-luokka E:ssa:

$E = f^{-1}(H) \in f^{-1}(\mathcal{D})$ koska $H \in \mathcal{D}$.

Jos $A_1 = f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ jossa $B_i \in \mathcal{D}$, seuraa $B_1 \subseteq B_2$ ja $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{D}$ josta seuraa $f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2 \setminus B_1)$ in $f^{-1}(\mathcal{D})$.

Jos $A_n = f^{-1}(B_n) \in f^{-1}(\mathcal{D})$ ja $A_n \uparrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$,

seuraa $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \in f^{-1}(\mathcal{D})$.
Koska $\mathcal{B}(H)$ on pienin d-luokka joka sisältää π:luokan
$\{\, U \subseteq H$ avoin $\}$,
$f^{-1}(\mathcal{B}(H))$ on pienin d-luokka joka sisältää π-luokan
$\{f^{-1}(U) :\ U \subseteq H$ avoin $\}$, ja lemmasta 1.1.3 seuraa
$f^{-1}(\mathcal{B}(H)) = \sigma\{f^{-1}(U) :\ U \subseteq H$ avoin $\}$ □

Seuraus 3.0.1. *Olkoon $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $i = 1, \dots, d$ $\mathbb{R}$-arvoisia satunnaismuuttuja. Silloin vektori-arvoinen kuvaus $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ jolla $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_d(\omega))$ on $\mathbb{R}^d$-arvoinen satunnaismuuttuja.*

Tod. Kun $B_i \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, d$,

$$\{\omega : X(\omega) \in B_1 \times \cdots \times B_d\} = \left(\bigcap_{i=1}^{d} \{\omega : X_i(\omega) \in B_i\}\right) \in \mathcal{F}$$

ja väite seuraa koska $\sigma\big(B_1 \times \cdots \times B_d : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
Tarkemmin, olkoon

$$X^{-1}(B) = \big\{\, \omega : X_1(\omega), \dots, X_d(\omega) \in B\big\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$
$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \supseteq \mathcal{I} = \big\{\, B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_d :\ B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\big\}$$

jossa $\mathcal{D}$ on σ-algebra ja $\mathcal{I}$ on π-luokka. Mutta $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, josta seuraa että $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. □

Seuraus 3.0.2. *Olkoon $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ satunnaisvektori ja $f : X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus.*
Seuraa että kuvaus $\omega \mapsto (f \circ X)(\omega) = f(X(\omega))$ on satunnaismuuttja.
Erityisesti jos (X, Y) ovat s.m.$\longrightarrow (X + Y), (XY)$ ovat s.m.
Jos $Y(\omega) \neq 0 \quad \forall\omega$, seuraa että (X/Y) on satunnaismuuttuja.

Lemma 3.0.4. *Jos $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ on s.m. jono todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$,*

$$X^*(\omega) := \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega)$$

on satunnaismuuttuja.

Tod. $\mathcal{D} = \{B \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) : (X^*)^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ on σ-algebra. Koska jokaiselle $t \in \mathbb{R}$

$$(X^*)^{-1}((-\infty, t]) := \{\omega : X^*(\omega) \le t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega : X_n(\omega) \le t\} \in \mathcal{F},$$

seuraa että $(-\infty, t] \in \mathcal{D}$. Koska nämät muodostuvat π-luokan, seuraa että $\mathcal{D}$ on niiden virittämä σ-algebra, joka on $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Seuraus 3.0.3. *Myös $\liminf_n X_n(\omega)$ ja $\limsup_n X_n(\omega)$ ovat satunnaismuuttujia (harjoitustehtävä).*

Seuraava lause on Dynkinin lemman (1.1.3) vastine satunnaismuuttujille:

Teoreema 3.0.1. *(Monotonisen luokan lause) Olkoon $\mathcal{C}$ kokoelma* **rajoitetuista** *funktioista $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Sanotaan että $\mathcal{C}$ on* **monotoninen luokka** *kun*

1. *$\mathcal{C}$ on vektoriavaruus.*
2. *vakio funktio $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$.*
3. *$\mathcal{C}$ on suljettu monotonisen rajankäynnin suhteen:*

   kaikille jonoille $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$ joilla

$$\begin{aligned} &0 \le X_n(\omega) \le X_{n+1}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}, \text{ ja} \\ &X(\omega) := \lim_{n\uparrow\infty} X_n(\omega) \text{ on } \textbf{rajoitettu} \text{ funktio,} \end{aligned}$$

   seuraa $X \in \mathcal{C}$.

Kun $\mathcal{C} \supseteq \{ \mathbf{1}_A(\omega) : A \in \mathcal{I}\}$ jossa $\mathcal{I} \subseteq 2^\Omega$ on π-luokka (suljettu joukkojen leikkauksen suhteen), seuraa

$$\mathcal{C} \supseteq \left\{ \textbf{rajoitetut} \text{ ja } \big(\Omega, \sigma(\mathcal{I})\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \text{ mitalliset funktiot} \right\}$$

Tod. Olkoon $\mathcal{D} = \{A \subseteq \Omega : \mathbf{1}_A \in \mathcal{C}\}$.

Seuraa monotonisen luokan määritelmästä että $\mathcal{D}$ on d-luokka joka sisältää π-luokan $\mathcal{I}$, ja Dynkinin lemmasta $(1.1.3)$ seuraa myös $\mathcal{D} \supseteq \sigma(\mathcal{I})$.

Olkoon $X(\omega)$ $\sigma(\mathcal{I})$-mitallinen satunnaismuuttuja jolla

$$0 \le X(\omega) \le K < \infty \quad \forall \omega \in \Omega \; .$$

Määritellään kuvausten jono

$$X^{(n)}(\omega) := \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{K\ell}{n} \, \mathbf{1}\Big\{ X(\omega) \in \Big(\frac{K\ell}{n}, \frac{K(\ell+1)}{n} \Big] \Big\} , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Koska $\mathcal{C}$ on vektoriavaruus, seuraa $\{X^{(n)}\} \subseteq \mathcal{C}$, ja koska

$$0 \le X^{(n)}(\omega) \uparrow X(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega$$

jossa oletetusti $X(\omega)$ on rajoitettu, seuraa että $X(\omega) \in \mathcal{C}$ $\square$

Seuraava lause on esimerkki monotonisen luokan lauseen käytöstä.

Teoreema 3.0.2. *Olkoon kuvaus* $Y : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (S, \mathcal{S})$ *S-arvoinen satunnaismuuttuja, esimerkiksi* $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Olkoon

$$\sigma(Y) := \big\{ \, Y^{-1}(A) : A \in \mathcal{S} \big\}.$$

- $\sigma(Y)$ *on pienin Ω:n σ-algebra jonka suhteen* $Y(\omega)$ *on mitallinen.*
- $\sigma(Y)$ *kutsutaan satunnaimsuuttujan Y virittämän σ-algebraksi.*
- *Toinen satunnaismuuttuja* $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *on $\sigma(Y)$-mitallinen jos ja vain jos on olemassa mitallinen kuvaus* $f : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *jolla* $X(\omega) = f(Y(\omega))$.

Proof $\Longleftarrow$ implikaatio on jo osoitettu (lemma 3.0.2).
Olkoon

$$\mathcal{C} \;=\big\{ \; f(Y(\omega)) : \; f \text{ on Borel-mitallinen ja } |f(Y(\omega))| \text{ on rajoitettu } \big\}$$

Selvästi $\mathcal{C}$ on vektori avaruus joka sisältää vakiot. Olkoon $\big\{ \; f_n \big\}_{n \in \mathbb{N}}$ Borel-mitallisten funktioiden jono jolla

$$0 \le f_n(Y(\omega)) \le f_{n+1}(Y(\omega)) \le K < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega_i \; ,$$

ja $f(y) := \limsup_n f_n(y)\ \forall y \in S$. Seuraa etta $f : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on mitallinen, ja

$$0 \leq f_n(Y(\omega)) \uparrow f(Y(\omega)) \leq K < \infty \quad \text{kun } n \uparrow \infty \ .$$

Siis $\mathcal{C}$ on monotoninen luokka. Koska $\mathbf{1}_A(Y(\omega)) \in \mathcal{C}\ \forall A \in \mathcal{S}$, ja

$$\sigma(Y) = \left\{ Y^{-1}(A) : A \in \mathcal{S} \right\}$$

seuraa että $\mathcal{C}$ sisältää kaikki $\sigma(Y)$-mitallisia ja rajoitettuja $\mathbb{R}$-arvoisia satunnaismuuttujia.

Yleisemmin, jos $X(\omega)$ on $\sigma(Y)$-mitallinen $\mathbb{R}$-arvoinen satunnaismuuttuja joka ei ole rajoitettu, koska arctan(x) on jatkuva bijektio $\mathbb{R}$ ja avoimen välin $(-\pi/2, \pi/2)$ välissä, satunnaismuuttuja arctan$(X(\omega))$ on rajoitettu ja $\sigma(Y)$-mitallinen.

Tästä seuraa että arctan$(X(\omega)) = f(Y(\omega))$ jollekin Borel-mitalliselle funktiolle $f(y)$, ja silloin $X(\omega) = \tan(f(Y(\omega))$ jossa $\tan(f(y))$ on myös Borel mitallinen funktio $\square$

Luku 4

Odotusarvo ja Integraali

Määritelmä 4.0.1. *Satunnaismuuttuja* $X(\omega) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (R, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *on yksinkertainen jos*

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{R}, A_k \in \mathcal{F}$$

Merkitään $X \in \mathcal{YF}$. *Jos* $X(\omega) \geq 0 \; \forall\omega$, *merkitään* $X \in \mathcal{YF}^+$. *Tällöin määritellään satunnaismuuttujan odotusarvo todennäköisyysmitan* P*:n suhteen*

$$E_P(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k)$$

De Finettin mukaan, odotusarvo $E_P(X)$ tulkitaan vedonlyönnin sopimuksen X:n johdonmukaiseski hinnaksi, hinta-systeemissa jossa indikaattorit $\mathbf{1}_{A_k}$ saavat hintoja $P(A_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

Harjoitustehtäväkasi tarkistetaan että yksinkertäisen satunnaismuuttujan odotusarvo ei riipu sattunnaismuuttujan esityksestä ja

$$E_P(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P(\{\omega : X(\omega) = x\})$$

Lemma 4.0.1. *Olkoon* $X, Y \in \mathcal{YF}, \; \lambda \in \mathbb{R}$ *(deterministinen).*

- *Kun* $X(\omega) \geq 0, \forall\omega$, *seuraa että* $E_P(X) \geq 0$ *(positiivisuus).*
- $E_P(X + Y) = E_P(X) + E_P(Y)$ *ja* $E_P(\lambda X) = \lambda E_P(X)$.

Odotusarvon määritelmä yleistetään seuraavalla tavalla:

Määritelmä 4.0.2. *Olkoon* $X(\omega) \geq 0 \; \forall \omega$. *Silloin*

$$E_P(X) := \sup\{E_P(Y) : Y \in \mathcal{YF}^+,\; 0 \leq Y(\omega) \leq X(\omega) \quad \forall \omega\}$$

Yleisemmin käytämme hajotelmaa $X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega)$, *jossa satunnaismuuttujat* $X^+(\omega) := \max\{X(\omega), 0\}$, $X^-(\omega) := \max\{-X(\omega), 0\}$ *ovat ei-negatiivisia, ja määritellään*

$$\int_\Omega X(\omega) P(d\omega) := E_P(X) := E_P(X^+) - E_P(X^-) \; .$$

Kun $E_P(|X|) = E_P(X^+) + E_P(X^-) < +\infty$, *sanomme että* X *on integroituva satunnaismuuttuja ja merkitsemme* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Kun $E_P(X^+) = \infty$ *ja* $E_P(X^-) < +\infty$, *määritellään* $E_P(X) = +\infty$, *vastaavasti jos* $E_P(X^+) < \infty$ *ja* $E_P(X^-) = \infty$, $E_P(X) := -\infty$.

Kun $E_P(X^+) = E_P(X^-) = \infty$ *odotusarvo* $E_P(X)$ *ei ole määriteltävissä.*

Lemma 4.0.2. *Olkoon* $X(\omega) \geq 0$, $\forall \omega$.

Kun $E_P(X) = 0$, *seuraa* $P(\{\omega : X(\omega) > 0\}) = 0$.

Tod. Olkoon $Y_n(\omega) = n^{-1}\mathbf{1}(X(\omega) > n^{-1})$. Silloin

$$Y_n \in \mathcal{YF}^+ \text{ ja } Y_n(\omega) \leq X(\omega),\; \forall \omega.$$

Odotusarvon määritelmästä seuraa

$$0 = E_P(X) \geq E_P(Y_n) = n^{-1} P(X(\omega) > n^{-1}) \geq 0, \quad \text{ja}$$
$$P(X(\omega) > 0) = P\left(\bigcup_n \{\omega : X(\omega) > n^{-1}\}\right) \leq \sum_n P(X(\omega) > n^{-1}) = 0 \quad \square$$

Lemma 4.0.3. *Kun* $X(\omega)$ *ja* $B \in \mathcal{F}$ *jolla* $P(B) = 1$, *seuraa*

$$E_P(X\mathbf{1}_B) = E_P(X).$$

Tod. Väite on tosi kun $X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$,

$$E_P(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) = E_P\big(\mathbf{1}_{A\cap B}\big) = P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c) = P(A),$$

koska $P(A \cap B^c) \leq P(B^c) = 1 - P(B) = 0$, ja lineaarisuudesta seuraa myös kaikille $X \in \mathcal{Y}F$.

Olkoon $X(\omega) \geq 0$, ja $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{Y}F^+$ jolla $0 \leq X_n(\omega) \leq X(\omega)$ ja $E_P(X_n) \uparrow E_P(X)$. Silloin koska $\mathbf{1}_B(\omega)X_n(\omega) \leq \mathbf{1}_B(\omega)X(\omega)$ ja odotusarvo on positiivinen,

$$E_P(\mathbf{1}_B X) \geq E_P(\mathbf{1}_B X_n) = E_P(X_n) \uparrow E_P(X) \geq E_P(\mathbf{1}_B X) \ \square$$

Seuraus 4.0.1. *Jos $P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$, eli $X(\omega) = Y(\omega)$ P-melkein varmasti, seuraa $E_P(X) = E_P(Y)$.*

Riemann-Stieltjesin ja Lebesgue-Stieltjesin integraalit Olkoon $a < b \in \mathbb{R}$, $\Omega = (a, b]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}((a, b])$,

$P = P_G$ jossa $G : (a, b] \to [0, 1]$ on ei-vähenevä oikealta jatkuva funktio jolla $G(a) = 0$, $G(b) = 1$.

Caratheodoryn lauseen mukaan on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $P_G : \mathcal{B}((a, b]) \to [0, 1]$ jolle $P_G((a, x]) = G(x) - G(a)$.

Olkoon $H : (a, b] \to \mathbb{R}^+$ ei-negatiivinen mitallinen funktio. Osoitamme että

$$E_{P_G}(H) = \int_a^b H(x)G(dx) \text{ (Lebesgue-Stieltjesin integraali)}$$

jossa oikean puolen integraali on Riemann-Stieltjesin integraalin yleistys.

Määritelmä 4.0.3. *Olkoon Π välin $(a, b]$ ositus äärellisellä välipistemäärällä:*

$$\Pi = (a = x_0 \leq \xi_0 \leq x_1 \leq \xi_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{N-1} \leq \xi_{N-1} \leq x_N = b), \quad n \in \mathbb{N}$$

Merkitään $\Delta(\Pi) = \max_{0<i\leq n}(x_i - x_{i-1})$. Määritellään Riemannin Stieltjesin integraali

$$\text{(Riemann-Stieltjes)-} \int_a^b H(x)G(dx) := \lim_{\Delta(\Pi)\to 0} \sum_{k=1}^{N(\Pi)} H(\xi_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i))$$

$$= \lim_{\Delta(\Pi)\to 0} \sum_{k=1}^{N(\Pi)} H(\xi_i)P_G((x_i, x_{i+1}]) = \lim_{\Delta(\Pi)\to 0} E_P(H^{(\Pi)}) \quad \textit{jossa}$$

$$H^{(\Pi)}(u) := \sum_{k=1}^{N(\Pi)} H(\xi_i)\mathbf{1}(x_i, x_{i+1}](u)$$

silloin kun raja-arvo on olemassa ja on yksikäsitteinen riippumatta ositusten jonon ja välipisteiden $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ välinnästä.

Lause 4.0.1. *Kun $H(x)$ (palottain) jatkuva, ja $G(x)$ on ei-vähenevä, Riemann-Stieltjesin integraali $\int\limits_a^b H(x)G(dx)$ on olemassa.*

Todistus Olkoon $H : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio, ja $H^{(\Pi)}$ sen yksinkertainen approksimaatio osituksen Π:n mukaan. Määritelmään mukaan

$$\int_a^b H(y)G(dy) = \lim_{\Delta(\Pi)\longrightarrow 0} \int_a^b H^{(\Pi)}(y)G(dy)$$

kun rajaarvo on olemassa eikä riippuu ositusten jonosta.

Olkoon $(\Pi_n : n \in \mathbb{N})$ $[a,b]$ välin ositusten jono joilla $\Delta(\Pi_n) \longrightarrow 0$. Osituksielle Π_n, Π_m pätee

$$\left| \int_a^b H^{(\Pi_n)}(y)G(dy) - \int_a^b H^{(\Pi_m)}(y)G(dy) \right| \le \int_a^b \left| H^{(\Pi_n)}(y) - H^{(\Pi_m)}(y) \right| G(dy)$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1} |H(\xi_i) - H(\eta_i)|(G(x_{i+1}) - G(x_i))$$

joillekin $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ ja $|\xi_i - \eta_i| \le \big(\Delta(\Pi_n) + \Delta(\Pi_m)\big)$. Koska H on jatkuva kompaktissa $[a,b]$ se on siinä tasaisesti jatkuva, eli $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa δ joilla kun $|\xi - \eta| \le \delta \Longrightarrow |H(\xi) - H(\eta)| < \varepsilon$.

Tästä seuraa että kun n, m ovat tarpeeksi suuria

$$\left| \int_a^b H^{(\Pi_n)}(y)G(dy) - \int_a^b H^{(\Pi_m)}(y)G(dy) \right| \le \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \big(G(x_{i+1}) - G(x_i)\big) = \varepsilon(G(b) - G(a))$$

Tästä seuraa että $\left(\int\limits_a^b H^{\Pi_n}(y)G(dy) : n \in \mathbb{N} \right)$ on Cauchy jono joka suppenee.

Seuraa myös että jos (Π'_n) on toinen ositusten jono jolla $\Delta(\Pi'_n) \to 0$, kun määritellään jono (Π''_n) jolla $\Pi''_{2n} = \Pi_n$ ja $\Pi''_{2n+1} = \Pi'_n$, seuraa että myös $\int\limits_a^b H^{(\Pi''_n)}(y)G(dy)$ suppenee kun $n \to \infty$, ja siksi raja-arvo ei riipu ositusten jonosta $\square$

Tehtävä 4.0.1. *Osoita että Riemann-Stieltjesin integraali on olemassa kun funktio $H(y)$ on ei-vähenevä. Vihje: Osoita ensin että epäjatkuvuus pisteiden joukko*

$$D := \left\{ y : H(y-) := \lim_{x\uparrow y} H(x) < H(y+) = \lim_{x\downarrow y} H(x) \right\}$$

on korkeintaan mumeroituva. Käytä sitten hajotelma

$$H(x) = \left(H^c(x) - \sum_{y\leq x} \Delta H(y) \right) \quad \text{jossa} \quad \Delta H(y) := H(y+) - H(y-)$$

jossa näytät että $H_c(x)$ on ei-vähenevä ja jatkuva. Tämä yleistyy suoraan tapaukseen jossa $H(y) = (H^{\oplus}(y) - H^{\ominus}(y))$, $G(y) = (G^{\oplus}(y) - G^{\ominus}(y))$, jossa $H^{\oplus}, H^{\ominus}, G^{\oplus}, G^{\ominus}$, ovat ei-väheneviä.

Tehtävä 4.0.2. *Osoite että jos $H(x)$ on (palottain) jatkuva ja $G(x)$ on derivoituva jatkuvalla derivaatalla $G'(x)$, Riemannin Stieltjes integraaleille pätee*

$$\int_a^b H(x)G(dx) = \int_a^b H(x)G'(x)dx$$

Kun $H(x)$ on pelkästään Borel- mitallinen mutta ei palottain-jatkuva, on olemassa ositusten jonot ja välipisteiden valinnat joilla approksimaatioden raja ei ole olemassa, siinä tapauksessa Riemann-Stieltjes integrointitapa ei toimi.

Vuonna 1902 ranskalainen Henri Lebesgue keksi omassa väitöskirjassa uuden integrointitavan jossa funktio $y = H(x)$ integraalin approksimoidaan osittamaalla y-akselin x-akselin sijaan. Olkoon ensin H Borel-mitallinen funktio jolla $H(x) \geq 0\, \forall x$. Määritellään kuvaus $\alpha^{(N)} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ jossa

$$\alpha^{(N)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{kun } 0 \leq y \leq N^{-1} \\ \left(\frac{k}{N}\right) & \text{kun } kN^{-1} < y \leq (k+1)N^{-1}, \quad k = 1, \dots (N^2 - 1) \\ N & \text{kun } y \geq N \end{cases} \tag{4.0.1}$$

$$\text{siis } \alpha^{(N)}(y) = \sum_{k=1}^{(N^2-1)} \left(\frac{k}{N}\right) \mathbf{1}_{\left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]}(y) \quad + \; N\, \mathbf{1}_{(N,+\infty]}(y)$$

Huomataan että kuvaus $\alpha^{(N)}$ on vasemmalta jatkuva kuten indikaattorikuvaukset $\mathbf{1}_{(a,b]}(y)$.

Approksimoidaan alhaalta satunnaismuuttuja $H(x) \geq 0$ yksinkertäisellä satunnaismuuttujalla $H^{(N)}(x) := \alpha^{(N)}(H(x))$. Koska

$$0 \leq H(x) - H^{(N)}(x) \leq 1/N \quad \text{kun } 0 \leq H(x) \leq N,$$

ja $H^{(N)}(x) \leq H^{(N+1)}(x)$, seuraa että $H^{(N)}(x) \uparrow H(x)$ kun $N \uparrow \infty$.

Koska $H^{(N)}(x)$ on yksinkertainen satunnaismuuttuja, sen P_G-odotusarvo on summa

$$E_P(H^{(N)}) = \sum_{y \in \mathbb{R}} y P_G(H^{(N)} = y) =$$
$$\sum_{k=0}^{(N^2-1)} \frac{k}{N} P_G\Bigg(\Big\{x : H(x) \in \big(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\big]\Big\}\Bigg) = \int_a^b H^{(N)}(x) G(dx)$$

jossa viimeinen integraali on yksinkertäisen funktion Lebesgue-Stieltjes integraali eikä Riemannin integraali. Yksinkertainen funktio $H^{(N)}(x)$ ei ole vältämättä palottain jatkuva.

Huomataan myös että kun funktio $H(x)$ on jatkuva välissä $(a, b]$, käänteiskuva

$$H^{-1}\Bigg(\big(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\big]\Bigg) := \Big\{x : H(x) \in \big(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\big]\Big\}$$

on äärellinen yhdiste väli-joukoista, mutta näin ei tarvitse olla kun $H(x)$ on pelkästään Borel-mitallinen. Silloin y-akselin osituksen vastaa x-akselin ositus ja sen takia siinä tapauksessa Lebesgue ja Riemann integraalit yhtyyvät.

Osoitamme että kun $H(x) \geq 0$ on mitallinen, raja-arvo $\lim\limits_{N \to \infty} E_{P_G}(H^{(N)})$ on olemassa kaikille yksinkertäisten satunnaismuuttujen jonoille joilla $H^{(N)}(x) \uparrow H(x)$, ja sen arvo on

$$E_{P_G}(H) = \int_0^\infty y \; P_G(x : H(x) \in dy) := \text{(Lebesgue-Stieltjes)-} \int_a^b H(x) G(dx) \; ,$$

approksimoivasta jonosta riippumatta.

4.1 Monotonisen konvergenssin lause.

Odotusarvon määritelmän mukaan, kun $X \in \mathcal{F}$ on olemassa jono $(X_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{Y}F^+$ jolla $0 \le X_n(\omega) \le X(\omega)$ ja $E(X_n) \to E(X)$.

Osoitamme että $E(X_n) \uparrow E(X)$ kaikille satunnauismuuttujen jonoille jolla $0 \le X_n \uparrow X$.

Lemma 4.1.1. *Olkoon jono $\{a_n^k : k, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ joka on ei-vähenevä molempien indeksien (k,n) suhteen,*

$$a_{n-1}^k \le a_k^n \le a_{k+1}^n \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$$

Silloin jonon raja-arvo on olemassa riippumatta rajankäynnin järjestyksestä

$$\exists a := \lim_n \bigl(\lim_k a_n^k\bigr) = \lim_k \bigl(\lim_n a_n^k\bigr), \; a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Myös jokaiselle indeksijonoille $\{n(l), k(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ jossa $n(l), k(l) \to \infty$

$$\lim_{l \to \infty} a_{n(l)}^{k(l)} = a$$

Tod. monotonisuudesta seuraa että $\forall k$ kun $n \uparrow \infty$

$$\begin{array}{ccc} a_n^k & \uparrow & a_\infty^k \\ | \wedge & & | \wedge \\ a_n^{k+1} & \uparrow & a_\infty^{k+1} \end{array}$$

Tästä seuraa että a_∞^k on monotoninen jono ja on olemassa $a' = \lim\limits_{k \to \infty} a_\infty^k$. Samoin, $\forall n$ kun $k \uparrow \infty$, $a_n^k \uparrow a_n^\infty$ ja $a_n^\infty \le a_{n+1}^\infty$, ja seuraa että on olemassa monotoninen raja $a'' = \lim\limits_{n \to \infty} a_n^\infty$.

Kun $a' = a'' = +\infty$ väite on tosi.

Jos olisi $a' < a'' = +\infty$, seuraisi ristiriita, koska silloin jokaiselle $N, \varepsilon > 0$ olisi olemassa n, k tarpeeksi suuria joilla

$$N \le a_n^\infty \le a_n^k + \varepsilon \le a_\infty^k + \varepsilon \le a' + \varepsilon$$

Kun molemmat $a', a'' < \infty$, seuraa että $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa $\bar{n}, \bar{k}$ jolla

$$a'' < a_{\bar{n}}^\infty + \varepsilon \; , \quad a_{\bar{n}}^\infty < a_{\bar{n}}^{\bar{k}} + \varepsilon$$

Tästä seuraa

$$a' \geq a_{\infty}^{\bar{k}} \geq a_{\bar{n}}^{\bar{k}} \geq a_{\bar{n}}^{\infty} - \varepsilon \geq a'' - 2\varepsilon$$

Koska ε on mielivaltainen seuraa että $a' \geq a''$. Samoin seuraa $a'' \geq a'$.

Kun $n(l), k(l) \uparrow (+\infty)$ ovat kasvavia indeksijonoja,

$$a' = \lim_{l\to\infty} a_{\infty}^{k(l)} \geq \lim_{l\to\infty} a_{n(l)}^{k(l)} \geq \lim_{l\to\infty} a_{n}^{k(l)} \quad \forall n,$$
$$a' \geq \lim_{l\to\infty} a_{n(l)}^{k(l)} \geq \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} a_n^k = a'' = a' \; \square$$

Huomautus 4.1.1. *Yleisesti, ilman samasuuntaisen monotonisuuden oletusta tämä ei päde. Esimerkiksi, kun $g : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ aina*

$$\sup_x \inf_y g(x,y) \; \leq \; \inf_y \sup_x g(x,y) \; ,$$

mutta päinvastainen epäyhtälö ei päde ilman lisäoletuksia.

Lemma 4.1.2. *Monotoninen konvergenssi lause yksinkertäisille satunnaismuuttujille*

Olkoon $X, X_n \in \mathcal{Y}F^+$ jossa $0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$.

Silloin $E_P(X_n) \uparrow E_P(X)$.

Olkoon ensin $X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$, $A \in \mathcal{F}$. Kun $0 < \varepsilon < 1$, olkoon

$$A_n^{\varepsilon} = \{\omega : X_n(\omega) \geq (1-\varepsilon)\} \subseteq A_{n+1}^{\varepsilon} \subseteq A$$

koska $X_n(\omega)$ on ei vähenevä ja $X_n(\omega) = 0$ kun $\omega \notin A$.

Seuraa $A_n^{\varepsilon} \uparrow A$, eli kun $\omega \in A$, myös $\omega \in A_n$ kun n on tarpeeksi suuri, eli $\forall \omega \; \exists \bar{n}(\omega)$ jolla $\forall n > \bar{n}(\omega)$

$$X_n(\omega) > (\mathbf{1}_A(\omega) - \varepsilon) =$$

, eli $\quad (1-\varepsilon) \quad$, kun $\omega \in A$.

σ-additiivisuudesta seuraa $P(A_n^{\varepsilon}) \uparrow P(A)$ ja koska $X_n(\omega) \geq (1-\varepsilon)\mathbf{1}_{A_n^{\varepsilon}}(\omega)$ seuraa

$$P(A) \geq E_P(X_n) \geq (1-\varepsilon)P(A_n^{\varepsilon}) \uparrow (1-\varepsilon)P(A)$$

Koska ε oli mielivaltainen $E_P(X_n) \uparrow P(A) = E_P(X)$. Odotusarvon lineaarisuuden nojalla väite seuraa myös kun $X \in \mathcal{Y}F$.

Lemma 4.1.3. *Olkoon $X(\omega) \in \mathcal{F}^+$. Jos $\{X_n\}, \{Y_n\} \subseteq \mathcal{Y}F^+$, $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ ja $Y_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ $\forall\omega$, seuraa*

$$\lim_n E_P(X_n) = \lim_n E_P(Y_n)$$

Tod. Jono $Z^n_m(\omega) = \min\{X_n(\omega), Y_m(\omega)\}$ on ei-vähenevä molempien indeksien n, m suhteen.

Koska $Y_n(\omega) \uparrow X(\omega) \geq X_n(\omega) \uparrow X(\omega) \geq Y_n(\omega)$ seuraa että

$$Z^n_m(\omega) \uparrow X_n(\omega) \text{ kun } m \uparrow \infty, \text{ ja } Z^n_m(\omega) \uparrow Y_m(\omega) \text{ kun } n \uparrow \infty$$

Kun otamme odotusarvoa, koska Z^n_m, X_n ja Y_m ovat yksinkertäisiä seuraa lemmasta (4.1.2)

$$E_P(Z^n_m) \uparrow E_P(X_n) \text{ kun } m \uparrow \infty, \text{ ja } E_P(Z^n_m) \uparrow E_P(Y_m) \text{ kun } n \uparrow \infty,$$

lemmasta (4.1.1) seuraa

$$\lim_{n\to\infty} E_P(X_n) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} E_P(Z^n_m) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} E_P(Z^n_m) = \lim_{n\to\infty} E_P(Y_n) \ \square$$

Seuraus 4.1.1. *Kun $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ jossa $\{X_n\} \subseteq \mathcal{Y}F^+$ ja $X \in \mathcal{F}^+$, seuraa $E_P(X_n) \uparrow E_P(X)$.*

Tod. $E_P(Y)$:n määritelmästä seuraa että on olemassa $\{Y_n\} \subseteq \mathcal{Y}F^+$ jolla $0 \leq Y_n(\omega) \leq X(\omega)$ ja $\lim_{n\to\infty} E_P(Y_n) = E_P(Y)$. Tässä väiheessä $Y_n(\omega)$ ei välttämättä kasvaa monotonisesti kaikille ω:lle.

Olkoon $X^{(n)}(\omega) := \alpha^{(n)}(X(\omega)) \uparrow X(\omega)$ (kts. 4.0.1), ja määritellään ei-vähenevä satunnaismuuttujen jono

$$Z_n(\omega) = \max\big\{X^{(n)}(\omega), Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega)\big\} \in \mathcal{Y}F^+.$$

Koska $Z_n(\omega) \geq X^{(n)}(\omega) \uparrow X(\omega)$ seuraa että myös $Z_n(\omega) \uparrow X(\omega)$.

Koska $Y_n(\omega) \leq Z_n(\omega) \leq X(\omega)$ ja odotusarvo $E_P : \mathcal{Y}F^+ \to [0, +\infty]$ on positiivinen ja lineaarinen operaattori

$$0 \leq E_P(Y_n) \leq E_P(Z_n(\omega)) \leq E_P(X(\omega)) \ ,$$

ja koska $\lim_n E_P(Y_n) = E_P(X(\omega))$ seuraa että $E_P(Z_n(\omega)) \uparrow E_P(X(\omega))$.

Lemmasta (4.1.3) seuraa nyt että

$$\lim_{n\to\infty} E_P(X_n) = \lim_{n\to\infty} E_P(Z_n) = E_P(X) \ \square$$

Teoreema 4.1.1. *Monotoninen konvergenssilause.*

Olkoon $X, X_n \in \mathcal{F}^+$ *jossa* $0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ *P-melkein varmasti, Silloin* $E_P(X_n) \uparrow E_P(X)$.

Oletetaan ensin että jokaiselle ω: $0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$. Jokaiselle n:lle määritellään yksinkertäisten satunnaismuuttujen jonot $X_n^{(k)}(\omega) = \alpha^{(k)}(X_n(\omega)) \in \mathcal{Y}F^+$ jolla $0 \leq X_n^{(k)}(\omega) \uparrow X_n(\omega)$ kun $k \uparrow \infty$. Seuraa lemmasta (4.1.2) että $E_P(X_n^{(k)}) \uparrow E_P(X_n)$ kun $k \uparrow \infty$.

Huomataan myös että kun $n \to \infty$, koska funktio $\alpha^{(k)}(x)$ on vasemmalta jatkuva ja $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ seuraa että

$$X_n^{(k)}(\omega) \uparrow X^{(k)}(\omega) := \alpha^{(k)}(X(\omega)) \in \mathcal{Y}F^+ \ .$$

Koska funktiot $\alpha^{(k)}(x)$ ovat ei-väheneviä, seuraa myös että $X_n^{(k)}(\omega) \leq X_n^{(k+1)}(\omega)$. Koska odotusarvo $E_P : \mathcal{Y}F^+ \to \mathbb{R}^+ \cup [0, +\infty]$ on positiivinen operattori, jono $\{E_P(X_n^{(k)}) : n, k \in \mathbb{N}\}$ on ei-vähenevä molempien indeksien suhteen ja lemmasta (4.1.1) seuraa

$$\lim_{n\to\infty} E_P(X_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} E_P(X_n^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} E_P(X_n^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} E_P(X^{(k)}) = E_P(X)$$

jossa vasemmanpuolen yhtälö seuraa väitteestä (4.1.1).
Kun $0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ P-melkein varmasti, on olemassa joukko $B \in \mathcal{F}$ jolla $P(B) = 1$ ja $0 \leq X_n(\omega)\mathbf{1}_B(\omega) \uparrow X(\omega)\mathbf{1}_B(\omega)$ $\forall\omega$. Seuraa lauseista (4.0.3), (4.1.1) että

$$E_P(X_n) = E_P(X_n\mathbf{1}_B) \uparrow E_P(X\mathbf{1}_B) = E_P(X) \qquad \square$$

Seuraus 4.1.2. *Odotusarvo* $E_P : L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ *on positiivinen ja lineaarinen operattori.*

Tod. Harjoitustehtävä, approksimoivien yksinkertäisten satunnaismuuttujen avulla.

Lemma 4.1.4. *(Fatou lemma) Kun* $X_n(\omega) \geq 0$ *P-melkein varmasti* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq E_P\big(\liminf_n X_n\big) \leq \liminf_n E_P\big(X_n\big)$$

Tämä seuraa myös kun $X_n(\omega) \geq Z(\omega)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *P-melkein varmasti, jossa* $E_P(Z^-) < +\infty$.

Tod. Olkoon $Y_n(\omega) := \inf_{k\geq n} X_k(\omega)$, joka on ei-vähenevä $\forall\omega$, jolla $X_n(\omega) \geq Y_n(\omega) \uparrow \liminf_n X_n(\omega)$. Koska oletuksesta $Y_n(\omega) \geq 0$ P-m.v. monotonisesta konvergenssista seuraa

$$\liminf_n E_P(X_n) \geq \liminf_n E_P(Y_n) = \lim_n E_P(Y_n) = E_P(\liminf_n X_n)$$

Kun $X_n(\omega) \geq Z(\omega) \geq -(Z^-(\omega))$, jolla $E_P(Z^-) < +\infty$.

Koska $(X_n(\omega) + Z^-(\omega)) \geq 0$, ja odotusarvon lineaarisuudesta,

$$\begin{aligned} &0 \leq \liminf_n E(X_n) + E_P(Z^-) = \liminf_n E_P(X_n + Z^-) \leq E_P(\liminf_n (X_n + Z^-)) \\ &= E_P(\liminf_n X_n) + E_P(Z^-) \end{aligned}$$

ja väite seuraa kun $E_P(Z^-) < \infty$.

Lemma 4.1.5. *(käänteis-Fatou lemma) Jos $X_n(\omega) \leq Z(\omega) \leq Z^+(\omega)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ P-melkein varmasti jossa $E_P(Z^+) < \infty$, seuraa että*

$$\limsup_n E_P(X_n) \leq E_P(\limsup_n X_n) \leq E(Z)$$

Tod. Sovelletaan Fatou lemmaa jonolle $X'_n(\omega) := -X_n(\omega) \geq -Z^+(\omega)$, ja väite seuraa koska $(\limsup_n a_n) = -(\liminf_n(-a_n))$ $\square$

Lause 4.1.1. *Lebesgue'n dominoidun konvergenssin lause. Kun*

- $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$
- $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n(\omega)| \leq Z(\omega)$ *jossa* $E_P(Z) < \infty$,

P-melkein varmasti (eli $\forall\omega \in N^c$ jossa $P(N) = 0$), siitä seuraa $\lim_{n\to\infty} E_P(X_n) = E_P(X)$

Todistus. Koska $|X_n| \leq Z$ ja $E_P(Z) < \infty$, Fatoun ja käänteis-Fatoun lemmat astuvat voimaan

$$E_P(X) = E_P(\liminf_n X_n) \leq \liminf_n E_P(X_n) \leq \limsup_n E_P(X_n) \leq E_P(\limsup_n X_n) = E_P(X) \; \square$$

Lebesgue'n dominoidun konvergenssin lause pätee myös kun integroidaan σ-äärellisen mitan suhteen, esimerkiksi $\mathbb{R}^d$ avarudessa Lebesguen mitalla varustettuna.

Lause 4.1.2. *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{F})$ *mitallinen avaruus varustettu* σ*-äärellisellä mitalla* $\lambda(d\omega)$, $\big(f_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $f(\omega)$ *mitallisest funktiot jossa*

- $$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad \forall \omega \in N^c$$

  jossa $N \subset \Omega$ *ja* $\mu(N) = 0$.

- *On olemassa integroituva yläraja* $g(\omega) \geq 0$ *jolla*

  $$|f_n(\omega)| \leq g(\omega) \quad \forall \omega \in N^c,\ n \in \mathbb{N} \text{ ja } \int_\Omega g(\omega)\,\lambda(d\omega) < \infty$$

Silloin

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\lambda(d\omega) = \int_\Omega \left(\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)\right)\lambda(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\lambda(d\omega)$$

Tod. Voidaan olettaa $f_n(\omega) \geq 0\ \forall \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}$, muuten hajotetaan $f_n(\omega) = f_n(\omega)^+ - f(\omega)^-$ ja integroidaan erikseen.

Koska λ on σ-äärellinen, on olemassa numeroituva mitallinen ositus $(\Omega_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{F}$ jolla $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ kun $i \neq j$, $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$ ja $0 < \lambda(\Omega_i) < \infty$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Määritellään todennäköisyysmittojen jono

$$P_i(A) := \frac{\lambda(A \cap \Omega_i)}{\lambda(\Omega_i)}, \quad A \in \mathcal{F}$$

Huomataan että

$$\int_\Omega g(\omega)\lambda(d\omega) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i(\Omega_i) \int_\Omega g(\omega)P_i(d\omega) < \infty$$

josta seuraa $g(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P_i)$ $\forall i$. Lebesgue dominoidun konvergenssin lause 4.1.1 soveltuu jokaisen P_i mitan suhteen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(\omega)P_i(d\omega) = \int_0^\infty f(\omega)P_i(d\omega)$$

Väite seuraa koska

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(\omega)\lambda(d\omega)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^m\int_{\Omega_i} f_n(\omega)\lambda(d\omega)=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^m\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_i} f_n(\omega)\lambda(d\omega)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^m\int_{\Omega_i}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)\Big)\lambda(d\omega)=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^m\int_{\Omega_i} f(\omega)\lambda(d\omega)=\int_\Omega f_n(\omega)\lambda(d\omega)$$

jossa käytettiin lemma (4.1.1) jonolle $\left\{\sum_{i=1}^m\int_{\Omega_i} f_m(\omega)\lambda(d\omega):\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\square$

Esimerkki 4.1.1. *Olkoon $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1])$, ja P on tasainen jakauma jolla $P((a,b])=(b-a)$ kun $0\le a\le b\le 1$.*

Olkoon $X_n(\omega)=n\mathbf{1}(\omega\le 1/n)$.

Huomataan että kun $\omega\ne 0$, $X_n(\omega)\to 0$ kun $n\to\infty$, koska $X_n(\omega)=0$ kun $n>1/\omega$. Koska $P((0,1])=1$, $X_n(\omega)\to 0$ P-melkein varmasti.

Toisaalta $E_P(X_n)=nn^{-1}=1>0=E_P(\lim_n X_n)$.

Lebesguen dominoidun konvergenssi lauseen hypoteesi ei päde.

$$X^*(\omega)=\sup_n X_n(\omega)=n \text{ kun } \omega\in\big(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\big]\iff\omega^{-1}\in[n,n+1)$$
$$\text{eli } X^*(\omega)=\lfloor\omega^{-1}\rfloor \text{ ja } (\omega^{-1}-1)<X^*(\omega)<\omega^{-1}$$

Tästä seuraa

$$E_P(X^*)>\left(\int_0^1 x^{-1}dx\right)-1=\int_0^1 d\log(x)-1=\log(1)-\log(0)-1=+\infty$$

eli X^* ei ole integroituva ja dominoidun konvergenssin lause ei pysty soveltamaan.

4.2 Satunnaismuuttujan jakauma

Määritelmä 4.2.1. *Olkoon $X:(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{S})$ satunnaismuuttuja, esimerkiksi $(S,\mathcal{S})=(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, ja olkoon P todennäköisyys $(\Omega,\mathcal{F})$-avaruudessa.*

Todennäköisyysmitta

$$P_X(B):=\big(P\circ X^{-1}\big)(B)=P\big(\{\omega:X(\omega)\in B\}\big),\quad\forall B\in\mathcal{S}$$

kutsutaan satunnaismuuttujan X jakaumaksi tai pushforward-todennäkösyysmitaksi.

Esimerkki 4.2.1. *Osoita että P_X on todennäköisyys $(S, \mathcal{S})$ avaruudessa.*

Lemma 4.2.1. *Olkoon s.m. $X(\omega) \in \mathbb{R}^d$, ja $Y(\omega) = g(X(\omega)) \in \mathbb{R}$, jossa $g : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on mitallinen kuvaus. Silloin*

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) P_X(dx) = E_P(g(X)) = \int_\Omega g(X(\omega)) P(d\omega) = E_P(Y) = \int_{\mathbb{R}} y P_Y(dy)$$

jossa $P_Y(D) = P(Y^{-1}(D)) = P_X(g^{-1}(D))$ kun $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Tod. kun $g(x) = \mathbf{1}_B(x)$ jossa $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ väite seuraa suoraan P_X ja P_Y mittojen määritelmästä, ja siksi väite on totta myös kun kuvaus $g(x)$ saa äärellistä monta arvoa.

Voidaan olettaa että $g(x) \geq 0$, muuten hajotetaan ensin $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$. Silloin on olemassa yksinkertäisten kuvauseten jono $g^{(N)}(x) \uparrow g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$ (kts. 4.0.1), jolla myös $g^{(N)}(X(\omega)) \uparrow g(X(\omega))$. Monotonisen konvergenssilauseesta seuraa että

$$\int_\Omega g^{(N)}(X(\omega)) P(d\omega) \uparrow \int_\Omega g(X(\omega)) P(d\omega) \text{ ja } \int_{\mathbb{R}^d} g^{(N)}(x) P_X(dx) \uparrow \int_{\mathbb{R}^d} g(x) P_X(dx),$$

$$\text{jossa } \int_\Omega g^{(N)}(X(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} g^{(N)}(x) P_X(dx) \qquad \square$$

Esimerkki 4.2.2. *Jos satunnaismuuttujan X jakauman kertymäfunktio $F_X(x) = P(X \leq x)$ on derivoituva derivaatalla $f_X(x)$ (joka kutsutaan jakauman tiheysfunktioksi), ja $g(x) \geq 0$ on Borel mitallinen funktio,*

$$E_P\big(g(X)\big) = \int_\Omega g(X(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) F(dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx$$

Erityisesti olkoon $X(\omega) \geq 0$ λ-eksponentiaalinen satunnaismuuttuja, jossa $\lambda > 0$ on parametri, ja kertymäfunktio $P(X \leq x) = F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x^+)$ jossa $\lambda > 0$, $x^+ = x \vee 0$. Lasketaan

$$E_P(X) = \int_0^\infty x F_X(dx) = \int_0^\infty x \frac{d}{dx} F_X(x) dx = \int_0^\infty x \lambda \exp(-\lambda x) dx =$$

$$\lambda \Big[x \exp(-\lambda x) \Big]_0^{+\infty} + \int_0^\infty \exp(-\lambda x) dx = 0 - 0 - \frac{1}{\lambda} \Big[\exp(-\lambda x) \Big]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

4.3 Odotusarvon sovellus: mitan vaihto

Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon Z satunnaismuuttuja jolla $Z(\omega) \geq 0$ P-melkein varmasti ja $0 < E_P(Z) < \infty$ (tästä seuraa $P(\{\omega : Z(\omega) > 0\}) > 0$).

Määritellään uusi todennäköisyysmitta $Q : \mathcal{F} \to [0, 1]$

$$Q(A) := \frac{E_P(Z\mathbf{1}_A)}{E_P(Z)} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Q on todennäköisyysmitta: Selvästi on additiivinen ja $Q(\Omega) = 1$. Osoitamme että on myös σ-additiivinen: kun $A_n \uparrow \Omega$, myös $Z(\omega)\mathbf{1}_{A_n}(\omega) \uparrow Z(\omega)$ P-melkein varmasti. Monotonisen konvergenssin lauseesta (4.1.1) seuraa

$$Q(A_n)E_P(Z) = E_P\big(Z\mathbf{1}_{A_n}\big) \uparrow E_P(Z) = Q(\Omega)E_P(Z) \quad \Longrightarrow \quad Q(A_n) \uparrow 1$$

Voidaan myös käyttää normalisoitua muuttujaa

$$\widetilde{Z}(\omega) := \frac{Z(\omega)}{E_P(Z)}$$

jolla $E_P(\widetilde{Z}) = 1$, ja kirjoittaa $Q(A) = E_P\big(\widetilde{Z}\mathbf{1}_A\big)$.

Teoreema 4.3.1. $\forall A \in \mathcal{F}$ $P(A) = 0 \implies Q(A) = 0$. *Sanotaan että Q on absoluttisesti jatkuva P:n suhteen, ja merkitään $Q \ll P$.*

Tod. kun $P(A) = 0$, $Z(\omega)\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ P-melkein varmasti.

Teoreema 4.3.2. *Kun $X \in \mathcal{F}^+$,*

$$E_Q(X) = \frac{E_P(XZ)}{E_P(Z)},$$

ja $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ jos ja vain jos $(XZ) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Tod. Kun $X(\omega) \in \mathcal{Y}F^+$, väite seuraa suoraan määritelmästä ja odotusarvon lineaarisuudesta. Kun $X \in \mathcal{F}^+$ on olemassa jono $\{X_n\} \subseteq \mathcal{Y}F^+$ jolle $0 \leq X_n(\omega) \leq X(\omega)$ $\forall\omega$. Soveltamalla Monotonisen konvergenssin lauseen kaksi kertaa Q mitan alla ja P mitan alla, seuraa että $E_Q(X_n) \uparrow E_Q(X)$ ja

$$E_Q(X_n) = \frac{E_P(X_nZ)}{E_P(Z)} \uparrow \frac{E_P(XZ)}{E_P(Z)} \quad \square$$

4.3.1 Uskottavuusosamäärä

Olemme rakentaneet mitan $Q \ll P$ satunnaismuuttujan $Z \in L^1(P)$ avulla. Tämä tulos kääntyy toisinpäin, kun $Q \ll P$ on olemassa $0 \le Z(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jolle mitanvaihto kaava $Q(A) = E_P(Z\mathbf{1}_A)$ on voimassa.

Teoreema 4.3.3. *(Radon-Nikodym lause) Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ olkoon P, Q todennäköisyysmittoja (yleisemmin P voisi olla σ-äärellinen mitta), joilla $Q(A) = 0$ aina kun $A \in \mathcal{F}$ ja $P(A) = 0$ (merkintä: $Q \overset{\mathcal{F}}{\ll} P$). Silloin on olemassa satunnaismuuttuja $0 \le Z(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jolle $E_P(Z) = 1$ ja*

$$Q(A) = E_P(Z\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$Z(\omega)$ on yksikäsitteinen vailla P-nolla joukkoja. Merkitään

$$Z(\omega) = \frac{dQ}{dP}(\omega) ,$$

joka kutsutaan uskottavuus-osamääräksi (engl. likelihood ratio) tai Radon-Nikodym derivaataksi.

R-N lause todistetaan kurssin loppupuolella martingaalien avulla.

Mitanvaihto-kaava saa muotoa

$$E_Q(X) = \int_\Omega X(\omega)Q(d\omega) = \int_\Omega X(\omega) \, \frac{dQ}{dP}(\omega) \, P(d\omega)$$

Määritelmä 4.3.1. *Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysmitat P ja P' ovat singulaarisia (merkintä: $P \perp P'$), kun on olemassa $A \in \mathcal{F}$ jolla $P(A) = 0$ ja $P'(A) = 1$.*

Esimerkki 4.3.1. *Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon $\mathcal{F} = \sigma(X)$ jossa $X(\omega)$ on standardi-gaussinen satunnaismuuttuja jolla $E(X) = 0, E(X^2) = 1$, eli*

$$P(X \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\bigl(-\frac{x^2}{2}\bigr) dx$$

Olkoon P' toinen todennäköisyysmitta jolla

$$P'(X_i \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\bigl(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\bigr) dx$$

Laskemme uskottavuusosamäärät

$$Z'(\omega) = \frac{dP'}{dP}(\omega) \quad \textit{ja} \quad Z(\omega) = \frac{dP}{dP'}(\omega) = \frac{1}{Z'(\omega)}$$

R-N lauseesta seuraa että $Z'(\omega)$ on $\sigma(X)$ mitallinen, siksi on olemassa Borel mitallinen kuvaus $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ jolla $Z'(\omega) = z'(X(\omega))$ (harjoitustehtävä).

Silloin, kaikille Borel mitallisille funktioille $f(x) \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\bigl(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\bigr) dx = E_{P'}(f(X)) = E_P(f(X)Z') \\
&= E_P(f(X)z'(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) z'(x) \exp\bigl(-\frac{x^2}{2}\bigr) dx
\end{aligned}$$

josta seuraa

$$\begin{aligned}
z'(x) &= \exp\bigl(\mu x - \frac{1}{2}\mu^2\bigr), \\
Z'(\omega) &= \exp\bigl(\mu X(\omega) - \frac{1}{2}\mu^2\bigr)
\end{aligned}$$

Koska $E_P(Z') = 1$, seuraa

$$E_P\bigl(\exp(\mu X)\bigr) = \exp\bigl(\frac{1}{2}\mu^2\bigr)$$

4.3.2 Lebesguen hajotelma

Olkoon P, P' todennäköisyysmittoja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, joilla ei välttämättä $P \ll P'$ tai $P' \ll P$.

$Q := \frac{1}{2}(P + P')$ on todennäköisyysmitta jolla selvästi $P \ll Q$ ja $P' \ll Q$ σ-algebrassa $\mathcal{F}$.

R-N lauseesta (4.3.3) seuraa että uskottavuusosamäärät

$$\zeta(\omega) := \frac{dP}{dQ}(\omega) \text{ ja } \zeta'(\omega) := \frac{dP'}{dQ}(\omega) \ ,$$

ovat olemassa, ei-negatiivisiä ja $\mathcal{F}$-mitallisia.

Huomataan että koska $\forall \omega$

$$\zeta(\omega) + \zeta'(\omega) = \frac{2dP}{d(P+P')}(\omega) + \frac{2dP'}{d(P+P')}(\omega) = 2\,\frac{d(P+P')}{d(P+P')}(\omega) = 2$$

ja $\zeta(\omega) \geq 0, \zeta'(\omega) \geq 0$ seuraa

$$\zeta(\omega) \leq 2, \zeta'(\omega) \leq 2 \quad Q \text{ m.v.}, \quad \text{ja} \quad Q\big(\{\omega : \zeta(\omega) = 0\} \cap \{\omega : \zeta'(\omega) = 0\}\big) = 0.$$

Määritellään $\forall \omega \in \Omega$

$$Z(\omega) = \frac{dP}{dP'}(\omega) := \frac{\zeta(\omega)}{\zeta'(\omega)} \quad \text{ja } Z'(\omega) = \frac{dP'}{dP}(\omega) := \frac{\zeta'(\omega)}{\zeta(\omega)} = \frac{1}{Z(\omega)}$$

jossa $0/0$ saa mielivaltainen arvo, esimerkiksi 0.

Mitan-vaihto kaavan yleistys on

$$E_{P'}(X) = E_P(XZ') + E_{P'}(X\mathbf{1}(\zeta = 0))$$

kun $X \in \mathcal{F}^+$.

Todistus

$$\begin{aligned} & E_{P'}(X) = E_{P'}\big(X\{\mathbf{1}(\zeta > 0) + \mathbf{1}(\zeta = 0)\}\big) = E_Q\big(X\zeta'\mathbf{1}(\zeta > 0)\big) + E_{P'}\big(X\mathbf{1}(\zeta = 0)\big) \\ & = E_Q\left(X\frac{\zeta'}{\zeta}\zeta\mathbf{1}(\zeta > 0)\right) + E_{P'}\big(X\mathbf{1}(\zeta = 0)\big) = E_Q(XZ'\zeta) + E_{P'}\big(X\mathbf{1}(\zeta = 0)\big) \\ & = E_P(XZ') + E_{P'}\big(X\mathbf{1}(\zeta = 0)\big) = E_P(XZ') + E_{P^\perp}(X) \end{aligned}$$

jossa

$$P^\perp(d\omega) := \mathbf{1}(\zeta(\omega) = 0)P'(d\omega) \ ,$$

Siis

$$P'(d\omega) = Z'(\omega)P(d\omega) + \mathbf{1}(\zeta(\omega) = 0)P'(d\omega) = Z'(\omega)P(d\omega) + P^\perp(d\omega)$$

P ja $P^\perp$ ovat singulaarisia, koska joukolle $A := \{\omega : \zeta(\omega) = 0\}$ pätee

$$P(A) = 0 \text{ ja } P^\perp(A) = P^\perp(\Omega)$$

Koska $P^\perp(\Omega) + E_P(Z') = P'(\zeta = 0) + E_P(Z') = 1$, $P^\perp$ on todennäköisyysmitta jos ja vain jos $P \perp P'$, (silloin $P^\perp = P'$). Myös $E_P(Z') \leq 1$ ja $E_P(Z') = 1$ jos ja vain jos $P' \ll P$, silloin $P^\perp = 0$.

Esimerkki: Ehdollinen todennäköisyys Olkoon $B \in \mathcal{F}$ jolla $P(B) > 0$, ja suoritamme mitan vaihdon satunnaismuuttujalla $Z(\omega) = \mathbf{1}_B(\omega)$, saadaan

$$P(A|B) := \frac{E_P(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)}{E_P(\mathbf{1}_B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\,, \qquad A \in \mathcal{F}$$

Kuvaus $P(\ \cdot\ |B) : \mathcal{F} \to [0,1]$ on todennäköisyysmitta, joka kutsutaan ehdolliseksi todennäköysyydeksi ehdolla B tapahtuman.

De Finettin vedonlyöntimeklarin näkökulmasta $P(A|B)$ on A tapahtuman hinta johdonmukaisessa hinnoittelu systeemissa P, silloin kun tiedetään että B tapahtuu. Hajotelmasta

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

on paljon hyötyä monimutkaisten tapahtumien todennäköisyyksien laskemisessa.

Lemma 4.3.1.

- *Kun* $\big(A_i : i \in \mathbb{N}\big) \subseteq \mathcal{F}$ *on tapahtumien jono jolla* $P(A_i \cap A_k) = 0$, $i \neq j$, $P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = 1$, *seuraa* $P(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(B|A_i)P(A_i)$
- *Kun* $P(B \cap C) > 0$, $P(A|B \cap C) = \frac{P(A\cap B|C)}{P(B|C)}$
- $$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|\ A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Tod.: harjoitustehtävä.

Satunnaismuuttujan $X \in L^1(P)$ ehdollinen odotusarvo ehdolla B tapahtuman on

$$E_P(X|B) := \frac{E_P(X\mathbf{1}_B)}{P(B)}$$

Huomaamme että tässä vaiheessa ehto $P(B) > 0$ on välttämätön. Miten ehdollisen odotusarvon käsite yleistyy P-nolla mittaisille tapahtumille B ? Vastaus esitetään kurssin loppupuolella.

Luku 5

Riippumattomuus

Määritelmä 5.0.1. • *Olkoon $A, B \in \mathcal{F}$. Sanomme että A ja B ovat riippumattomia P-mitan suhteen (merkintä: $A \overset{P}{\perp\!\!\perp} B$) kun*

$$P(A)P(B) = 0 \qquad \textit{tai} \qquad P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

eli ehdollistaminen ei muuttaa todennäköisyyttä. Kun $P(A|B) = P(A)$ myös $P(B|A) = P(B)$ ja $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

- *Yleisemmin tapahtumat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ovat riippumattomia P-mitan suhteen kun jokaiselle indeksien alijoukolle $I \subseteq \{ 1, \ldots, n\}$,*

$$P\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

merkintä: $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{P}{\perp\!\!\perp}$.

- *Satunnaismuuttujat $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ jossa $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{d_i}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_i}))$ $i = 1, \ldots, n$ ovat riippumattomia P-mitan suhteen kun $\forall B_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ $i = 1, \ldots, n$*

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B_2) \ldots P(X_n \in B_n)$$

merkintä: $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \overset{P}{\perp\!\!\perp}$.

- *σ-algebrat $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}$ ovat riippumattomia P-mitan suhteen kun $\forall A_i \in \mathcal{G}_i, i = 1, \ldots, n$,*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n)$$

merkintä: $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n) \overset{P}{\perp\!\!\!\perp}$.

Huomautus 5.0.1.

- *Olkoon* $A, B \in \mathcal{F}$, *kun* $A \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} B$, *myös* $(A^c) \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} B$.
- *Olkoon* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *on Borel mitallinen kuvaus. Satunnaismuuttujille joilla* $(X_1, \dots, X_n) \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} Y$ *seuraa* $g(X_1, X_2, \dots, X_n) \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} Y$.
- *Kun* $A \in \mathcal{F}$ *ja* $A \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} A$, *seuraa että* $P(A) = 0$, *tai* $P(A) = 1$.
- *Huomataan että parittaisesta riippumattomuudesta* $A_i \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} A_j \; \forall 1 \le i \neq j \le n$, *yleisesti ei seuraa* $(A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{P}{\perp\!\!\!\perp}$.

Esimerkki 5.0.1. *Olkoon* $A, B \in \mathcal{F}$ *jolla* $A \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} B$ *ja* $P(A) = P(B) = 1/2$.

Olkoon $C = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$. *Silloin* $C \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} A$ *ja* $C \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} B$. *Vaikka kaikki tapahtumat ovat parittain rippumattomia* P*:n suhteen, kolmikkona tapahtumat* A, B, C *eivät ole* P*-rippumattomia.*

Todistukset: harjoitustehtävät.

Määritelmä 5.0.2. *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *todennäköisyysavaruus ja* $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, n$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, *ali* σ*-algebrat.*

Sanotaan että σ*-algebrat* $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ *ovat ehdollisesti* P*-riippumattomia ehdolla* $\mathcal{G}$ σ*-algebran, jos* $\forall G \in \mathcal{G}$ *jolla* $P(G) > 0$, $A_i \in \mathcal{F}_i : i = 1, \dots, n$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n |\, G) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i | G)$$

Lemma 5.0.1. *Satunnaismuuttujat* $X_1, \dots, X_n$ *ovat* P*-riippumattomia jos ja vain jos kaikille ei-negatiivisille Borel mitalliselle funktioille* $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, *pätee*

$$E_P\big(g(X_1) \dots g(X_n)\big) = E_P\big(g_1(X_1)\big) \dots E_P\big(g_n(X_n)\big) \tag{5.0.1}$$

Tod. *Kun valitsemme* $g_k(x) = \mathbf{1}_{B_k}(x)$ *jossa* $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\Longleftarrow$ *implikaatio seuraa.*

Toisinpäin, jos $X_1, \dots, X_n$ *ovar* P*-riippumattomia, () pätee Borelin joukkojen indikaattoreille.*

Silloin kun $g_k(x) = \sum_{i=1}^{m_k} y_{i,k} \mathbf{1}_{B_{i,k}}(x)$,

$$E_P\big(g_1(X_1)\dots g_n(X_n))\big) = E_P\left(\prod_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{m_k} y_{i,k}\mathbf{1}_{B_{i,k}}(X_k)\right\}\right)$$
$$= \sum_{i_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{m_n} y_{i_1,1}\dots y_{i_n,n} P\big(X_1 \in B_{i_1,1},\dots,X_n \in B_{i_n,n}\big)$$
$$= \sum_{i_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{m_n} y_{i_1,1}\dots y_{i_n,n} P\big(X_1 \in B_{i_1,1}\big)\dots P\big(X_n \in B_{i_n,n}\big)$$
$$= \prod_{k=1}^{n} E_P\left(\left\{\sum_{i=1}^{m_k} y_{i,k}\mathbf{1}_{B_{i,k}}(X_k)\right\}\right) = E_P\big(g_1(X_1)\big)\dots E_P\big(g_n(X_n)\big)$$

Jos $g_k^{(N)}(x)$ *ovat yksinkertaisia Borelin funktioita* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *jolla*

$$0 \le g_k^{(N)}(x) \uparrow g_k(x), \text{ kun } N \uparrow \infty, \ \forall k = 1,\dots,n$$

myös niiden tulot ovat Borelin funktioita $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ *jotka kasvavat monotonisesti*

$$\big(g_1^{(N)}(x_1)\dots g_n^{(N)}(x_n)\big) \uparrow \big(g_1(x_1)\dots g_n(x_n)\big),$$

ja väite seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta.

5.0.1 Lovaszin lokaali lemma [1]

Tässä luvussa näytämme miten paljon saa aikaiseksi pelaamalla pelkästään induktiolla ja ehdollisen todennäköisyyden määritelmällä.

Kun tapahtumat $A_1,\dots,A_n$ ovat P-riippumattomia, myös komplementit ovat P-riippumattomia, ja

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i))$$

Lovasz lokaali lemma antaa samankaltaisen alarajan silloin kun "tapahtumien riippuvuus on tarpeeksi harva".

[1] Tämä kappale voidaan sivuuttaa

Lemma 5.0.2. *(Paul Erdös ja Lazlo Lovasz 1975) Olkoon* $\{ A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ *tapahtumat todennäköisyysavaruudesta* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, ja* (V, E) *graafi solmujen joukolla* $V = \{ 1, 2, \dots, n\}$ *ja särmöjen joukolla* $E \subseteq V \times V$*.*

Oletetaan että (V, E) *on suunnaton, eli* $\forall i, j \in V$ $(i, j) \in E \iff (j, i) \in E$ *ja silloin merkitään* $i \sim j$*, ja* $(i, i) \notin E$ *(merkintä:* $i \not\sim i$*), ja on olemassa vektori* $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1)^n$ *jolla*

$$P\left(A_i \middle| \bigcap_{j \in S} A_j^c\right) \le x_i \prod_{j \sim i} (1 - x_j)$$

pätee $\forall i \in V, S \subseteq V$ *joilla* $\{ i\} \cup \{j : j \sim i\} \subseteq S^c$ *ja* $P\left(\bigcap_{j \in S} A_j^c\right) > 0$ *.*

Silloin $\forall S, S' \subseteq V$ *jolla* $S \cap S' = \emptyset$*,*

$$P\left(\bigcap_{i \in S} A_i^c \middle| \bigcap_{j \in S'} A_j^c\right) \ge \prod_{i \in S} (1 - x_i) > 0$$

Erityisesti kun $S' = \emptyset$*,* $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i^c\right) \ge \prod_{i \in S} (1 - x_i) > 0$*, josta seuraa* $\bigcap_{i \in S} A_i^c \neq \emptyset$*.*

Todistus Käytämme induktiota kokonaiskardinaaliteetin $n = |S| + |S'|$ suhteen. Väite on triviaali kun $n = 1$, joka tarkoittaa $|S| = 1, S' = \emptyset$.

Osoitetaan ensin että väite on tosi kun $|S| = 1$, $S = \{i\}$ ja $i \notin S'$.

Olkoon $S' = S'' \cup S'''$ jossa $S'' = S' \cap \{ j \sim i\}$, $S''' = S' \cap \{ j : j \not\sim i\}$. Silloin

$$P\left(A_i \middle| \bigcap_{j \in S'} A_j^c\right) = \frac{P\left(A_i, \bigcap_{j \in S''} A_j^c \middle| \bigcap_{j \in S'''} A_j^c\right)}{P\left(\bigcap_{j \in S''} A_j^c \middle| \bigcap_{j \in S'''} A_j^c\right)}$$

jossa

$$P\left(A_i, \bigcap_{j \in S''} A_j^c \middle| \bigcap_{j \in S'''} A_j^c\right) \le P\left(A_i \middle| \bigcap_{j \in S'''} A_j^c\right) \le x_i \prod_{j \sim i} (1 - x_j)$$

ja koska $|S''| + |S'''| = |S'| < 1 + |S'| = n$ induktion oletuksesta seuraa

$$P\Big(\bigcap_{j\in S''} A_j^c \Big| \bigcap_{j\in S'''} A_j^c\Big) \geq \prod_{j\in S''}(1-x_j) \geq \prod_{j\sim i}(1-x_j)$$

josta seuraa $\quad P\Big(A_i^c \Big| \bigcap_{j\in S'} A_j^c\Big) \geq (1-x_i)\ .$

Kun $\{\ i\} \subsetneq S$ ja $S' \cap S = \emptyset$, hajotetaan $S = \{i\} \cup (S \setminus \{\ i\})$,

$$P\Big(\bigcap_{k\in S} A_k^c \Big| \bigcap_{j\in S'} A_j^c\Big) = P\Big(A_i^c \Big| \bigcap_{j\in S'\cup S\setminus\{\ i\}} A_j^c\Big) P\Big(\bigcap_{k\in S\setminus\{\ i\}} A_k^c \Big| \bigcap_{j\in S'} A_j^c\Big)$$
$$\geq (1-x_i) \prod_{k\in S\setminus\{\ i\}} (1-x_k) = \prod_{i\in S}(1-x_i) > 0 \quad \square$$

jossa induktio-oletus astuu voimaan koska $|S \setminus \{\ i\}| + |S'| = |S| + |S'| - 1$.
$\square$

Seuraus 5.0.1. *Oletetaan että (V, E) on riippuvuuden graafi, jossa*
$\forall i \in V, S \subseteq V$ jolla $S^c \subseteq \{\ i\} \cup \{j : j \sim i\}$,
tapahtuma A_i on P-riippumaton tapahtumasta $\Big(\bigcap_{j\in S} A_j\Big)$.
Toisin sanoen A_i on P-riippumaton σ-algebrasta $\sigma(A_j : j \neq i$ ja $j \not\sim i)$.

1. *Kun on olemassa lukuja $x_i \in [0, 1), i = 1, \ldots, n$ jolla*

$$P(A_i) \leq x_i \prod_{j\sim i}(1-x_j)\ ,$$

   seuraa $P\Big(\bigcap_{i\in S} A_i^c\Big) \geq \prod_{i\in S}(1-x_i), \quad \forall S\ \subseteq V$, erityisesti $\Big(\bigcap_{i\in S} A_i^c\Big) \neq \emptyset$.

2. *Erityisesti, kun $\#\{\ j : j \sim i\} \leq d$, ja $P(A_i) \leq \exp(-1)/(d+1), \forall i \in V$, seuraa*

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\Big) \geq \Big(1 - \frac{1}{d+1}\Big)^n > 0$$

Todistus

1. Yleisen Lovaszin lemman oletus seuraa riippumattomuuden nojalla.

2. Tarvitaan x jolla $p \leq x(1-x)^d$. Kun $x = (1+d)^{-1}$, ensimmäisen osan oletus seuraa koska
$$P(A_i) \leq \frac{\exp(-1)}{d+1} \leq \frac{1}{d+1}\left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d = x(1-x)^d \quad \square$$
jossa $\exp(-1) \leq \left(1-(d+1)^{-1}\right)^d$ $\square$

Esimerkki 5.0.2. *Dataverkossa on n solmuparia, ja jokaiselle solmuparin p välissä on joukko J_p mahdollisia reittiä.*

Oletetataan että $|J_p| = m$ jokaiselle parille p, ja kun $p \neq p'$ jokaiselle reitille $r \in J_p$ pätee
$$\Big|\{r' \in J_{p'} \text{ jolla reitit } r \text{ ja } r' \text{ leikkaavat toisiinsa }\}\Big| \leq k$$
Kun k ei ole liian suuri, on mahdollista yhdistää jokaista solmujen paria, reititykseillä jossa kaikki reitit eivät leikkaa toisiinsa.

Tod. *Jokaiselle solmujen parille p valitaan riippumattomasti tasaisesta jakaumasta satunnaisreitti R_p joukosta J_p . Määritellään jokaiselle solmujen parien parille $p \neq p'$ tapahtuma*
$$A_{p,p'} = \{ \text{ satunnaisreitit } R_p \text{ ja } R_{p'} \text{ leikkaavat toisiinsa } \}.$$
Selvästi $P(A_{p,p'}) \leq k/m$. Huomataan myös että
$$A_{p,p'} \perp\!\!\!\perp \sigma\big(A_{q,q'} : q \neq p, p',\ \text{ja } q' \neq p, p'\big)$$
Seuraa että on $d = 2(n-1)$ tapahtumaa, $A_{p,r}$ jolla $r \neq p$ ja $A_{r',p'}$ jolla $r' \neq p'$, jotka ovat P-riippuvasia tapahtumasta $A_{p,p'}$. Siis tapahtuman $A_{p,p'}$ aste (naapureiden määrä) tapahtumien riippuvuusgrafissa on $d = 2(n-1)$.

Silloin kun
$$P(A_{p,p'}) \leq k/m \leq \frac{\exp(-1)}{d+1} \leq (d+1)^{-1}\left(1-(d+1)^{-1}\right)^d$$
eli $k \leq m\exp(-1)/(2n-1)$, Lovaszin lemma astuu voimaan ja
$$P\left(\bigcap_{p,p'} A^c_{p,p'}\right) > \left(1-(d+1)^{-1}\right)^{n(n-1)/2} > 0\ ,$$
josta seuraa $\left(\bigcap_{p,p'} A^c_{p,p'}\right) \neq \emptyset$ $\square$

5.1 Borel Cantelli lemmat

Lemma 5.1.1. *(Borel-Cantelli I).*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P\big(\limsup_n A_n\big) = P\big(\{\omega : \omega \in A_n \text{ äärettömään monille } n\text{:lle } \}\big) = 0$$

Tod.

$$\limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k>n} A_k \subseteq \bigcup_{k>m} A_k \quad \forall m$$

Sarjan suppenemisesta seuraa

$$P(\limsup_n A_n) \le \sum_{k\ge m} P(A_k) \to 0 \text{ kun } m \to \infty \quad \square$$

Lemma 5.1.2. *Yleistetty Borel-Cantelli I (Barndorff-Nielsen,1961)*

Kun $\liminf_n P(A_n) = 0$ *ja* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty$*, seuraa* $P(\limsup_n A_n) = 0$*.*

Tod. Huomataan että

$$\limsup_n (A_n \cap A_{n+1}^c) = (\limsup_n A_n) \cap (\limsup_n A_n^c)$$

koska jos $(A_n \cap A_{n+1}^c)$ tapahtuu äärettömään usein, myös A_n ja A_n^c tapahtuvat äärettömään usein. Toisaalta, jos molemmat A_n ja A_n^c tapahtuvat äärettömään usein, myös $(A_n \cap A_{n+1}^c)$ tapahtuu äärettömään usein muuten jompikumpi $(\liminf_n A_n) = (\limsup_n A_n^c)^c$ tai $(\liminf_n A_n^c) = (\limsup A_n)^c$ tapahtuisi.

$$P(\limsup_n A_n) = P\big(\limsup_n (A_n \cap A_{n+1}^c)\big) + P\big((\limsup_n A_n) \cap (\limsup_n A_n^c)^c\big) = 0$$

koska oletuksesta ja ensimmäisen Borel Cantelli lemmasta seuraa

$$P\big(\limsup_n (A_n \cap A_{n+1}^c)\big) = 0,$$

ja $P((\limsup_n A_n^c)^c) = P(\liminf_n A_n) \le \liminf_n P(A_n) = 0 \; \square$.

Lause 5.1.1. *(Kolmogorovin 0-1 laki) Todennäköisyysavaruudessa* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *olkoon* $\{\mathcal{F}_k : k \in \mathbb{N}\}$ *σ-algebroiden jono jossa* $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}$*. Olkoon*

$$\mathcal{F}^\infty = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_k, \quad \mathcal{T}_n = \bigvee_{k \geq n} \mathcal{F}_k, \quad \mathcal{T} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$$

$\mathcal{T}$ kutsutaan häntä (tail) σ-algebraksi.

Silloin kun σ-algebrat $\{\mathcal{F}_k : k \in \mathbb{N}\}$ ovat P-riippumattomia, eli

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_n}) = \prod_{i=1}^{n} P(A_{k_i}) \quad \forall n, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}, A_{k_i} \in \mathcal{F}_i \ .$$

seuraa että $\mathcal{T}$ on P-triviaali, eli $P(A) \in \{0, 1\}$ kun $A \in \mathcal{T}$.

Tod. Olkoon $A \in \mathcal{T}$. Silloin $A \in \mathcal{T}_{n+1} \, \forall n \in \mathbb{N}$, ja tästä seuraa σ-algebroiden riippumattomuus

$$A \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} \left(\bigvee_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k \right) \quad \forall n \Longrightarrow A \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k \right) = \mathcal{F}_\infty$$

joka tarkoittaa $\mathcal{T} \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{F}^\infty \supseteq \mathcal{T}$. Koska $A \in \mathcal{T}$ on P-riippumaton itsestään,

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A)P(A).$$

Ainoat ratkaisut ovat $P(A) = 0, 1 \quad \square$

Lemma 5.1.3. *(Borel-Cantelli II)*

Olkoon $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ P-riippumattomien tapahtumien jono, eli

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \prod_{k=1}^{n} P(A_{i_k}) \quad \forall n, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N} \ .$$

Silloin

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Longleftrightarrow P\big(\limsup_n A_n\big) = P\big(\{\omega : \omega \in A_n \text{ äärettömään usein } \}\big) = 1$$

Tod. Olkoon $\mathcal{F}_n = \sigma(A_n) = \{A_n, A_n^c, \Omega, \emptyset\}$, $n \in \mathbb{N}$. Koska σ-algebrat $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ovat P-riippumattomia, ja tapahtuma $(\limsup_n A_n) \in \mathcal{T}$, se on P-triviaali, eli $P(\limsup_n A_n) \in \{0, 1\}$.

Kun $P(\limsup_n A_n) = 1$, ensimmäisen Borel Cantelli lemmasta seuraa $\sum_{n=1}^\infty P(A_n) = \infty$.

Kun $\sum_{n=1}^\infty P(A_n) = \infty$,

$$P((\limsup_n A_n)^c) = P(\liminf_n A_n^c) = P\Big(\bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k^c\Big) \ ,$$

σ-additiivisuudesta ja epäyhtälöstä $(1-x) \leq \exp(-x)$ seuraa

$$P\Big(\bigcap_{k\geq n} A_k^c\Big) = \lim_{N\uparrow\infty} P\Big(\bigcap_{N\geq k\geq n} A_k^c\Big) = \lim_{N\uparrow\infty} \prod_{N\geq k\geq n} (1-P(A_k)) \leq$$

$$\lim_{N\uparrow\infty} \exp\bigg(-\sum_{k=n}^N P(A_k)\bigg) = \exp\bigg(-\sum_{k=n}^\infty P(A_k)\bigg) = \exp(-\infty) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

josta seuraa $P((\limsup_n A_n)^c) = 0 \quad \square$

Huomautus 5.1.1. *Toinen Borel Cantelli lemma ei päde suoraan ilman riippumattomuuden ehtoa. Esimerkiksi kun $A \in \mathcal{F}$ jolla $0 < P(A) < 1$ ja asetamme $A_n = A \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_n P(A_n) = \infty$ mutta $P(\limsup_n A_n) = P(A) \notin \{0,1\}$. Riippumattomuuden ehtoa voidaan kuitenkin heikentää.*

Lemma 5.1.4. *(Yleistetty Borel-Cantelli II)*

Kun $\sum\limits_{n=1}^\infty P(A_n) = \infty$ ja

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(A_i \cap A_j)}{\Big(\sum_{i=1}^n P(A_i)\Big)^2} = c < \infty$$

seuraa $P(\limsup A_n) \geq 1/c$.

Tod. Todistetaan myöhemmin Cauchy-Schwartzin epäyhtälön avulla.

Luku 6

Stokastinen konvergenssi

Määritelmä 6.0.1. *Olkoon $X(\omega), X_n(\omega), n \in \mathbb{N}$ satunnaismuuttujat. Sanotaan että jono (X_n) suppenee stokastisesti (tai todennäköisyyden mielessä) kohti X:aan, (merkintä:$X_n \stackrel{P}{\to} X$) kun jokaiselle $\varepsilon > 0$*

$$P\big(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}\big) \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Stokastinen konvergenssi on heikompi kuin melkein varma konvergenssi:

Lause 6.0.1. 1. *Kun $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ P-melkein varmasti, myös $X_n \stackrel{P}{\to} X$.*

2. *Jos $X_n \stackrel{P}{\to} X$ (stokastisesti), on olemassa deterministinen alijono $\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$ jolla*

   $\lim_{k\to\infty} X_{n(k)}(\omega) = X(\omega)$ *P-melkein varmasti,*

3. *$X_n \stackrel{P}{\to} X$ jos ja vain jos kaikille alijonoille $\{n(k)\}$ on olemassa alijonon (deterministinen) alijono $\{n(k_l)\}$ jolla $X_{n(k_l)}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti kun $l \to \infty$.*

Tod. Voidaan olettaa että $X(\omega) = 0$, muuten otetaan $X_n(\omega) = X_n(\omega) - X(\omega)$.

1. $X_n(\omega) \to 0$ P-m.v. jos ja vain jos

$$P\Big(\bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{k\geq m} \{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\Big) = 1$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad P\Big(\liminf_k \{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\Big) = 1$$

Fatou lemmasta $\forall n$

$$1 = P\Big(\liminf_k \{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\Big) \leq \liminf_k P\Big(\{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\Big) = 1$$
$$\iff 0 = \limsup_k P\Big(\{\omega : |X_k(\omega)| > n^{-1}\}\Big) = \lim_k P\Big(\{\omega : |X_k(\omega)| > n^{-1}\}\Big)$$

2. Stokastisesta konvergenssista seuraa että on olemassa jono k_n jolla

$$P\Big(\{\omega : |X_l(\omega)| > n^{-1}\}\Big) < 2^{-n}, \quad \forall l \geq k_n$$

Koska

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\{\omega : |X_{k_n}(\omega)| > n^{-1}\}\Big) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 < \infty$$

Borel-Cantelli lemmasta (5.1.1) seuraa

$$0 = P\Big(\limsup_n \{\omega : |X_{k_n}(\omega)| > n^{-1}\}\Big)$$
$$\geq P\Big(\limsup_n \{\omega : |X_{k_n}(\omega)| > N^{-1}\}\Big) = 0 \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

josta seuraa

$$1 = P\Big(\bigcap_N \liminf_n \{\omega : |X_{k_n}(\omega)| \leq N^{-1}\}\Big)$$
$$\iff \quad X_{k_n}(\omega) \to 0 \quad P\text{-melkein varmasti.}$$

3. Olkoon $X(\omega) = 0$ ja tehdään vastaoletus että X_n ei suppenisi stokastisesti kohti nollaan: on olemassa $\varepsilon > 0$ ja jono $n(k) \uparrow \infty$ kun $k \uparrow \infty$ jolla

$$P(|X_{n(k)}| > \varepsilon) \geq \varepsilon > 0 \quad \forall k$$

Tästä tulee ristiriita koska oletetusti olisi olemassa alijono $n(k_l)$ jolla $X_{n(k_l)}(\omega) \to 0$ P-melkein varmasti ja siksi myös stokastisesti, siksi saadaan ristiriita

$$0 < \varepsilon \le P(|X_{n(k_l)}| > \varepsilon) \to 0 \quad \text{kun } l \to \infty \quad \square$$

Huomautus: Kun X_n suppenee stokastisesti, jokaiselle allijonolle (n_k) löytyy alijonon alijono (n_{k_l}) ja joukko $N \subseteq \Omega$ jolla $P(N) = 0$, jolla $X_{n_{k_l}}(\omega) \to 0$ $\forall \omega \in N^c$. Yleisesti nolla-mittainen joukko N riippuu alijonosta (n_k). Koska alijonojen joukko ei ole numeroituva, se ei tarkoita että olisi olemassa N jolla $P(N) = 0$, ja kaikille alijonolle (n_k) löytyisi alijonon alijono (n_{k_l}) jolla $X_{n_{k_l}}(\omega) \to 0$ $\forall \omega \in N^c$. Silloin $X_n(\omega)$ suppenisi P-melkein varmasti.

Lause 6.0.2. *Jos $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio ja $X_n(\omega), X(\omega) \in \mathbb{R}^d$ ovat satunnaisvektorit jolla*

$$|X_n - X| \xrightarrow{P} 0 \quad \textit{stokastisesti, kun } n \to \infty,$$

seuraa että

$$f(X_n) \xrightarrow{P} f(X) \quad \textit{stokastisesti, kun } n \to \infty,$$

Todistus: Olkooon $(n_k : k \in \mathbb{N})$ mielivaltainen indeksijono. Karakterisaation (6.0.1.3) mukaan, on olemassa alijono $(n_{k(\ell)} : \ell \in \mathbb{N})$ jolla

$$X_{n_{k(\ell)}}(\omega) \longrightarrow X(\omega) \quad P \text{ melkein varmasti kun } \ell \to \infty.$$

Koska f on jatkuva

$$f\big(X_{n_{k(\ell)}}(\omega)\big) \longrightarrow f\big(X(\omega)\big) \quad P \text{ melkein varmasti kun } \ell \to \infty$$

ja väite seuraa karakterisaatiosta (6.0.1.3).

Esimerkki 6.0.1. *Näytämme että stokastinen konvergenssi on aidosti heikompi kuin melkein varmaa konvergenssia: Olkoon $\Omega = (0, 1]$ varustettu Borel σ-algebralla $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0, 1])$ tasaisella todennäköisyydellä , siis $P((0, t]) = t$, kun $t \in (0, 1]$.*

Määritellään satunnaismuuttujen jono

$$X_{n,k}(\omega) = \mathbf{1}_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]}(\omega) \quad k = 0, 1, \dots, (2^n - 1)$$

jossa indeksit voidaan järjestää seuraavaksi: $(n, k) \geq (m, h)$ *jos ja vain jos* $n > m$ *tai* $n = m$ *ja* $k \geq h$.

Seuraa että $\forall \omega \in (0, 1]$ *kun* $(n, k) \to \infty$ *järjstyksen mukaisesti,*

$$\liminf_{n,k\to\infty} X_{n,k}(\omega) = 0 \neq \limsup_{n,k\to\infty} X_{n,k}(\omega) = 1, \text{ ja}$$
$$P(\{\omega : X_{n,k} > 1/2\}) = P((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]) = 2^{-n} \to 0 \text{ kun } n \to \infty \ .$$

Tehtävä 6.0.1. *Etsi jonolle* $(X_{n,k}(\omega), n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n)$ *alijono* $(X_{n(l),k(l)} : l \in \mathbb{N})$ *jolla* $X_{n(l),k(l)}(\omega) \to 0$ *P-m.v. kun* $l \to \infty$.

Teoreema 6.0.1. *Stokastisen konvergenssin topologia on metrinen.*

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff d(X, X_n) \to 0, \text{ jossa}$$
$$d(X, Y) = d(X - Y, 0) = E_P\left(\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|}\right) \text{ tai}$$
$$d(X, Y) = d(X - Y, 0) = E_P\big(1 \wedge |X - Y|\big)$$

Olkoon $X_n \xrightarrow{P} X = 0$. $\forall \varepsilon > 0$,

$$\frac{|X_n|}{(1 + |X_n|)} \leq \frac{|X_n|}{(1 + |X_n|)}\mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) + \varepsilon\mathbf{1}(|X_n| \leq \varepsilon) \leq \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) + \varepsilon,$$
$$d(X_n, 0) \leq P(|X_n| > \varepsilon) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

kun n on tarpeeksi suuri.

Toisinpäin, koska kuvaus $f(x) = x/(1 + x)$ on aidosti kasvava x:n suhteen kun $x \geq 0$. ($f'(x) = x(1 + x)^{-2}$), $\forall \varepsilon > 0$,

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{|X_n|}{1 + |X_n|}\mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{|X_n|}{1 + |X_n|}$$
$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}P(|X_n| > \varepsilon) \leq d(|X_n|, 0) \to 0 \text{ kun } n \to \infty$$

Näytämme että $d(X, Y)$ on etäisyys, se täyttää kolmion epäyhtälön:

$$\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} \leq \frac{|X - Z| + |Z - Y|}{1 + |X - Z| + |Z - Y|} \leq \frac{|X - Z|}{1 + |X - Z|} + \frac{|Z - Y|}{1 + |Z - Y|}$$

kun otetaan odotusarvo seuraa $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$ $\square$

6.1 Funktionaalianalyysin peruskäsitteiden pika-sanasto

1. Topologinen avaruus: $(E, \mathcal{T})$ jossa topologia $\mathcal{T} \subseteq 2^E$ on kaikkien avointen joukkojen kokoelma. Topologia an suljettu äärellisten leikkausten suhteen ja mielivaltaisten yhdistelmien suhteen. Avoimen joukon komplementti sanotaan suljetuksi.

   Olkoon $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$. Sanotaan että $x_n \to x$ topologiassa $\mathcal{T}$ jos

   $\forall U \in \mathcal{T}$ jolle $x \in U$, $\exists\ n_U$ jolle $x_n \in U\ \forall n \geq n_U$.

2. $d : E \times E \to [0, +\infty]$ on metriikka jos

   - $d(e, e') = 0$ jos ja vain jos $e = e'$
   - $d(e, e') = d(e', e)$ (symmetrisyys)
   - $d(e, e'') \leq d(e, e') + d(e', e'')$ (kolmion epäyhtälö)

3. Topologinen avaruus $(E, \mathcal{T})$ on metrinen jos on olemassa metriikka (etäisyys) $d : E \times E \to [0, +\infty]$, jonka suhteen avoimet pallot generoivat topologian $\mathcal{T}$:n, eli:

   $B(e, r) = \{e' : d(e, e') < r\} \in \mathcal{T}\ \forall\ e \in E, r > 0$

   ja kaikille $x \in U$, $x \in E, U \in \mathcal{T}$ on olemassa $r > 0$ jolle $x \in B(e, r) \subseteq U$.

   Metrisessa avaruudessa, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ on *Cauchy jono* kun $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa n_ε jolle $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ kun $n, m \geq n_\varepsilon$.

   Sanotaan että metrinen avaruus (E, d) on *täydellinen* jos kaikille Cauchy jonoille $\{x_n\}$ on olemassa rajaarvo $x \in E$.

4. Olkoon E reaali-vektoriavaruus, eli kun $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$, myös $\lambda x \in E$, $(x + y) \in E$.

   Kuvaus $\| \cdot \|: E \to [0, +\infty)$ on *normi* kun

   i) $\| x \| = 0 \in \mathbb{R} \iff x = \mathbf{0} \in E$ ii) $\| \lambda x \| = |\lambda|\ \| x \|$

iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Kaikki normatut vektoriavaruudet ovat metriset, metriikalla $d(x, y) := \| x - y \|$, joka generoi normi-konvergenssin topologian. Samalla avaruudella voi olla useita käyttökelpoisia topologioita.

5. esi-Hilbertin avaruus on normi-avaruus jossa normi on peräisin skalaaritulosta $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jossa $\| x \|^2 := \langle x, x \rangle$. Reaaliarvoinen skalaaritulo on symmetrinen $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

   bilineaarinen $\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle$, ja positiivinen $\langle x, x \rangle \geq 0$, jolla $\langle x, x \rangle = 0 \iff 0$.

6. Täydellinen normiavaruus on Banachin avaruus ja täydellinen esi-Hilbertin avaruus on Hilbertin avaruus.

Luku 7

Fubinin lause ja tulo-todennäköisyys

Lemma 7.0.1. *Olkoon* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^0(\Omega, \mathcal{F})$.

1. *Kun* $X_n(\omega) \geq 0$ *P-melkein varmasti* $\forall n$*, seuraa*
$$\sum_{k=1}^{\infty} E_P(X_k) = E_P\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)\right) \in [0, +\infty] \tag{7.0.1}$$

2. *Kun* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(P)$ *(ei välttämättä ei-negatiivisia),*
ja $\sum_{k=1}^{\infty} E_P(|X_k|) < \infty$ *, satunnais-sarja*
$$S_\infty(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)$$
suppenee P*-melkein varmasti ja* $L^1(P)$*-normissa, (7.0.1) on voimassa.*

Todistus:

1. selvästi kun $X_n(\omega) \geq 0$, $S_n(\omega) := \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \uparrow S_\infty(\omega) \in [0, +\infty]$ P-m.v. kun $n \uparrow \infty$, ja väite seuraa monotonisen konvergenssilauseesta.

2. Olkoon $Y_n = S_n(\omega) := \sum_{k=1}^{n} |X_k(\omega)|$, $Y_n \uparrow Y_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} |X_k(\omega)|$ ja monotonisen konvergenssi lauseesta (4.1.1) seuraa
$$E_P(Y_\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} E_P(|X_k|)$$

siis $Y_\infty \in L^1(P)$ ja erityisesti $P(Y_\infty < \infty) = 1$ P-melkein varmasti, ja P-m.v. $S_n(\omega) \to S_\infty(\omega)$ koska sarja suppenee absoluttisesti.

Kolmio epäyhtälöstä seuraa

$$|S_n(\omega)| \leq Y_n(\omega) \uparrow Y_\infty(\omega) < \infty$$

jossa $Y_\infty \in L^1(P)$, dominoidun konvergenssi lauseesta (8.0.1) seuraa odotusarvojen sarjan konvergenssi $L^1(P)$ avaruudessa ja yhtälö (7.0.1) □

Lemma 7.0.2. *Todennäköisyysavaruuksien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, i=1,2, tuloavaruus $\Omega_1 \times \Omega_2$ on varustettu tulo-σ-algebralla $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 := \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$.*

Olkoon $X : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ satunnaismuuttuja.

Silloin kaikille kiinnitetylle $\omega_2 \in \Omega_2$ kuvaus

$$\omega_1 \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$$

on $(\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ satunnaismuuttuja, ja tietysti myös kaikille kiinnitetylle $\omega_1 \in \Omega_1$ kuvaus

$$\omega_2 \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$$

on $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ satunnaismuuttuja. Myös päinvastainen implikaatio on tosi:

jos $\omega_1 \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$ on $\mathcal{F}_1$-mitallinen $\forall \omega_2 \in \Omega_2$), ja $\omega_2 \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$ on $\mathcal{F}_2$-mitallinen $\forall \omega_1 \in \Omega_1$),

seuraa että kuvaus $(\omega_1, \omega_2) \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$ on $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$-mitallinen.

Tod. Oletamme ensin että $|X(\omega_1, \omega_2)| \leq K$ jossa K on deterministinen. Olkoon

$$\mathcal{C} = \Big\{ (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)\text{-mitalliset ja rajoitetut satunnaismuuttujat joilla väite on tosi } \Big\}$$

On selvää $\mathcal{C}$ on monotoninen luokka ja

$$\mathbf{1}_{(A_1 \times A_2)}(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{1}_{A_1}(\omega_1) \mathbf{1}_{A_2}(\omega_2) \in \mathcal{C}, \ \forall A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2.$$

Koska $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ on π-luokka, monotonisen luokan lauseesta seuraa että $\mathcal{C}$ sisältää kaikki rajoitetut $(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$-mitalliset kuvaukset.

Lause seuraa myös kun satunnaismuuttuja X ei ole rajoitettu, koska

$$X(\omega) = \lim_{K\to\infty} X^{(K)}(\omega) \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \qquad \text{jossa}$$
$$X^{(K)}(\omega) = X(\omega)\mathbf{1}(|X(\omega)| \le K) \in [-K, K]$$

jossa on osoitettu että $X^{(K)}(\omega_1, \cdot)$ on $\mathcal{F}_2$-mitallinen $X^{(K)}(\cdot, \omega_2)$ on $\mathcal{F}_1$-mitallinen.

Toiseen suuntaan, olkoon

$$\mathcal{C} = \left\{ \text{funktiot } X(\omega_1, \omega_2) \text{ jotka ovat rajoitettuja ja erikseen } \mathcal{F}_i\text{-mitallisia} \right\}$$

Seuraa että $\mathcal{C}$ on monotoninen luokka, ja $\forall A_1 \in \mathcal{F}_1, A_1 \in \mathcal{F}_2$ $\mathbf{1}_{A_1}(\omega_1) \times \mathbf{1}_{A_1}(\omega_2) \in \mathcal{C}$. Monotonisen luokan lauseesta seuraa että $\mathcal{C}$ sisältää kaikki rajoitetut ja $(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$-mitalliset funktiot.

Teoreema 7.0.1. *(Fubinin lause)*
Olkoon $X : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ satunnaismuuttuja.

- *Kun $X(\omega_1, \omega_2) \ge 0$ määritellään marginaali-integraalit*

  $$I_1^X(\omega_1) = \int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2) \;, \quad I_2^X(\omega_2) = \int_{\Omega_1} X(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1)$$

  (lemmasta 7.0.2 ja positiivisuudesta seuraa että nämä ovat hyvin määriteltyä).

  Silloin iteroitu integraali ei riipu integroinnin järjestyksestä

  $$\int_{\Omega_1} I_1^X(\omega_1) P_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_1} \left\{ \int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2) \right\} P_1(d\omega_1) = \tag{7.0.2}$$

  $$\int_{\Omega_2} I_2^X(\omega_2) P_1(d\omega_2) = \int_{\Omega_2} \left\{ \int_{\Omega_1} X(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) \right\} P_2(d\omega_2) :=$$
  $$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X(\omega_1, \omega_2)\ (P_1 \otimes P_2)(d\omega_1 \times d\omega_2)$$

  ja tulotodennäköisyys $(P_1 \otimes P_2)(A)$ on hyvin määritelty kun $A \in (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ ottaamalla $X(\omega_1, \omega_1) = \mathbf{1}_A(\omega_1, \omega_2)$.

- *Yleisemmin kaava (7.0.2) on voimassa kun*

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |X(\omega_1,\omega_2)|\,(P_1\otimes P_2)(d\omega_1\times d\omega_2)<\infty$$

Todistus: määritellään

$$\mathcal{C}=\big\{(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2)\text{-mitalliset ja rajoitetut satunnaismuuttujat joilla väite on tosi}\big\}$$

Osoitamme että $\mathcal{C}$ on monotoninen luokka. Selvästi vakio $\mathbf{1}\in\mathcal{C}$ ja $(aX+bY)\in\mathcal{C}$ kun $X,Y\in\mathcal{C},\ a,b\in\mathbb{R}$.

Olkoon jono $\{X^{(n)}:n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathcal{C}$ jolla

$$0\le X_n(\omega_1,\omega_2)\uparrow X(\omega_1,\omega_2)\le K<\infty\ \forall\omega_i\in\Omega_i, i=1,2.$$

Lemmasta $7.0.2$ ja monotonisen konvergenssin lauseesta (4.1.1) seuraa

$$I_i^{X^{(n)}}(\omega_i)\uparrow I_i^X(\omega_i)\ \in\ L^0(\Omega_i,\mathcal{F}_i)\ ,\quad i=1,2.$$

Soveltamalla monotonisen konvergenssin lausetta toista kertaa seuraa

$$E_{P_1}(I_1^X)=\lim_{n\uparrow\infty}E_{P_1}(I_1^{X^{(n)}})=\lim_{n\uparrow\infty}E_{P_2}(I_2^{X^{(n)}})=E_{P_2}(I_2^X)$$

Fubinin lauseen väite pätee myös X:lle, siis $X\in\mathcal{C}$ joka on monotoninen luokka.

Selvästi $\mathbf{1}_{(A_1\times A_2)}\in\mathcal{C}\quad\forall A_i\in\mathcal{F}_i, i=1,2.$

Koska $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$ on π-luokka, monotonisen luokan lauseesta seuraa että $\mathcal{C}$ sisältää kaikki rajoitetut $(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2)$-mitalliset kuvaukset. Erityisesti $\mathcal{C}$ sisältää kaikki yksinkertaiset satunnaismuuttujat $X\in\mathcal{Y}(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2)$. Nyt monotonisen konvergenssi lauseen avulla väite seuraa myös kun $X\in(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2)^+$.

Osoitamme että kuvaus

$$(P_1\otimes P_2):(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2)\longrightarrow[0,1]$$

on σ-additiivinen todennäköisyys:

Olkoon $\{A^{(n)}:n\in\mathbb{N}\}\subseteq(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2)$ ei-vähenevä tapahtuma jono, siis

$$A^{(n)}\subseteq A^{(n+1)}\uparrow A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A^{(n)}$$

Määritellään joukkojen leikkeita: kun $\omega_1 \in \Omega_1$,

$$A_2^{(n)}(\omega_1) := \big\{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A^{(n)}\big\} \uparrow A_2(\omega_1) := \big\{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\big\} \text{ kun } n \uparrow \infty \ .$$

$\forall \omega_1 \in \Omega_1$, koska P_2 on σ-additiivinen seuraa $P_2\big(A_2^{(n)}(\omega_1)\big) \uparrow P_2\big(A_2(\omega_1)\big)$, jossa $P_2(A_2^{(n)}(\omega_1))$ ja $P_2(A_2(\omega_1))$ ovat $\mathcal{F}_1$-mitallisia satunnaismuuttujia. Nyt monotonisen konvergenssi lauseesta seuraa

$$(P_1 \otimes P_2)(A^{(n)}) = \int_{\Omega_1} P_2\big(A_2^{(n)}(\omega_1)\big) P_1(d\omega_1) \quad \uparrow \quad \int_{\Omega_1} P_2\big(A_2(\omega_1)\big) P_1(d\omega_1) = (P_1 \otimes P_2)(A) \ .$$

Hajottamalla $X(\omega) = \big(X^+(\omega) - X^-(\omega)\big)$, odotusarvon linearisuudesta väite seuraa myös silloin kun $X \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, P_1 \otimes P_2) \quad \square$.

Seuraus 7.0.1. *Fubini lause on voimassa myös kun todennäköisyysavaruudet $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ varustetaan σ-additiivisilla mitoilla μ_i, $i = 1, 2$.*

Tod. Kun mitat $\mu_i(d\omega_i)$ ovat äärellisiä, sovelletaan Fubini lauseen ensin todennäköisyysmitoille $P_i(d\omega_i) = \mu_i(d\omega_i)/\mu_i(\Omega_i)$ $i = 1, 2$.

Kun mitat μ_i ovat σ-äärellisiä on olemassa numeroituvia mitallisia osituksia

$$\Omega_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i^{(n)}, \text{ jossa } \big(\Omega_i^{(n)} \cap \Omega_i^{(m)}\big) = \emptyset, \ n \neq m, \quad \text{ ja } \mu_i(\Omega_i^{(n)}) < \infty \quad i = 1, 2$$

Väite seuraa kun integroidaan erikseen tulo-avaruuksissa $(\Omega_1^{(n)} \times \Omega_2^{(k)})$, $n, k \in \mathbb{N}$.

Seuraus 7.0.2. *Fubini lause yleistyy suoraan äärelliseen tuloavaruuteen*

$$\big(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d, \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_d, P_1 \otimes \cdots \otimes P_d\big), \quad d \in \mathbb{N}$$

Lause 7.0.1. *Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon*

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots X_d(\omega)) \in \mathbb{R}^d$$

satunnaisvektori, ja olkoon $P_X(dt)$ sen todennäköisyysjakauma $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ avaruudessa:

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P\big(\{\omega : X(\omega) \in B\}\big), \quad \textit{kun } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

Satunnaismuuttujat $X_1(\omega), \dots, X_d(\omega)$ ovat rippumattomia P-mitan suhteen jos ja vain jos vektorin todennäköisyysjakauma on koordinattien jakaumien tulo:

$$P_X = (P_{X_1} \otimes \cdots \otimes P_{X_d})$$

Tod. harjoitustehtävä.

Huomaat että kuten lemmassa 7.0.2 kuvaus $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ on mitallinen jos ja vain jos koordinatti-kuvaukset $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $i = 1, \dots, d$ ovat mitallisia.

Esimerkki 7.0.1. *Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) \geq 0$ P-melkein varmasti. Silloin*

$$E_P(X) = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega) = \int_0^\infty t\, P_X(dt) = \int_0^\infty P(X > t) dt$$

Tod. koska $t = \int\limits_0^\infty \mathbf{1}(s < t) ds$

$$\int_0^\infty t\, P_X(dt) = \int_0^\infty \biggl(\int_0^\infty \mathbf{1}(s < t) ds \biggr) P_X(dt)$$

Koska $\mathbf{1}(s < t) \geq 0$ ja Lebesguen mitta on σ-äärellinen, Fubini lause soveltuu. Vaihdamme integroinnin järjestyksen:

$$= \int_0^\infty \biggl(\int_0^\infty \mathbf{1}(s < t) P_X(dt) \biggr) ds = \int_0^\infty P_X\bigl((s, +\infty)\bigr) ds = \int_0^\infty P(X > s) ds$$

7.0.1 Osittaisintegroinnin kaava

Lause 7.0.2. *Olkoon $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei väheneviä ja oikealta jatkuvia funktioita. Silloin kun $a < b$,*

$$\int_a^b G(x) F(dx) = \int_a^b G(x-) F(dx) + \sum_{y \in (a,b]} \Delta G(y) \Delta F(y)$$
$$= F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x-) G(dx)$$

jossa integraalit ovat olemassa Riemann-Stieltjesin mielessä. Osittaisintegrointi kaava pätee myös kun $F(x) = F^+(x) - F^-(x),\ G(x) = G^+(x) - G^-(x)$, jossa $F^\pm, G^\pm$ ovat ei väheneviä ja oikealta jatkuvia.

Tod. Huomaamme ensin että

$$\int_a^b G(x)F(dx) = \int_{(a,b]} G(x)F(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(a,b]}(x)G(x)F(dx),$$

ja kun $x \geq a$,

$$G(x) = G(a) + \int_a^{\infty} \mathbf{1}(y \leq x)G(dy).$$

Tästä seuraa

$$\int_a^b G(x)F(dx) = \int_a^b \left\{ G(a) + \int_a^{\infty} \mathbf{1}(y \leq x)G(dy) \right\} F(dx) =$$

$$G(a)\big(F(b) - F(a)\big) + \int_a^b \left(\int_a^b \mathbf{1}(y \leq x)G(dy) \right) F(dx)$$

Koska mitat $F(dx)$ ja $G(dy)$ ovat äärelliisiä kompakteissa ja integrandi on ei-negatiivinen, Fubinin lause soveltuu:

$$= G(a)\big(F(b) - F(a)\big) + \int_a^b \left(\int_a^b \mathbf{1}(y \leq x)F(dx) \right) G(dy) =$$

$$G(a)\big(F(b) - F(a)\big) + \int_a^b \big(F(b) - F(y-)\big)G(dy) =$$

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(y-)G(dy).$$

Huomataan myös että voidaan kirjoittaa

$$\int_a^b G(x)F(dx) = \int_a^b G(x-)F(dx) + \sum_{y \in (a,b]} \Delta G(y) \Delta F(y)$$

koska ei-vähenevälla funktiolla on korkeintaan numeroituva määrä hyppyjä □

Luku 8

Tasainen integroituvuus ja $L^1(P)$-konvergenssi

Määritelmä 8.0.1. *Merkitään*

$L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{$ $\mathbb{R}$*-arvoiset satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruudessa* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\}$

jossa tarvittaessa identifioidaan X *ja* Y *kun* $X(\omega) = Y(\omega)$ P*-melkein varmasti.*

Kun $0 < p < \infty$*, määritellään*

$L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *jolla* $\| X \|_p < \infty\}$ *jossa* $\| X \|_p = \{E_P(|X|^p)\}^{1/p}$

Sanomme että $X_n \overset{L^p}{\to} X$ *suppenee* L^p*-normissa kun* $E_P(|X_n - X|^p) \to 0$ *kun* $n \to \infty$*. Määritellään myös olennainen (essential) supremum*

$$\| X \|_\infty = P\text{-esssup}\,\{|X(\omega)|\} := \inf\{y \in \mathbb{R} : |X(\omega)| \le y \ P\text{-melkein varmasti}\}$$
$$L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ jolla } \| X \|_\infty < \infty\}$$

eli satunnaismuuttuja $X(\omega) \in L^\infty(P)$ *jos ja vain jos on olemassa deterministinen* $K < \infty$ *jolla* $|X(\omega)| \le K$ P*-melkein varmasti, ja s.m. on olennaisesti rajoitettu* P*-todennäköisyyden suhteen.*

Osoitamme (myöhemmin) että $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *on Banachin avaruus (eli vektori avaruus jolla on täydellinen normi) kaikille* $0 < p \le +\infty$*,*

ja $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *on Hilbertin avaruus skalaaritulolla* $\langle X, Y \rangle := E_P(XY)$*.*

Teoreema 8.0.1. *Olkoon* $0 < p \leq \infty$, *ja* $\lim_{n\to\infty} \| X_n \|_p = 0$. *Seuraa että* $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Tod. Kun $0 < p < +\infty$, väite seuraa **Chebychevin epäyhtälöstä** : kun $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon^p P(|X_n| > \varepsilon) \leq E_P(|X_n|^p) \to 0 \text{ kun } n \to \infty \ .$$

Kun $p = +\infty$, $\forall K \in \mathbb{N}\ \exists \bar{n}$ jolla

$$P\big(\{\omega : |X_n(\omega)| \leq K^{-1}\}\big) = 1 \quad \text{ kun } n \geq \bar{n}$$

josta seuraa että

$$P\Bigg(\bigcap_K \bigcup_m \bigcap_{n>m} \{\omega : |X_n(\omega)| \leq K^{-1}\}\Bigg) = P\big(\{\omega : X_n(\omega) \to 0\}\big) = 1$$

siis $X_n \to 0$ P-melkein varmasti ja myös stokastisesti □

Lause 8.0.1. *Lebesgue dominoidun konvegenssin lause L^p avaruudessa.*

Olkoon $0 < p < \infty$, *ja* $\big(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\big)$, $X(\omega)$ *satunnaismuuttujat jolla*

1) $\quad X_n \xrightarrow{P} X \quad$ *stokastisesti*

2) $\quad Y(\omega) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \big\{ \ | X_n(\omega)| \ : \ n \in \mathbb{N} \big\} \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Silloin $X \in L^p(\Omega)$ *ja* $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Tod. On olemassa alijono $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jolla $\lim_{k\to\infty} X_{n_k}(\omega) = X(\omega)$ P-m.v.

Tästä seuraa $|X(\omega)| \leq Y(\omega)$ P-m.v. ja siksi $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Fubinin lauseesta

$$E_P\big(|X_n(\omega) - X(\omega)|^p\big) = \int_0^\infty P(|X_n - X|^p > t)dt \ .$$

Kolmion epäyhtälöstä seuraa

$$|X_n(\omega) - X(\omega)|^p \leq 2^p Y(\omega)^p \quad \text{ ja siksi } \quad P(|X_n - X|^t > t) \leq P(Y^p > t2^{-p})$$

jossa

$$\int_0^\infty P(2^p Y^p > t)dt = 2^p E_P\big(Y^p\big) < \infty$$

Määritellään funktioita

$$0 \leq f_n(t) := P(|X_n - X|^p > t) \leq g(t) := P\big(|Y|^p > t2^{-p}\big), \quad t \geq 0$$

Nämä funktiot ovat ei-kasvavia ja siksi mitallisia t:n suhteen. Jokaiselle $t > 0$

$$f_n(t) = P(|X_n - X|^p > t) \longrightarrow 0 \text{ kun } n \to \infty$$

koska $X_n \stackrel{P}{\to} X$ stokastisen konvergenssin mielessä. Koska yläraja $g(t)$ on integroituva Lebesgue mitan λ suhteen, Lebesguen dominoidun konvergenssin lause 4.1.2 astuu voimaan avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, ja saadaan

$$\lim_{n\to\infty} E_P\big(|X_n - X|^p\big) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)dt = \int_0^\infty \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\Big)dt = 0 \qquad \square$$

Huomautus: Koska

$$\begin{aligned}
&|E_P(X) - E_P(Y)| = |E_P(X - Y)| = |E_P((X - Y)^+) - E_P((X - Y)^-)\,| \\
&\leq E_P((X - Y)^+) + E_P((X - Y)^-) = E_P(|X - Y|)
\end{aligned}$$

kun $X_n \stackrel{L^1(P)}{\to} X$ seuraa $E_P(X_n) \to E_P(X)$.

Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen ehdot L^p-konvergenssille ovat riittäviä mutta ei välttämättömiä. Haluamme karakterisoida täydellisesti L^p-konvergenssia.

Käsittelemme ensin L^1-konvergenssia. Olemme huomanneet (4.1.1) että ehdoista $X_n(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti ja $X, X_n \in L^1(P)$ ei seuraa että $E(X_n) \to E(X)$, eikä myöskään $X_n \stackrel{L^1}{\to} X$. Siihen tarvitaan sen lisäksi seuraava kompaktisuuden kaltainen ehto:

Määritelmä 8.0.2. *Satunnaismuuttujen kokoelma $\mathcal{C} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on* **tasaisesti integroituva** *P:n suhteen, kun*

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{C}} E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X| > K)\big) = \lim_{K\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{C}} \int_{\{\omega:|X(\omega)|>K\}} |X(\omega)|P(d\omega) = 0$$

Lemma 8.0.1.

1. *Olkoon $\mathcal{C}$ satunnaismuuttujen perhe. Jos perheelle on olemassa integroituva yläraja, eli*

$$\sup_{X\in\mathcal{C}} |X(\omega)| \ \le Y(\omega) \ P \text{ melkein varmasti, jossa } Y \in L^1(P)$$

perhe on tasaisesti integroituva.

2. *Äärellinen satunnaismuuttujen joukko $\mathcal{C} = \{X_1, X_2, \dots, X_M\} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P), M \in \mathbb{N}$ on tasaisesti integroituva.*

Tod. Kun

$$\sup_{X\in\mathcal{C}} |X(\omega)| \ \le Y(\omega) \in L^1(P)$$

seuraa $\forall X \in \mathcal{C}$

$$|X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega)| > K) \le |Y(\omega)|\mathbf{1}(|Y(\omega)| > K)$$

josta seuraa

$$\sup_{X\in\mathcal{C}} E_P\Big(|X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega)| > K)\Big) \le E_P\Big(|Y(\omega)|\mathbf{1}(|Y(\omega)| > K)\Big) \downarrow 0 \text{ kun } K \uparrow \infty$$

Erityisesti kun $\mathcal{C} = \{ X_1, \dots, X_n\} \subset L^1(P)$ on äärellinen joukko, se on tasaisesti integroituva koska löytyy integroituva yläraja:

$$|X_i(\omega)| \le Y(\omega) := |X_1(\omega)| + \dots + |X_n(\omega)| \in L^1 \qquad \square$$

Huomautus: Kun $\mathcal{C}$ on ylinumeroituva, kuvaus

$$|X|^*(\omega) := \sup_{X\in\mathcal{C}}\big\{|X(\omega)|\big\}\ , \quad \omega \in \Omega$$

ei ole välttämättä satunnaismuuttuja, ja siksi joukko

$$A := \Big\{ \omega : \sup_{X\in\mathcal{C}} |X(\omega)| \le Y(\omega)\Big\} = \bigcup_{X\in\mathcal{C}} \Big\{ \omega : |X(\omega)| \le Y(\omega)\Big\}$$

ei ole välttämättä $\mathcal{F}$-mitallinen. Silti voidaan sanoa että $P(A) = 1$ jos on olemassa B jolla $P(B) = 1$ ja $A \subseteq B \in \mathcal{F}$. Silloin $A \in \mathcal{F}^P := \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P)$ σ-algebraan joka on täydennetty P-nolla mittaisilla joukoilla.

Lause 8.0.2. *(Tasaisen integroituvuuden karakterisaatio) $\mathcal{C} \subseteq L^1(P)$ on tasaisesti integroituva jos ja vain jos*

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E_P(|X|) < \infty \quad \textit{ja} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta : P(A) < \delta \implies \sup_{X \in \mathcal{C}} E_P\big(|X| \mathbf{1}_A\big) < \varepsilon$$

Tod. Olkoon $\mathcal{C} \subseteq L^1(P)$ on tasaisesti integroituva.

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E(|X|\,) \le M + \sup_{X \in \mathcal{C}} E_P\Bigg(|X| \mathbf{1}(|X| > M) \Bigg) < \infty$$

Tehdään vastaoletus: on olemassa tapahtumien jono $(A_k : k \in \mathbb{N})$ ja $\varepsilon > 0$ jolla $P(A_k) \le 1/k$ ja

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E_P\big(|X| \mathbf{1}_{A_k}\big) \ge \varepsilon > 0$$

Koska

$$|X(\omega)| \mathbf{1}_{A_k} \le M \mathbf{1}_{A_k}(\omega) + |X(\omega)| \mathbf{1}(|X(\omega)| > M) \;\; \forall M \in \mathbb{N},$$

seuraa

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon \le \sup_{X \in \mathcal{C}} E\big(|X| \mathbf{1}_{A_k}\big) \le MP(A_k) + \sup_{X \in \mathcal{C}} E_P\big(|X| \mathbf{1}(|X| > M)\big) \\ \le MP(A_k) + \varepsilon/3 \le \varepsilon 2/3 \end{aligned}$$

kun valitaan M on tarpeeksi suureksi, ja $k \ge 3M/\varepsilon$.

Toisinpäin, jos

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E_P\big(|X|\big) = M < \infty,$$

Chebychevin epäyhtälön avulla seuraa $\forall X \in \mathcal{C}, k \in \mathbb{N}$

$$P(|X| > k) \le M/k$$

Oletuksen mukaan $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa δ jolla

$$E_P\big(|X| \mathbf{1}_A\big) < \varepsilon, \quad \forall X \in \mathcal{C}, \quad \forall A \text{ jolla } P(A) < \delta\ .$$

Kun $k \ge M/\delta$, seuraa $P(|X| > k) < \delta \;\; \forall X \in \mathcal{C}$, ja

$$E_P\big(|\widetilde{X}| \mathbf{1}(|X| > k)\big) < \varepsilon, \quad \forall \widetilde{X}, X \in \mathcal{C}$$

erityisesti

$$E_P\big(|X| \mathbf{1}(|X| > k)\big) < \varepsilon, \quad \forall X \in \mathcal{C} \qquad \square$$

Seuraus 8.0.1. *$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jos ja vain jos $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa δ, jolla kun $A \in \mathcal{F}$,*

$$P(A) < \delta \Longrightarrow E_P\big(|X|\mathbf{1}_A\big) < \varepsilon$$

Lemma 8.0.2. *Olkoon satunnaismuuttujen jonot $(X_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$ ja $(Y_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$ tasaisesti integroituvia.*

Silloin myös summien jono $(X_n + Y_n : n \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva.

Tod. Huomataan että $\forall K > 0$,

$$\begin{aligned}\big\{\omega : |X_n(\omega) + Y_n(\omega)| > K\big\} &\subseteq \big\{\omega : |X_n(\omega)| + |Y_n(\omega)| > K\big\} \\ &\subseteq \big\{\omega : |X_n(\omega)| > K/2\big\} \bigcup \big\{\omega : |Y_n(\omega)| > K/2\big\},\end{aligned}$$

Siksi

$$\begin{aligned}&E_P\Bigg(|X_n + Y_n|\ \mathbf{1}(|X_n + Y_n| > K)\Bigg) \le \\ &\le E_P\Bigg(|X_n + Y_n|\ \mathbf{1}(|X_n| > K/2)\Bigg) + E_P\Bigg(|X_n + Y_n|\mathbf{1}(|Y_n| > K/2)\Bigg) \\ &\le E_P\Bigg(|X_n|\mathbf{1}(|X_n| > K/2)\Bigg) + E_P\Bigg(|X_n|\mathbf{1}(|X_n| > K/2)\Bigg) \\ &+ E_P\Bigg(|X_n|\mathbf{1}(|Y_n| > K/2)\Bigg) + E_P\Bigg(|Y_n|\mathbf{1}(|X_n| > K/2)\Bigg)\end{aligned}$$

Koska satunnaismuuttujen jonot (X_n) ja (Y_n) ovat tasaisesti integroituvia, väite seuraa kun osoitamme

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} E_P\Bigg(|X_n|\mathbf{1}(|Y_n| > K/2)\Bigg) = 0 \tag{8.0.1}$$

Koska (X_n) on tasaisesti integroituva, tasaisen integroituvuuden karakterisaatiosta (8.0.2) seuraa että $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa δ jolla

$$P(A) < \delta \implies \sup_n E_P\big(|X_n|\mathbf{1}_A\big) < \varepsilon$$

Koska (Y_n) on tasaisesti integroituva, on olemassa K jolla

$$\sup_n P\big(|\,Y_n| > K/2\big) \le \frac{2}{K} \sup_n E_P\Bigg(|Y_n|\mathbf{1}(|Y_n| > K/2)\Bigg) < \delta$$

josta seuraa väite 8.0.1 $\square$

Teoreema 8.0.2. *($L^1(P)$-konvergenssin karakterisaatio) Olkoon satunnaismyuuttujat $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P),\ n \in \mathbb{N}$ ja $X \in L^0(\Omega, \mathcal{F})$. Silloin*

1. *$X_n \stackrel{P}{\to} X$ ja satunnaismuuttujen jono $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ on tasaisesti integroituva,*

   jos ja vain jos

2. *$X_n \stackrel{L^1}{\to} X \in L^1(P)$, eli*

Tod. Kun $X_n \stackrel{P}{\to} X$ lauseesta (6.0.1) seuraa että on olemassa deterministinen indeksien alijono $n(k)$ jolle $X_{n(k)}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti.

Soveltamaalla Fatoun lemmaa (4.1.4)

$$E_P(|X|) = E_P(\liminf_k |X_{n(k)}|) \le \liminf_k E_P(|X_{n(k)}|) < \infty$$

jossa tasaisen integroituvuuden oletuksesta

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} E_P\big(|X_{n(k)}|\big) \le M + \sup_{k\in\mathbb{N}} E_P\bigg(|X_{n(k)}|\mathbf{1}(|X_{n(k)}| > M)\bigg) < \infty$$

Siis on osoitettu että $X \in L^1(P)$. Kun $K > 0$

$$E_P\big(|X_n - X|\big) = E_P\bigg(|X_n - X|\mathbf{1}(|X_n - X| \le K)\bigg) + E_P\bigg(|X_n - X|\mathbf{1}(|X_n - X| > K)\bigg)$$
$$= \int_0^K P(|X_n - X| > t)dt - KP(|X_n - X| > K) + E_P\bigg(|X_n - X|\mathbf{1}(|X_n - X| > K)\bigg)$$
$$\le \int_0^K P(|X_n - X| > t)dt + E_P\bigg(|X_n - X|\mathbf{1}(|X_n - X| > K)\bigg)$$

Koska jono $(X_n : n \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva ja $X \in L^1(P)$, lemmasta (8.0.2) seuraa että jono $(| X_n - X| \ : n \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva, eli $\forall \varepsilon$ $\exists K$ jolla

$$\sup_n E_P\bigg(| X_n - X|\mathbf{1}(|X_n - X| > K)\bigg) < \varepsilon$$

Koska $P(|X_n - X| > t)$ on rajoitettu, ja oletetusti $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > t) = 0$ $\forall t > 0$, Lebesgue dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^K P(|X_n - X| > t)dt = 0$$

eli on olemassa N jolla $\forall n \geq N$

$$\int_0^K P(|X_n - X| > t)dt < \varepsilon$$

josta seuraa $\forall n \geq N$

$$E_P\big(|X_n - X|\big) \leq \int_0^K P(|X_n - X| > t)dt + \sup_n E_P\Big(|X_n - X|\mathbf{1}(|X_n - X| > K)\Big) \leq 2\varepsilon \ .$$

Toisinpäin, (kts. lause 8.0.1)

$$E_P(|X_n - X|) \to 0 \quad \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X \ .$$

Koska $X_n = X + (X_n - X)$, jossa oletetusti $X \in L^1(P)$, lemman (8.0.2) nojalla meidän riittää todistaa että satunnaismuuttujen kokoelma

$$\big\{ \, |X_n - X| : n \in \mathbb{N} \big\}$$

on tasaisesti integroituva. Voidaan olettaa samantien $X = 0$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja N jolla $\forall n > N$

$$E_P\big(|X_n|\big) < \varepsilon$$

Koska $\{ \, X_1, \dots, X_N\} \subset L^1(P)$ on äärellinen joukko, se on tasaisesti integroituva, ja on olemassa K jolla

$$\sup_{1 \leq n \leq N} E_P\big(|X_n|\mathbf{1}(|X_n > K|)\big) < \varepsilon$$

Mutta samalle K pätee myös $\forall n \geq N$

$$E_P\big(|X_n|\mathbf{1}(|X_n| > K)\big) \leq E_P(|X_n|) < \varepsilon$$

ja siksi

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} E_P\big(|X_n|\mathbf{1}(|X_n > K|)\big) < \varepsilon \qquad \square$$

Voidaan osoittaa että tasainen integroituvuus vastaa kompaktisuuden ehtoa $L^1(P)$ avaruudessa varustettuna heikolla topologialla. Tämä ei päde vahvemmalle $L^1(P)$-normin topologialle.

Teoreema 8.0.3. *(Dunford-Pettisin lause) Satunnaismuuttujen joukko* $\mathcal{C} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *on tasaisesti integroituva* P*-mitan suhteen jos ja vain jos on esi-kompakti (precompact)* $L^1(P)$ *avaruuden heikossa topologiassa: kaikille jonolle* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$ *on olemassa indeksien jono* $\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$ *ja s.m.* $X \in L^1(P)$ *joilla*

$$\lim_{k\to\infty} E_P\big((X_{n(k)} - X)\mathbf{1}_A\big) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Huomautus 8.0.1. *Tästä ei seura alijonon vahvempi* L^1*-konvergenssi*

$$E_P(|X_{n(k)} - X|) \to 0 \;.$$

Esimerkki 8.0.1. *Olkoon* $G(\omega)$ *standardi gaussinen satunnaismuuttuja, jolla*

$$P(G \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-y^2/2)dy$$

Määritellään satunnaismuuttujen jono

$$Z_n(\omega) = \exp\big(\sqrt{n}G(\omega) - n/2\big) > 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Koska Gaussisen jakauman momentti-generoiva funktio on $E_P\big(\exp(tG)\big) = \exp(t^2/2)$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*, seuraa* $E_P(Z_n) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$*.*

Osoitan että $\lim_{n\to\infty} Z_n(\omega) = 0$ P*-melkein varmasti. Siitä seuraa että satunnaismuuttujen perhe* $(Z_n : n \in \mathbb{N}) \subset L^1(P)$ *ei ole tasaisesti integroituva, koska* $E_P(Z_n) = 1 \not\to 0$*.*

Chebychevin epäyhtälon avulla, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*,*

$$P(Z_n > \varepsilon) \le \varepsilon^{-\alpha} E_P(Z_n^\alpha) = \varepsilon^{-\alpha} E_P\bigg(\exp\big(\alpha\sqrt{n}G - \alpha n/2\big)\bigg) = \varepsilon^{-\alpha} \exp(-(1-\alpha)\alpha n/2)$$

kun $\alpha \in (0,1)$*,*

$$P(Z_n > K^{-1}) \le K^\alpha \beta^n$$

jossa $\beta = \exp((1-\alpha)\alpha/2) \in (0,1)$*.*

Koska geometrinen sarja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta^n = (1-\beta)^{-1} < \infty$ *suppenee, ensimmäisestä Borel Cantelli lemmasta (5.1.1) seuraa* $\forall K \in \mathbb{N}$

$$P\bigg(\limsup_n \{\, Z_n > K^{-1}\}\bigg) = 0$$

ja ottaamalla numeroituvan leikkauksen komplementtijoukoista

$$P\biggl(\bigcap_{K\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq m}\{\, Z_n \leq K^{-1}\}\biggr) = 1$$

eli $Z_n(\omega) \to 0$ *P-melkein varmasti* □

Huomautus 8.0.2. *Siis ääretönulotteisessa* $L^1(P)$ *avaruudessa rajoitettu joukko ei tarvitse olla tasaisesti integroituva, eli esi-kompakti heikon topologian suhteen. Funktionaali analyysin Banach-Alaoglun lause sanoo että suljettu yksikköpallo on kompakti niin sanotun heikko-tähti (weak star) topologian suheen.*

Huomautus 8.0.3. *Satunnaismuuttujen kokoelman tasainen integroituuvus koskee pelkästään satunaaismuuttujen jakaumat, niiden välinen riippuuvusrakenteella ei ole yhtään roolia.*

Teoreema 8.0.4. *(Leskelän ja Viholan tasaisen integroituvuuden karakterisaatio,2011) Satunnaismuuttujen kokoelma* $\mathcal{C}$ *on tasaisesti integroituva jos ja vain jos on olemassa* $0 \leq Y(\omega) \in L^1(P)$ *jolla* $\forall K > 0$

$$\sup_{X\in\mathcal{C}} E_P\biggl((|X| - K)^+\biggr) \leq E_P\biggl((Y - K)^+\biggr)$$

jossa $x^+ = x \vee 0 = x\mathbf{1}(x > 0)$.

Tod. (Todistamme nyt $\Longleftarrow$ implikaation, todistamme $\Longrightarrow$ myöhemmin, kun konveksisuuden määritelmät ovat käytössä).

Käytämme epäyhtälöä

$$x\mathbf{1}(x > K) \leq 2\bigl(x - K/2\bigr)^+, \qquad K \geq 0$$

Seuraa

$$\sup_{X\in\mathcal{C}} E_P\bigl(|X|\mathbf{1}(|X| > K)\bigr) \leq 2\sup_{X\in\mathcal{C}} E_P\bigl((|X| - K/2)^+\bigr) \leq 2E_P\bigl((Y - K/2)^+\bigr) \to 0$$

kun $K \to \infty$, jossa dominoidun konvergenssi lauseen oletukset ovat voimassa:

$Y(\omega) \geq (Y(\omega) - K/2)^+ \geq 0$ jossa $(Y(\omega) - K/2)^+ \to 0$ P-melkein varmasti kun $K \to \infty$, ja yläraja $Y(\omega)$ on integroituva □

Huomautus 8.0.4. *Kun satunnaismuuttujan $Y(\omega) \geq 0$ tulkitaan osakkeen markkinaarvoksi ja $K > 0$ on deterministinen, satunnaismuuttuja $(Y(\omega) - K)^+$ kutsutaan europpalaiseksi osto-optioksi lunastushinnalla K. Option haltijalla on oikeus mutta ei velvollisuutta ostaa yhden osakkeen ennalta sovitulla hinnalla K. Option haltijan kannattaa käyttää optionsa kun osakkeen markkinahinta on suurempi kun ennalta sovittu lunastushinta, saadakseen voittonsa $(Y(\omega) - K)^+$. Kun markkinhinta on pienempi tai yhtä kuin lunastushinta, optio on arvoton.*

8.0.1 Sovellus: odotusarvon derivointi parametrin suhteen

Lemma 8.0.3. *Olkoon $X_i : (\Omega_i, \mathcal{F}_i) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $i = 1, 2$ reaaliarvoisia satunnaismuuttujia eri todennäköisyysavaruuksissa. Silloin tulo $X(\omega_1, \omega_2) = X_1(\omega_1)X_2(\omega_2)$ on satunnaismuttuja tuloavaruudessa $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$.*

Tod. Olkoon $X_i(\omega_i) \geq 0 \ \forall \omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2$
(yleisemmin voidaan ensin hajottaa $X_i = (X_i^+ - X_i^-)$). Kun $t \geq 0$

$$\big\{(\omega_1, \omega_2) : \ X_1(\omega_1)X_2(\omega_2) \leq t\big\} =$$
$$\bigcup_{0<q\in\mathbb{Q}} \left(\left\{ \omega_1 : \ X_1(\omega_1) \leq \frac{t}{q} \right\} \cap \left\{ \omega_2 : \ X_2(\omega_2) \leq q \right\} \right) \in (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \quad ,$$

ja Dynkinin lemmasta (1.1.3) seuraa

$$\big\{(\omega_1, \omega_2) : \ X_1(\omega_1)X_2(\omega_2) \in B\big\} \in (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \square$$

Lause 8.0.3. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus jossa*

$$\{Y(t, \omega) : t \in [a, b]\} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

on tasaisesti integroituva satunnaismuuttujen joukko, $a < b \in \mathbb{R}$. Oletamme sen lisäksi

- *Kaikille $\omega \in \Omega$, kuvaus $t \mapsto Y(t, \omega)$ on jatkuva.*
- *Kaikille $t \in [a, b]$ kuvaus $\omega \mapsto Y(t, \omega)$ on $\mathcal{F}$-mitallinen.*

Tästä seuraa

1. *kuvaus* $(t,\omega)\mapsto Y(t,\omega)$ *on* $(\mathcal{B}([a,b])\otimes\mathcal{F})\to\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mitallinen.*

2. *kuvaus* $t\mapsto E_P(Y(t))$ *on jatkuva.*

3. *Satunnaiskuvauksen*

$$X(t,\omega) := \int_a^t Y(s,\omega)ds,\ t\in[a,b].$$

odotusarvo $E_P(X(t))$ *on derivoituva kaikissa* $t\in(a.b)$*, jatkuvalla derivaatalla*

$$\frac{d}{dt}E_P\big(X(t)\big) = E_P\big(Y(t)\big) = E_P\left(\frac{d}{dt}X(t)\right)$$

Tod. Määritellään tuloavaruudessa $[a,b]\times\Omega$ satunnaismuuttujen jono

$$Y^{(N)}(t,\omega) = \sum_{k=0}^{(N-1)} Y\left(a+(b-a)\frac{k}{N},\omega\right)\mathbf{1}\left(a+(b-a)\frac{k}{N} < t \le a+(b-a)\frac{(k+1)}{N}\right), \quad N\in$$

Lemma (8.0.3) nojalla seuraa $Y^{(N)}$ on $(\mathcal{B}([a,b])\otimes\mathcal{F})$-mitallinen, ja jatkuvuudesta seuraa

$$\lim_{N\uparrow\infty} Y^{(N)}(t,\omega) = Y(t,\omega) \quad \forall\omega\ ,$$

siksi $Y(t,\omega)$ on myös $(\mathcal{B}([a,b])\otimes\mathcal{F})$-mitallinen.

Koska $\lim\limits_{s\to t} Y_s(\omega) = Y_t(\omega)$ ja tasaisen integroituvuuden oletuksesta, seuraa

$$|E_P(Y_t)-E_P(Y_s)| \le E_P|Y_t-Y_s| \to 0 \quad \text{kun } s\to t.$$

Koska $\{Y_t : t\in[a,b]\}$ on tasaisesti integroituva (koska löytyy integroituva yläraja). Siitä seuraa

$$\sup_{t\in[a,b]} E_P\big(|Y_t|\big) < \infty$$

ja siksi $|Y(t,\omega)| \in L^1\big([a,b]\times\Omega,\mathcal{B}([a,b])\otimes\mathcal{F}, dt\otimes P(d\omega)\big)$. Fubinin lause soveltuu

$$E_P(X_t) = E_P\left(\int_a^t Y(s)ds\right) = \int_{[a,b]\times\Omega} Y(s,\omega)\big(P(d\omega)\otimes ds\big) = \int_a^t E_P(Y(s))ds$$

ja koska kuvaus $t \mapsto E_P(Y(t))$ on jatkuva, analyysin keskiarvon lauseesta

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1} \big\{ E_P(X_{t+\Delta}) - E_P(X_t) \big\}$$
$$= \lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1} \int_t^{t+\Delta} E_P(Y(s))ds = E_P(Y(t)) \quad \square$$

Esimerkki 8.0.2. *Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) \in \mathbb{R}$, ja $a < 0 < b$ jolla*

$$m_X(t) := E_P(\exp(tX)) < \infty, \quad \forall t \in [a, b].$$

Olkoon $a < -\varepsilon < 0 < \varepsilon < b$, ja x' yhtälön $x'/\log(x') = (b - \varepsilon)$ ratkaisu. Koska $x \exp(\varepsilon x) \leq \exp(bx)$ kun $x \geq x'$, seuraa

$$E_P(X^+ \exp(\varepsilon X)) \leq x' \exp(\varepsilon x') + E_P(\exp(bX)) < \infty$$

Vastaavasti, kun $x''/\log(x'') = -(a + \varepsilon)$, koska $x \exp(\varepsilon x) \leq \exp(-ax)$ kun $x \geq x''$, seuraa

$$E_P(X^- \exp(-\varepsilon X)) \leq x'' \exp(\varepsilon x'') + E_P(\exp(-aX)) < +\infty \, .$$

Tästä seuraa

$$|X(\omega)| \exp(tX(\omega)) \leq |X(\omega)| \Big\{ \exp(\varepsilon X(\omega)) + \exp(-\varepsilon X(\omega)) \Big\} \in L^1(P) \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

ja kokoelma

$$\Big\{ X(\omega) \exp(tX(\omega)) : \ t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \Big\} \subseteq L^1(P)$$

on tasaisesti integroituva ,

$$\frac{d}{dt} m_X(t) = E_P\bigg(\frac{d}{dt} \exp(tX) \bigg) = E_P\big(X \exp(tX) \big) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Eritysesti pisteessä $t = 0$

$$\frac{d}{dt} m_X(0) = E_P(X) \, .$$

Koska eskponentiaali funktio kasvaa polynoomien nopeammin, $\forall n \in \mathbb{N}$*, samoin seuraa satunnaismuuttujien joukon*

$$\Big\{ X^n(\omega) \exp(tX(\omega)) :\ t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \Big\} \subseteq L^1(P)$$

tasainen integroituvuus, ja

$$\frac{d^n}{dt^n} m_X(t) = E_P\bigg(\frac{d^n}{dt^n} \exp(tX) \bigg) = E_P\big(X^n \exp(tX) \big), \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Eritysesti pisteessä $t = 0$

$$\frac{d^n m_X}{dt^n}(0) = E_P\big(X^n\big) \ .$$

Kuvaus $m_X(t) = E_P\big(\exp(tX)\big)$ *kutsutaan momentti-generoivaksi funktioksi.*

Esimerkki 8.0.3. *(Esscherin muunnos)*

Olkoon $\Theta = \{ m_X(t) = E_P(\exp(tX)) < \infty \}$*. Kun* $t \in \Theta$ *määritellään mitanvaihtokaavan kautta todennäköisyysmitta*

$$P^{(t)}(A) = \frac{E_P\big(\exp(tX) \mathbf{1}_A\big)}{m_X(t)}, \quad \forall A \in \mathcal{F} \ .$$

Kun on olemassa $\varepsilon > 0$ *jolle* $[t - \varepsilon, t + \varepsilon] \subseteq \Theta$*, seuraa*

$$E_{P^{(t)}}(X^n) = \frac{E_P\big(X^n \exp(tX)\big)}{m_X(t)} = \frac{1}{m_X(t)} \frac{d^n m_X}{dx^n}(t), \ \textit{erityisesti}$$
$$E_{P^{(t)}}(X) = \frac{d}{dt} \log(m_X(t))$$

Tod. Kuten tapauksessa $t = 0$.

Luku 9

$L^p(\Omega)$ avaruudet

9.0.1 Epäyhtälöt

Määritelmä 9.0.1. *Olkoon V vektoriavaruus, esimerkiksi $V = \mathbb{R}^d$. Kuvaus $g : V \to \mathbb{R} \cup \{ +\infty\}$ on konveksi kun*

$$g\big(px + (1-p)y\big) \quad \leq \quad pg(x) + (1-p)g(y) \quad \forall x, y \in V,\ p \in [0,1]$$

Lause 9.0.1. *Kuvaus $g : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jos ja vain jos*

$$\textit{epi}(g) = \big\{ (x,r) \in V \times \mathbb{R} : r \geq g(x)\big\}$$

on konveksi joukko, eli kun (x,r) ja $(x',r') \in$ epi(g), myös pisteiden konveksikombinaatiolle pätee

$$(x,r)p + (x',r')(1-p) = \big(xp + x'(1-p), rp + r'(1-p)\big) \in \textit{epi}(g), \quad \forall p \in [0,1]$$

Lause 9.0.2. *Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksi funktio. Silloin g on jatkuva, ja jokaisessa pisteessä on olemassa derivaatat oikealta ja vasemmalta*

$$\nabla g^-(t) = \lim_{r \uparrow t} \frac{g(r)-g(t)}{r-t} \leq \nabla g^+(t) = \lim_{r \downarrow t} \frac{g(r)-g(t)}{r-t}$$

ja $\nabla g^{\pm}(s) \leq \nabla g^{\pm}(t)$ kun $s \leq t$.

Tod. kun $t \leq s \leq r$,

$$\frac{g(s)-g(t)}{s-t} \leq \frac{g(r)-g(t)}{r-t}$$

koska kun $p = (r-s)/(r-t) \in [0,1]$, $s = pt + (1-p)r$, konveksisuudesta

$$g(s) - g(r) \le \big(g(t) - g(r)\big)\ p$$

Tästä seuraa että jokaiselle t, jono

$$(g(t+n^{-1}) - g(t))n \quad n \in \mathbb{N}$$

ei kasva ja siksi monotoninen raja on olemassa. Koska oikea ja vasen derivaatat $\nabla^{\pm} g(t)$ ovat olemassa, $g(t)$ on jatkuva jokaisessa $t \in \mathbb{R}$. Konveksisuudesta seuraa myös

$$\frac{g(s) - g(t)}{s-t} \le \frac{g(r) - g(s)}{r-s}$$

kun $t \le s \le r$, siksi $\nabla^+ g(t) \le \nabla^- g(r)$ kun $t < r$ $\square$

Huomautus 9.0.1. *Koska derivaatat ovat ei-väheneviä,*

1. *Joukko*

$$D := \Big\{ t : \ \nabla^+ g(t) > \nabla^- g(t) \ \Big\}$$

   on korkeintaan numeroituva.

2. *jokaiselle $t \in \mathbb{R}$, $\delta \in [\nabla^- g(t), \nabla^+ g(t)]$*

$$g(s) = g(t) + \int_t^s \nabla^{\pm} g(r) dr \ge g(t) + (s-t)\delta \qquad \forall s$$

   Seuraa myös että $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on konveksi jos ja vain jos on absoluuttisesti jatkuva Lebesgue mitan suhteen ja Radon-Nikodymin-derivaatta $\frac{dg}{dx}(x)$ on ei-vähenevä.

Lause 9.0.3. *(Jensenin epäyhtälö) Olkoon $X(\omega) \in \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja jolla $E_P(|X|) < \infty$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksikuvaus. Silloin*

$$g\big(E_P(X)\big) \quad \le \quad E_P\big(g(X)\big)$$

R. Koska g on konveksi, sen oikea ja vasen derivaatat pisteessa $\mu = E_P(X)$ ovat olemassa. Kaikille $\delta \in [\nabla^- g(\mu), \nabla^+ g(\mu)]$

$$g(X(\omega)) \geq g(E_P(X)) + \delta\big\{X(\omega) - E_P(X(\omega))\big\}$$

ja väite seuraa ottaamalla odotusarvon □

Huomautus Huomataan että Jensenin epäyhtälö on voimassa myös silloin kun integroidaan positiivisen mitan $\nu(dx)$ suhteen vaikka olisi $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$. Siis kun g on konveksi,

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\nu(dx) < \infty \Longrightarrow g\bigg(\int_{\mathbb{R}} x\nu(dx)\bigg) \leq \int_{\mathbb{R}} g(x)\nu(dx)$$

mutta on mahdollista että

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\nu(dx) = \infty \text{ ja } \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\nu(dx) < \infty$$

Lemma 9.0.1. *Kun* $1 \leq p < r$, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \supseteq L^r(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Tod. Olkoon $X \in L^r(P)$.

Kun $r = \infty$, $|X(\omega)|^p \leq \| X \|_\infty^p$ P-melkein varmasti ja väite seuraa.

Kun $r < \infty$, olkoon

$$Y_n(\omega) = n \wedge |X(\omega)|^p \in L^{r/p}(P) \ .$$

Koska $0 \leq Y_n(\omega) \leq n$ seuraa $Y_n(\omega) \in L^1(P)$.

Kuvaus $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ jolla $x \mapsto g(x) = x^{r/p}$ on konveksi. Jensenin epäyhtälöstä seuraa:

$$E_P(Y_n^{r/p}) \geq E_P(Y_n)^{r/p}$$

Monotonisen konvergenssi lauseesta, koska $0 \leq Y_n(\omega) \uparrow |X(\omega)|^p \; \forall \omega$ seuraa

$$E_P(|X|^r) \geq E_P(|X|^p)^{r/p}.$$

Emme olisi voineet soveltaa Jensenin epäyhtälöä suoraan satunnaismuuttujalle $|X(\omega)|^p$ koska apriori oli epäselvää kuuluuko $L^{r/p}(P)$ avaruuteen. Siksi käytettiin kätkettyä muuttuja $\{Y_n\}$ □

Huomautus 9.0.2. *Tässä on olennaista että P on todennäköisyysmitta tai äärellinen mitta, koska silloin kun $\nu(\Omega) = \infty$ $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \nu) \not\subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$, ja pelkästään kätkäisemällä ei saadan integroituvia satunnaismuuttujia.*

Väite ei päde $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ avaruuksille silloin kun $\nu(\Omega) = \infty$.

Kun $\nu(\Omega) < \infty$ määritellään $P(A) = \nu(A)/\nu(\Omega)$ josta seuraa

$$\left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^p \nu(d\omega) \right\}^{1/p} \leq \nu(\Omega)^{(r-p)/(rp)} \left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^r \nu(d\omega) \right\}^{1/r}$$

siis $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu) \supseteq L^r(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ myös tässä tapauksessa. Tämä epäyhtälö ei kerro meille mitään kun $\nu(\Omega) = \infty$.

Lause 9.0.4. *(Cauchy Schwartzin epäyhtälö , $p = 2$)*

Olkoon $X(\omega), Y(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ silloin

1. *tulo $(X(\omega)Y(\omega)) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja*

$$\| XY \|_1 = E_P(|XY|) \leq \sqrt{E_P(X^2)}\sqrt{E_P(Y^2)} = \| X \|_2 \| Y \|_2$$

jossa yhtäsuuruisuus on voimassa jos ja vain jos $Y(\omega) = cX(\omega)$ P m.v. jollekin $c \in \mathbb{R}$. Kun $E_P(XY) = 0$ sanomme että satunnaismuuttujat ovat ortogonaaliisia.

2. *Kolmion epäyhtälö on voimassa:*

$$\| X + Y \|_2 \leq \| X \|_2 + \| Y \|_2$$

1. Tod. Olkoon

$$X_n(\omega) = n \wedge |X(\omega)|, \quad Y_n(\omega) = n \wedge |Y(\omega)|$$

koska $0 \leq X_n(\omega), Y_n(\omega) \leq n \, \forall \omega$, seuraa $(X_n(\omega)Y_n(\omega)) \in L^1(P)$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \Big(tX_n(\omega) + Y_n(\omega) \Big)^2 = t^2 X_n(\omega)^2 + Y_n(\omega)^2 + 2tX_n(\omega)Y_n(\omega)$$

Ottaamalla odotusarvoa (joka on olemassa ainakin katkaistetuille satunnaismuuttujille), seuraa että toisen asteen yhtälöllä

$$t^2 E_P(X_n)^2 + 2tE_P(X_nY_n) + E(Y_n^2) = 0$$

on korkeintaan yksi reaaliratkaisu, josta seuraa

$$E_P(X_n Y_n)^2 - E(X_n^2)E(Y_n^2) \le 0$$

Koska

$$0 \le |X_n(\omega)Y_n(\omega)| \uparrow |X(\omega)Y(\omega)| \quad \forall\omega$$

seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta

$$E_P(|XY|)^2 - E(X^2)E(Y^2) \le 0$$

2. Tod.

$$\begin{aligned} &E_P((X+Y)^2) = E_P(X^2) + E_P(Y^2) + 2E_P(XY) \\ &\le E_P(X^2) + E_P(Y^2) + 2E_P(|XY|) \\ &\le E_P(X^2) + E_P(Y^2) + 2\sqrt{E_P(X^2)}\sqrt{E_P(Y^2)} = \left\{ \sqrt{E_P(X^2)} + \sqrt{E_P(Y^2)} \right\}^2 \end{aligned} \qquad \square$$

Lause 9.0.5. *Seuraavat identiteettit ovat voimassa $L^2(P)$ avaruudessa:*

1. *Kun $X, Y \in L^2(P)$,* $\quad \| X+Y \|_2^2 + \| X-Y \|_2^2 = 2 \| X \|_2^2 + 2 \| Y \|_2^2$ *(Suunnikkaan identiteetti)*

2. $E_P(XY) = \frac{1}{4}\big(\| X+Y \|_2^2 - \| X-Y \|_2^2\big)$ *(Polarisaation identiteetti)*

Todistus: harjoitustehtävä.

Huomautus Voidaan myös osoittaa että kun normi $\| x \|$ toteuttaa suunnikkaan identiteetti, on olemassa skalaari tulo (x, y) jolla $\| x \|^2 = (x, x)$.

Jensenin epäyhtälön avulla Cauchy-Schwarz epäyhtälö yleistyy $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ avaruuksiin, jossa $1 < p < \infty$ ja μ on yleinen positiivinen mitta.

Huomataan myös että kun $X \in L^1(\mu), Y \in L^\infty(\mu)$, koska

$$|X(\omega)Y(\omega)| \le |X(\omega)| \, \| Y \|_\infty$$

seuraa suoraan että tulo $(XY) \in L^1(\mu)$.

Lause 9.0.6. *Olkoon* $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *ja* $Y \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \le p <= \infty$ *jossa* $q = p/(p-1)$ *on konjugattieksponentti joka toteuttaa* $(q^{-1} + p^{-1}) = 1$. *Silloin*

$$\int_\Omega |X(\omega)Y(\omega)|\mu(d\omega) \le \left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^p \mu(d\omega) \right\}^{1/p} \left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^q \mu(d\omega) \right\}^{1/q}$$
$$= \| X \|_{L^p(\mu)} \| Y \|_{L^p(\mu)}$$

(Hölderin epäyhtälö).

Kun $X, Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \le p \le \infty$

$$\| X + Y \|_{L^p(\mu)} \le \| X \|_{L^p(\mu)} + \| Y \|_{L^p(\mu)}$$

(Minkowskin epäyhtälö).

Tod. (Hölder) Olkoon $1 < p < \infty$. Tietenkin voidaan olettaa $X(\omega) \ge 0$ $Y(\omega) \ge 0$ ja $E_P(|X|^p) > 0$, muuten $X(\omega) = 0$ P-m.v. ja epäyhtälö seuraa.

Määritellään satunnaismuuttuja

$$\widetilde{Y}(\omega) := \frac{Y(\omega)}{X(\omega)^{p-1}} \mathbf{1}(X(\omega) > 0) \ge 0$$

ja todennäköisyysmitta

$$\widetilde{P}(d\omega) = \frac{X(\omega)^p}{\| X \|^p_{L^p(\mu)}} \mu(d\omega)$$

Jensenin epäyhtälöstä

$$\left\{ E_{\widetilde{P}}(\widetilde{Y}) \right\}^q \le E_{\widetilde{P}}(\widetilde{Y}^q)$$

kaikille $q \ge 1$ erityisesti kun $q = p/(p-1)$

$$\left\{ \int_\Omega \frac{Y(\omega)}{X(\omega)^{p-1}} \mathbf{1}(X(\omega) > 0) \frac{X(\omega)^p}{\| X \|^p_{L^p(\mu)}} \mu(d\omega) \right\}^q$$
$$\le \int_\Omega \left\{ \frac{Y(\omega)}{X(\omega)^{p-1}} \mathbf{1}(X(\omega) > 0) \right\}^q \frac{X(\omega)^p}{\| X \|^p_{L^p(\mu)}} \mu(d\omega) \iff$$
$$\| X \|^{-pq}_{L^p(\mu)} \left\{ \int_\Omega Y(\omega) X(\omega) \mu(d\omega) \right\}^q \le \| X \|^{-p}_{L^p(\mu)} \int_\Omega Y(\omega)^q X(\omega)^{(q(p-1)-p)} \mu(d\omega)$$

jossa $q(p-1)-p=0$. Seuraa

$$\int_\Omega Y(\omega)X(\omega)\mu(d\omega) \le \left\{\int_\Omega Y(\omega)^q \mu(d\omega)\right\}^{1/q} \parallel X \parallel_{L^p(\mu)}^{(1-1/q)p}$$

jossa $(1-1/q)p = 1$.

Tod. (Minkowski) Huomataan ensin että $\forall x, y \ge 0$,

$$(x+y)^p \le \big(2\max(x,y)\big)^p \le 2^p(x^p+y^p),$$

siksi kun $X, Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, myös $(X+Y) \in L^p(\mu)$. Seuraa Hölderin epäyhtälöstä

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |X+Y|^p d\mu \le \int_\Omega |X||X+Y|^{p-1}d\mu + \int_\Omega |Y||X+Y|^{p-1}d\mu \\ &\le \big(\parallel X \parallel_{L^p(\mu)} + \parallel Y \parallel_{L^p(\mu)}\big) \parallel |X+Y|^{p-1} \parallel_{L^q(\mu)} \\ &= \big(\parallel X \parallel_{L^p(\mu)} + \parallel Y \parallel_{L^p(\mu)}\big) (\parallel X+Y \parallel_{L^p(\mu)})^{p/q} \end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\parallel X+Y \parallel_{L^p(\mu)}^{(1-1/q)p} \quad \le \quad \parallel X \parallel_{L^p(\mu)} + \parallel Y \parallel_{L^p(\mu)}$$

jossa $(1-1/q)p = 1$ $\square$

Lause 9.0.7. *$\forall 1 \le p \le \infty$, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on* **täydellinen** *:*

jos $\{X_n(\omega)\} \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on Cauchy jono,
eli $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ jolle $\parallel X_n - X_m \parallel_{L^p(P)} < \varepsilon$ kun $n, m \ge N_\varepsilon$,
on olemassa $X_\infty(\omega) \in L^p(P)$ jolle $\lim_{n\uparrow\infty} \parallel X_n - X \parallel_{L^p(P)}$.
Tämä lause ja sen todistus pätevät myös silloin kun integroidaan positiivisen mitan $\mu(d\omega)$:n suhteen, jolla $\mu(\Omega) = +\infty$.

Tod. Tapaus jossa $p = \infty$ jää harjoitustehtäväksi.
Olkoon $p < \infty$ ja $\{X_n\} \subseteq L^p$ Cauchy jono. On olemassa jono (k_n) jolla

$$\parallel X_r - X_s \parallel_p \le 2^{-n} \quad \forall r, s \ge k_n$$

Koska jono $(X_n - X_{k_0} : n \geq k_0)$ on myös Cauchy jono, voidaan unohtaa jonon alkuosaa ja olettaa $X_0(\omega) = 0$ ja $k_0 = 0$. Saadaan teleskooppinen esitys

$$X_{k_n}(\omega) = \sum_{m=1}^{n} (X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)).$$

Jokaiselle $\omega \in \Omega$, rakennetaan monotoninen jono

$$Y_n(\omega) := \sum_{m=1}^{n} \big|X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)\big| \uparrow Y_\infty(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \big|X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)\big| \in [0,\infty]$$

Minkowskin epäyhtälöstä (9.0.1)

$$\| Y_n \|_{L^p} \leq \sum_{m=1}^{n} \| X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega) \|_{L^p}$$

ja monotonisen konvergenssin lauseesta

$$\| Y_\infty \|_{L^p} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \| X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega) \|_{L^p} \leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} = 2 < \infty$$

Tästä seuraa että P-melkein varmasti

$$Y_\infty(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \big|X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)\big| < \infty,$$

josta seuraa että P-melkein varmasti sarjan

$$X_\infty(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \big(X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)\big)$$

suppenee absoluttisesti. Jotta $X_\infty(\omega)$ olisi määritelty kaikille ω:lle, olkoon

$$X_\infty(\omega) := \limsup_{n\to\infty} X_{k_n}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

Seuraa että $X(\omega)$ on satunnaismuuttuja ja $X_{k_n}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti. Kun $r > k_n$ ja $\forall m > n$

$$\begin{aligned} &E_P(|X_r - X_{k_m}|^p) \leq 2^{-np} \qquad \Longrightarrow \\ &E_P(|X_r - X_\infty|^p) = E_P(\liminf_m |X_r - X_{k_m}|^p) \leq \liminf_m E_P(|X_r - X_{k_m}|^p) \leq 2^{-np} \end{aligned}$$

jossa käytettiin Fatoun lemma. Minkowskin epäyhtälöstä seuraa $X_\infty \in L^p$, ja $X_r \stackrel{L^p}{\to} X_\infty$ kun $r \to \infty$ $\square$

9.1 Projektio $L^2(P)$ avaruudessa

Lause 9.1.1. *Olkoon $H \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aliavaruus joka on* **suljettu**, *eli jos $\{X_n\} \subseteq H$ ja on olemassa $X \in L^2(P)$ jolla $\| X_n - X \|_{L^2(P)} \to 0$, siitä seuraa $X \in H$.*

Kaikille $X(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on olemassa ortogonaalinen projektio H-aliavaruuteen $Y(\omega) = (\Pi_H X)(\omega) \in H$ jolla

1. $E_P((X-Y)^2) = \Delta^2 := \inf_{W \in H} E_P((X-W)^2)$,

2. $E_P((X-Y)W) = 0, \forall\, W \in H$.

Projektio Y on P-melkein varmasti yksikäsitteinen.

Huomautus 9.1.1. *Muistetaan että Eukliidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^d$ on määritelty vektoreiden skalaari tulo*

$$\langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{\omega=1}^{d} X(\omega)Y(\omega) = d \cdot \sum_{\omega=1}^{d} X(\omega)Y(\omega)P(\{\omega\}) = E_P(XY)d$$

jossa $P(\omega) = 1/d$ on tasainen todennäköisyys äärellisessä avaruudessa $\Omega = \{1, \dots, d\}$. Sanomme että vektorit $X, Y \in \mathbb{R}^d$ ovat kohtisuoria (merkintä $X \perp_{\mathbb{R}^d} Y$), kun $\langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$. Tämä geometrinen käsite yleistyy varustamalla $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ skalaaritulolla

$$\langle X, Y \rangle_{L^2(P)} = E_P(XY) = \int_\Omega X(\omega)Y(\omega)P(d\omega)$$

ja tulkitaan satunnaismuuttuja $(X(\omega) : \omega \in \Omega)$ ääretönulotteisenä vektorina. Satunnais-muuttujat $X, Y \in L^2(P)$ ovat kohtisuoria (merkintä $X \perp_P Y$), kun $E_P(XY) = 0$.

Tod. Koska $0 \in H$, $\Delta^2 \le E_P(X^2) < \infty$,
ja on olemassa jono $(Y_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq H$ jolla $\| X - Y_n \|_2 \to \Delta$.
Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\bar{n}$ jolla kun $n \ge \bar{n}$

$$\Delta^2 \le E_P((X - Y_n)^2) < \Delta^2 + \varepsilon.$$

Kun sovelletaan suunnikkaan identiteetti vektoreille

$(Y_n - Y_m)/2$ ja $\big(X - (Y_n + Y_m)/2\big)$, seuraa

$2 \parallel (Y_m - Y_n)/2 \parallel_2^2 = \parallel X - Y_m \parallel_2^2 + \parallel X - Y_n \parallel_2^2 - 2 \parallel X - (Y_m + Y_n)/2 \parallel_2^2 .$

Koska $(Y_n + Y_m)/2 \in H$,

$$\parallel X - (Y_n + Y_m)/2 \parallel_2^2 \geq \Delta^2,$$

ja kun $n, m \geq \bar{n}$ seuraa

$$2 \parallel (Y_m - Y_n)/2 \parallel_2^2 \leq 2\varepsilon.$$

Siksi $(Y_n) \subseteq H$ on Cauchy jono $L^2(P)$:ssa, ja $L^2(P)$ täydellisuudesta seuraa että on olemassa $Y \in L^2(P)$ jolla $Y_n \overset{L^2}{\to} Y$, ja koska H on suljettu aliavaruus seuraa $Y \in H$. Kun $W \in H \setminus \{0\}$ ja $t \in \mathbb{R}$, $(Y + tW) \in H$, ja $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\parallel X - Y \parallel_2^2 \leq \parallel X - Y - tW \parallel_2^2 = \parallel X - Y \parallel_2^2 + t^2 \parallel W \parallel_2^2 - 2tE_P((X - Y)W) \\ &\iff t^2 \parallel W \parallel_2^2 \geq 2tE_P((X - Y)W) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

josta seuraa $E_P((X-Y)W) = 0$. Jos $\widetilde{Y}(\omega) \in H$ on myös projektio, ottamalla $W = (Y - \widetilde{Y}) \in H$,

$$0 = E_P(XW) - E_P(XW) = E_P(YW) - E_P(\widetilde{Y}W) = E_P((Y - \widetilde{Y})W) = E_P((Y - \widetilde{Y})^2)$$

josta seuraa $Y(\omega) = \widetilde{Y}(\omega)$ P-m.v. $\square$

Lemma 9.1.1. *L^2-projektio on lineaarinen operaattori: kun $X, Z \in L^2(P),\ a, b \in \mathbb{R}$ ja H on suljettu aliavaruus,*

$$\Pi_H(aX + bZ) = a\Pi_H X + b\Pi_H Z,$$

Todistus: harjoitustehtävä.

Esimerkki 9.1.1. *(Projektio satunnaismuuttujan virittämään lineaariseen aliavaruuteen): Olkoon olkoon $Y(\omega) \in L^2(P)$ jolla $E_P(Y^2) > 0$, ja*

$$H = \{\ aY(\omega) + b : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq L^2(P).$$

Koska

$$H = \{\ a(Y(\omega) - E(Y)) + b : a, b \in \mathbb{R}\}$$

$Y(\omega)$ ja $(Y(\omega) - E_P(Y))$ virittävät saman lineaarisen aliavaruuden. Siksi voidaan olettaa $E_P(Y) = 0$.

Osoitan että H on suljettu: olkoon $X_n(\omega) = (a_n Y(\omega) + b_n) \in H$ jossa $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$, jolla

$$E_P\big((X_n - X)^2\big) = E_P\big((a_n Y + b_n - X)^2\big) \longrightarrow 0$$

Silloin (X_n) on Cauchy jono $L^2(P)$:ssa, josta seuraa

$$E_P\big(Y^2\big)(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 \to 0$$

kun $n, m \to \infty$, ja koska $E_P(Y^2) > 0$, (a_n) ja (b_n) ovat Cauchy jonoja $\mathbb{R}$:ssa. Koska $\mathbb{R}$ on täydellinen, on olemassa $a, b \in \mathbb{R}$ jolla $a_n \to a$ ja $b_n \to b$. Tästä seuraa $(a_n Y + b_n) \to (aY + b)$ $L^2(P)$-normissa, ja $X(\omega) = (aY(\omega) + b)$ P-melkein varmasti, eli $X \in H$. Esitämme $X : n$ projektio aliavaruuteen H: mimoidaan yli $a, b \in \mathbb{R}$

$$E_P\left(\left\{ aY + b - X \right\}^2\right) = E(X^2) + a^2 E(Y^2) + b^2 + 2abE(Y) - 2aE(XY) - 2bE(X).$$

Koska oletetusti $E(Y) = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial a} E_P\left(\left\{ aY + b - X \right\}^2\right) = 2aE(Y^2) - 2E(XY)$$
$$\frac{\partial}{\partial b} E_P\left(\left\{aY + b - X\right\}^2\right) = 2b - 2E(X)$$

josta seuraa $b = E(X)$, $a = E(Y^2)/E(XY)$. Siis kun $E(Y) = 0$, X:n projektio Y:n virittämään aliavaruuteen H:n on

$$\Pi_H(X) = E_P(X) + \frac{E(XY)}{E(Y^2)} Y$$

Yleisemmin

$$\Pi_H(X) = E(X) + \frac{\mathit{Cov}(XY)}{\mathit{Var}(Y^2)}(Y - E(Y))$$

Luku 10

Ehdollinen odotusarvo

Olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali-σ-algebra.

Silloin $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P) \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\forall 0 \leq p \leq \infty$, ja kun $p > 0$, $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$ on suljettu aliavaruus.

Tod. Olkoon $\{ X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$ ja $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ joilla $E_P(| X_n - X|^p) \to 0$, Seuraa että $X \Longrightarrow X_n \stackrel{P}{\to} X$ ja on olemassa alijono jolla $\{n_k\} : X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$ P m.v. . Olkoon $\widetilde{X}(\omega) := \liminf_k X_{n_k}(\omega) \in L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Seuraa että $X_n \stackrel{L^P}{\to} \widetilde{X}$ ja siksi $X(\omega) = \widetilde{X}(\omega)$ P-m.v.

Kun $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja $H = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ seuraa projektio lauseesta (9.1.1) että on olemassa ortogonaalinen projektio

$$Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) := \big(\Pi_{L^2(\Omega,\mathcal{G},P)} X\big)(\omega)$$

joka kutsutaan *ehdolliseksi odotusarvoksi* jolla

- $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$
- $E_P(XW) = E_P(YW) \quad \forall W \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$

Lemma 10.0.1. *Ehdollinen odotusarvo on positiivinen operaattori:*

Olkoon $0 \leq X(\omega) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *ali-*σ*-algebra. Silloin*

$$Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \geq 0 \quad P\text{-m.v.}$$

Tod. Koska $L^\infty(P) \subseteq L^2(P)$ ehdollinen odotusarvo $Y(\omega)$ on olemassa L^2-projektiona. Olkoon $A = \{\omega : Y(\omega) < 0\} \in \mathcal{G}$. Koska $\mathbf{1}_A(\omega) \in L^\infty(P) \subseteq L^2(P)$,

$$0 \le E_P(X\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}(Y < 0)) = -E_P(Y^-) \le 0$$

ja väite seuraa.

Ehdollisen odotusarvon määritelmä laajennetaan $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avaruuteen:

Teoreema 10.0.1. *(Kolmogorovin määritelmä) Kun $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ on ali-σ-algebra, on olemassa ehdollinen odotusarvo $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ jolla $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ ja*

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Ehdollinen odotusarvo on P-m.v. yksikäsitteinen.

Tod. Voidaan olettaa että $X(\omega) \ge 0\ \forall\omega$, muuten käytämme ensin hajotelmaa $X(\omega) = X(\omega)^+ - X(\omega)^-$ ja sitten määrittelemme

$$E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) = E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X^-|\mathcal{G})(\omega)$$

Olkoon $0 \le X_n(\omega) = X(\omega) \wedge n \uparrow X(\omega)$ kun $n \uparrow \infty$. Koska $X_n \in L^\infty$ seuraa että $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja projektio lauseesta seuraa että on olemassa $Y_n \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ jolla

$$E_P(X_n\mathbf{1}_A) = E_P(Y_n\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Seuraa lemmasta (10.0.1) että $Y_n(\omega) \ge 0$ P-melkein varmasti.

Kun $n \ge m$ $(X_n(\omega) - X_m(\omega)) \ge 0$ josta seuraa

$$(Y_n(\omega) - Y_m(\omega)) = E_P(X_n|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X_m|\mathcal{G})(\omega) = E_P(X_n - X_m|\mathcal{G})(\omega) \ge 0 \qquad P\text{-m.v.}$$

Olkoon $Y(\omega) = \limsup_n Y_n(\omega)$. Seuraa että $Y_n(\omega) \uparrow Y(\omega)$ P-m.v. ja monotonisen konvergenssin lauseesta, $\forall A \in \mathcal{G}$

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = \lim_{n\uparrow\infty} E_P(X_n\mathbf{1}_A) = \lim_{n\uparrow\infty} E_P(Y_n\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A)$$

Jos $\widetilde{Y}(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ toteuttaa Kolmogorovin määritelmää, koska $A = \{\omega : Y(\omega) > \widetilde{Y}(\omega)\} \in \mathcal{G}$,

$$0 \leq E_P((Y - \widetilde{Y})\mathbf{1}_A) = E_P(X\mathbf{1}_A) - E_P(X\mathbf{1}_A) = 0$$

seuraa että $Y(\omega) \leq \widetilde{Y}(\omega)$ P-m.v., samoin seuraa että $Y(\omega) \geq \widetilde{Y}(\omega)$ ja siksi $Y(\omega) = \widetilde{Y}(\omega)$ P-m.v.

Tehtävä 10.0.1. *Osoita että (10.0.1) pätee jos ja vain jos*

$$E_P(XW) = E_P(YW) \quad \forall W \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

Tehtävä 10.0.2. *Olkoon $\mathcal{G} = \sigma(A_1, \dots, A_n) \subseteq \mathcal{F}$ äärellisesti generoitu ali σ-algebra, jossa $\{A_1, \dots, A_n\}$ on Ω:n $\mathcal{F}$-mitallinen ositus, $A_i \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ kun $i \neq j$.*

Olkoon $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Silloin

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{E_P(X\mathbf{1}_{A_i})}{P(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}(\omega) := \sum_{i=1}^n E_P(X|A_i)\mathbf{1}_{A_i}(\omega) \quad (10.0.1)$$

jossa $E_P(X|A) = E_P(X\mathbf{1}_A)/P(A)$ on elementaarinen ehdollinen odotusarvo, joka saa mielivaltainen arvo (esimerkiksi 0) silloin kun $P(A) = 0$. Osoita että (10.0.1) toteuttaa Kolmogorovin ehdollilsen odotuarvon määritelmän. (10.0.1) yleistyy myös tapaukseen jossa mitallinen ositus $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ on numeroituva, silloin

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{E_P(X\mathbf{1}_{A_i})}{P(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}(\omega) := \sum_{i\in\mathbb{N}} E_P(X|A_i)\mathbf{1}_{A_i}(\omega)$$

Huom: Kolmogorovin ehdollinen odotusarvo σ-algebran ehdolla $E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$ on satunnaismuuttuja, kun elementaarinen odotusarvo tapahtuman ehdolla $E_P(X|A)$ on vakio joka on hyvin määritelty vain silloin kun $P(A) > 0$.

10.1 Ehdollinen odotusarvo Radon-Nykodim derivaattana

Olkoon $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Määritellään merkkinen mitta

$$\mu_X(A) = E_P(X\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Huomataan että $\mu_X(A) = 0$ silloin kun $A \in \mathcal{F}$ ja $P(A) = 0$, eli $\mu \ll P$ σ-algebrassa $\mathcal{F}$, ja $X(\omega) = \frac{d\mu_X}{dP}(\omega)$ on vastaava Radon-Nikodymin derivaatta.

Olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra. Erityisesti $\mu \ll P$ σ-algebrassa $\mathcal{G}$. Radon-Nikodymin lauseesta seuraa että on olemassa R-N derivaatta

$$Y(\omega) := \frac{d\mu_X|_{\mathcal{G}}}{dP|_{\mathcal{G}}}(\omega)$$

jossa $Y(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ joka toteuttaa mitanvaihtokaavaa

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = \mu_X(A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Kolmogorovin määritelmästä seuraa että $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$.

Siis ehdollisen odotusarvon olemassa olo seuraa R-N lauseesta. Kuitenkin, koska emme ole vielä todistaneet R-N lauseetta käytimme L^2-projektiota.

10.2 Mitä voidaan sanoa kun $E_P(|X|) = \infty$?

Olkoon $0 \le X(\omega) \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mutta $E_P(X) = \infty$. Myös tässä tapauksessa monotonisen konvergenssilauseen kautta seuraa että on olemassa ehdollinen odotusarvo $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \in [0, +\infty]$ joka on $\mathcal{G}$-mitallinen joka totetuttaa $\forall A \in \mathcal{G}$.

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) \in [0, +\infty]$$

Toki $Y(\omega)$ voi saada myös arvoa $+\infty$, joka tapauksessa $E_P(Y) = E_P(X) = \infty$.

Yleisemmin olkoon $X(\omega) = (X(\omega)^+ - X(\omega)^-)$, jossa $E_P(|X|) = \infty$. Silloin ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) := E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) \in [-\infty, +\infty]$$

on hyvin määritelty vain joukon

$$U := \left\{ \omega : E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) = E_P(X^-|\mathcal{G})(\omega) = +\infty \right\}$$

ulkopuolella. Kun käy hyvin joskus $P(U) = 0$.

10.3 Ehdollisen odotusarvon ominaisuudet

1. Monotoninen konvergenssi :

   $$0 \le X_n(\omega) \uparrow X(\omega) \Longrightarrow 0 \le E_P(X_n|\,\mathcal{G})(\omega) \uparrow E_P(X|\,\mathcal{G})(\omega) \qquad P \text{ m.v.}$$

2. $E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\big) = E_P(X)$

3. Kun $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$,

   $$E_P(X|\,\mathcal{H})(\omega) = E_P\big(E_P(X|\,\mathcal{G})\big|\mathcal{H}\big)(\omega) \; P \text{ m.v.}$$

4. Jos $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$, ja $X, (XY) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, seuraa

   $$E_P(YX|\mathcal{G})(\omega) = Y(\omega)E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$$

5. jos σ-algebra $\mathcal{H}$ on P-riippumaton σ-algebrasta $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$,

   $$E_P(X|\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) = E_P(X|\mathcal{G})$$

   Tod. $\forall G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$, seuraa

   $$E_P(X\mathbf{1}_G\mathbf{1}_H) = E_P(X\mathbf{1}_G)P(H) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_G\big)P(H) = E_P\Big(E_P(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_G\mathbf{1}_H\Big)$$

   ja väite seuraa koska $\mathcal{G} \vee \mathcal{H} = \sigma(G \cap H : G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H})$.

6. (Jensenin epäyhtälö): Kun $E_P(X|\mathcal{G})$ on hyvin määritelty ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on konveksi,

   $$E_P(g(X)|\mathcal{G}) \ge g\big(E_P(X|\mathcal{G})\big)$$

   Tod.

   $$g(X(\omega)) \ge g\big(E_P(X|\mathcal{G})(\omega)\big) + \delta(\omega)\bigg(X(\omega) - E_P(X|\mathcal{G})(\omega)\bigg)$$

   jossa $\delta(\omega) = \nabla g_+\big(E_P(X|\mathcal{G})(\omega)\big)$ on $\mathcal{G}$-mitallinen. Kun otetaan ehdollista odotusarvoa molemmista puolesta, väite seuraa odotusarvon positiivisuudesta.

10.4 Säännöllinen ehdollinen todennäköisyys ja ytimet

Tapahtuman $A \in \mathcal{F}$ ehdollinen todennäköisyys ehdolla $\mathcal{G}$ σ-algebra on luonnollisesti

$$P\big(A\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = E_P\big(\mathbf{1}_A\big|\mathcal{G}\big)(\omega)$$

joka on yksikäsitteinen modulo P-nolla mittaisia joukkoja. Koska ehdollinen odotusarvo on ei-negatiivinen operaattori, seuraa $P\big(A\big|\mathcal{G}\big)(\omega) \in [0,1]$ P-melkein varmasti.

Voidaanko sanoa että P-melkein varmasti, kuvaus $A \mapsto P\big(A\big|\mathcal{G}\big)(\omega) \in [0,1]$ on todennäköisyysmitta ?

Olkoon $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ tapatuhmien jono jolla $A_n \downarrow \emptyset$. Seuraa ehdollisen odotusarvon monotonisen konvergenssin lauseesta että on olemassa joukko N jolla $P(N) = 0$

$$P(A_n|\mathcal{G})(\omega) \downarrow 0 \quad \forall \omega \in N^c \tag{10.4.1}$$

Tämä joukko voi toki riippua $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ jonosta, ja kun yleisesti jonojen määrä on ylinumeroituva, ei mikään takaa että löytyy sellainen P-nolla mittainen joukko N jossa (10.4.1) pätee samaan aikaan kaikille tapahtumien jonoille joilla $A_n \downarrow \emptyset$.

Siis ehdollinen todennäköisyys ei ole automaattisesti P-melkein varmasti σ-additiivinen.

Määritelmä 10.4.1. *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{F})$ *ja* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ *todennäköisyysavaruudet.*

Kuvaus $K : \Omega \times \widetilde{\mathcal{F}} \to [0,1]$ *on* $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ *todennäköisyys ydin kun*

- *kaikille kiinnitetyillle* $\omega \in \Omega$ *kuvaus* $K(\omega, \cdot) : \widetilde{\mathcal{F}} \to [0,1]$ *jossa* $\widetilde{A} \mapsto K(\omega, \widetilde{A})$ *on todennäköisyysmitta.*

- *kaikille kiinnitetyillle tapahtumille* $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{F}}$ *kuvaus* $K(\cdot, \widetilde{A}) : \Omega \to [0,1]$ *jossa* $\omega \mapsto K(\omega, \widetilde{A})$ *on* $\mathcal{F}$*-mitallinen.*

Määritelmä 10.4.2. *Olkoon* $\widetilde{\Omega} = \Omega$ *ja* $\widetilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Ehdollisella todennäköisyydellä $(\widetilde{A}, \omega) \mapsto P(\widetilde{A}|\mathcal{G})(\omega)$ *jossa* $\widetilde{A} \in \widetilde{F}$ *on säännöllinen versio jos on olemassa* $(\Omega, \mathcal{G}) \to (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ *todennäköisyys-ydin* $K(\omega, \widetilde{\mathcal{A}})$, *joka on* $\mathcal{G}$*-mitallinen* ω*:n suhteen, ja*

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = \int_{\widetilde{\Omega}} X(\widetilde{\omega}) K(\omega, d\widetilde{\omega})$$

kaikille $X \in L^1(\Omega, \widetilde{\mathcal{F}}, P)$

Huomautus 10.4.1. *määritelmässä esintyy ali-*σ *algebra* $\widetilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ *koska joskus ehdollisen todennäköisyyden säännöllinen versio on olemassa vain jollekin pienelle* σ*-algebralle eikä alkuperäiselle* σ*-algebralle* $\mathcal{F}$. *Esimerkki:* $\widetilde{\mathcal{F}} = \sigma(X)$ *jossa* X *on (*$\mathcal{F}$*-mitallinen) reaali-arvoinen satunnaismuuttuja.*

Määritelmä 10.4.3. *Todennäköisyysavaruus* $(\Omega, \mathcal{F})$ *on Borel jos on olemassa mitallinen injektio*

$$\Psi : (\Omega, \mathcal{F}) \to \big([0,1], \mathcal{B}([0,1])\big)$$

jonka käänteiskuvaus $\Psi^{-1} : \Psi(\Omega) \to \Omega$ *on myös mitallinen.*

Teoreema 10.4.1. *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *todennäköisyyskolmikko, ja* $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ *mitallinen kuvaus, jossa* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ *on Borelin avaruus, ja* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *ali* σ*-algebra*

On olemassa $(\Omega, \mathcal{G}) \to (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ *todennäköisyys ydin* $K(\cdot, \cdot)$ *joka on ehdollisen todennäköisyyden säännöllinen versio:* P *melkein varmasti,*

$$P(X \in D|\mathcal{G})(\omega) := E_P(\mathbf{1}(X \in D)|\mathcal{G})(\omega) = K(\omega, D) \quad \text{kaikille } D \in \widetilde{\mathcal{F}}$$

Todistus (Katso myös Kallenbergin kirjasta Foundations of Modern Probability, Thm 6.3, 6.4.). Oletan ensin että $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}$ ja $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Silloin $\forall q < r \in \mathbb{Q}$, ehdollisen odotusarvon positiivisuudesta seuraa

$$P\big(X \leq q \big| \, \mathcal{G}\big)(\omega) \leq P\big(X \leq r \big| \, \mathcal{G}\big)(\omega) \quad P\text{-melkein varmasti,} \tag{10.4.2}$$

ja koska $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ on numeroituva on olemassa $N \subset \Omega$ jolla $P(N) = 0$ ja 10.4.2 pätee samaan aikaan $\forall q \leq r \in \mathbb{Q}, \omega \in N^c$.

Olkoon

$$\widetilde{N}=\left\{\omega:\limsup_{q\downarrow t,q\in\mathbb{Q}}P\big(X\le q\big|\,\mathcal{G}\big)(\omega)>\liminf_{q\downarrow t,q\in\mathbb{Q}}P\big(X\le q\big|\,\mathcal{G}\big)(\omega)\right\}$$

Huomataan ensin että $\widetilde{N}\in\mathcal{G}$ koska $P\big(X\le q\big|\,\mathcal{G}\big)(\omega)$ ovat $\mathcal{G}$-mitallisia, ja koska $\widetilde{N}\subseteq N$, $P(\widetilde{N})=0$.

Määritellään $\forall t\in\mathbb{R}$

$$K((-\infty,t],\omega)=\begin{cases}\lim_{q\downarrow t,q\in\mathbb{Q}}K((-\infty,q],\omega) & \text{kun } \omega\in\widetilde{N}^c\\ Q((-\infty,t]) & \text{kun } \omega\in\widetilde{N}\end{cases}$$

jossa Q on mielivaltainen todennäköisyysmitta $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avaruudessa esim. $Q(dx)=\delta_0(dx)$ pistemassa 0 pistessä, tai $Q(dx)=P\big(\{\omega:X(\omega)\in dx\}\big)$ on satunnaismuuttujan jakauma.

Kuvaus $\omega\mapsto K((-\infty,t],\omega)$ on $\mathcal{G}$-mitallinen $\forall t\in\mathbb{R}$, ja $\forall\omega\in\Omega$ kuvaus $t\mapsto K((-\infty,t],\omega))$ on todennäköisyysjakauman kertymäfunktio, koska se on ei-vähenevä, oikealta jatkuva, ja toteuttaa

$$\lim_{q\downarrow\infty,q\in\mathbb{Q}}K((-\infty,q],\omega)=K(\emptyset,\omega)=0,\ \lim_{q\uparrow\infty,q\in\mathbb{Q}}K((-\infty,q],\omega)=K(\mathbb{R},\omega)=1,\quad\forall\omega\in\Omega.$$

Charatheodoryn laajennuslauseesta seuraa että $\forall\omega\in\Omega$ on olemassa yksikäsitteinen σ-additiivinen laajennus $K(B,\omega)$, joka on todennäköisyysmitta $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ-algebralla. Seuraavaksi osoitamme että kaikille Borel-mitallisille testi-funktioille $f(x)\ge 0$

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)K(dx,\omega)=E_P(f(X)|\mathcal{G})(\omega)\tag{10.4.3}$$

joka tarkoittaa että todennäköisyys ydin $K(B,\omega)$ on säännollinen versio ehdollisesta todennäköisyydestä $P(X\in B|\mathcal{G})(\omega)$.

Olkoon $\mathcal{C}$ kokoelma kaikista rajoitetuista Borel mitallisista funktioista $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jotka toteuttavat:

1. kuvaus $\omega\mapsto\int_{\mathbb{R}}f(x)K(dx,\omega)$ on $\mathcal{G}$-mitallinen
2. 10.4.3 pätee, eli $\forall G\in\mathcal{G}$

$$E_P\bigg(f(X)\mathbf{1}_G\bigg)=\int_\Omega\bigg(\int_{\mathbb{R}}f(x)K(dx,\omega)\bigg)\mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega)$$

$\mathcal{C}$ on vektori avaruus joka sisältää vakiot: kun $f, g \in \mathcal{C}$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, koska $\forall \omega \in \Omega$ odotusarvo on lineaarinen, integraali

$$\int_{\mathbb{R}} \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) K(dx, \omega) = \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x) K(dx, \omega) + \beta \int_{\mathbb{R}} g(x)(dx, \omega)$$

on $\mathcal{G}$-mitallinen ω:n suhteen, ja $\forall G \in \mathcal{G}$

$$E_P\bigg(\big(\alpha f(X) + \beta g(X)\big) \mathbf{1}_G\bigg) = \alpha E_P\big(f(X)\mathbf{1}_G\big) + \beta E_P\big(g(X)\mathbf{1}_G\big) =$$
$$= \alpha \int_{\Omega} \bigg(\int_{\mathbb{R}} f(x) K(dx, \omega)\bigg) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) + \beta \int_{\Omega} \bigg(\int_{\mathbb{R}} g(x) K(dx, \omega)\bigg) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega)$$
$$= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega)$$

$\mathcal{C}$ on suljettu monotonisen rajankäynnin suhteen: Kun $0 \le f_n(x) \uparrow f(x)$ jossa $\{ f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$, ja $f(x)$ on rajoitettu, seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta $\forall \omega \in \Omega$

$$0 \le \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) K(dx, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) K(dx, \omega)$$

joka on myös $\mathcal{G}$-mitallinen, ja $\forall G \in \mathcal{G}$ monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa

$$E_P\big(f(X)\mathbf{1}_G\big) = \lim_{n \to \infty} E_P\big(f_n(X)\mathbf{1}_G\big) = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} \bigg(\int_{\mathbb{R}} f_n(x) K(dx, \omega)\bigg) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega)$$
$$= \int_{\Omega} \lim_{n \to \infty} \bigg(\int_{\mathbb{R}} f_n(x) K(dx, \omega)\bigg) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} \bigg(\int_{\mathbb{R}} f(x) K(dx, \omega)\bigg) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega)$$

Koska $\mathbf{1}_{(-\infty,q]}(\cdot) \in \mathcal{C}$ ja $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big((-\infty, q], q \in \mathbb{Q}]\big)$, monotonisen luokan lauseesta 3.0.1 seuraa että $\mathcal{C}$ sisältää kaikki rajoitettuja Borel-mitallisia funktioita. Monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa että (10.4.3) pätee myös kaikille ei-negatiivisille Borel-mitallisille funktioille. Yleisemmin, kun $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ on Borelin avaruus ja

$$\Psi : (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

on mitallinen injektio jolla on mitallinen käänteiskuvaus Ψ^{-1}, kun $A \in \widetilde{\mathcal{F}}$

$$P\big(X \in A | \, \mathcal{G}\big)(\omega) = P\big(\Phi(X) \in \Psi(A) | \, \mathcal{G}\big)(\omega) = K(\Psi(A), \omega)$$

jossa $\Psi(A)$ on Borelin joukko, koska Ψ^{-1} on mitallinen, ja todennäköisyys ydin

$$K(B,\omega) = P\big(\Psi(X) \in B \big| \mathcal{G}\big)(\omega) \quad P\text{-melkein varmasti } \forall B \in \mathcal{B}(0,1)$$

on ehdollisen todennäköisyyden säännölinen versio, joka on olemassa koska $\Psi(X(\omega))$ saa arvoja $[0,1]$ välissä □

Huomautus 10.4.2. *Meidän onneksi* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *ja yleisemmin kaikki separoituvat metriset avaruudet varustettuina Borelin* σ*-algebroilla ovat Borelin avaruuksia.* $\mathbb{R}^d$*-arvoisen satunnaisvektorin ehdolliset todennäköisyydet ovat aina säännöllisiä. Kun* (S,d) *on separoituva metrinen avaruus, on olemassa tiheä numeroituva joukko* $(x_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq S$ *eli* $\forall x \in S$ *on olemassa indeksien jono* $(m_n : n \in \mathbb{N})$ *jolla* $d(x_{m_n}, x) \downarrow 0$ *kun* $m \uparrow \infty$*. Silloin on olemassa mitallinen inijektio*

$$\Psi : \big(S, \mathcal{B}(S)\big) \longrightarrow ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$$

jolla on mitallinen käänteiskuvaus seuraavasti: $\forall n \in \mathbb{N}$*, olkoon*

$$m_n := \arg\min\big\{d(x,x_k) : k = 1,\dots,2^n\big\}$$

jossa silloin kun minimi ei ole yksikäsitteinen valitaan pienin indeksi $1 \le m_n \le 2^n$ *jolla*

$$d\big(x, x_{m_n}\big) = \min\big\{d(x,x_k) : k = 1,\dots,2^n\big\}$$

Indeksilla on dyadinen esitys

$$m_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} y_\ell^{(n)} 2^\ell$$

jossa $y^{(n)} = \big(y_0^{(n)}, \dots, y_{n-1}^{(n)}\big) \in \{0,1\}^n$*. Jokainen piste* $x \in S$ *kuvautuu binaarijonoon*

$$\eta = (y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, y_0^{(3)}, y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \dots)$$

joka vastaa lukua $\Psi(x) \in [0,1]$*. Binaarijonon* η *informaation perusteella saadaan takaisin indeksijono* $\{m_n\}$ *ja piste* $x = \lim_{n\to\infty} x_{m_n}$*. Jää osoitettavaksi (harjoitustehtävä) että sekä* Ψ *että sen käänteiskuvaus ovat mitallisia.*

10.5 Ehdollisen odotusarvon laskenta riippumattomuuden nojalla

Lause 10.5.1. *Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra, $Y(\omega)$ $\mathcal{G}$-mitallinen satunnaismuuttuja, joka saa arvot mitallisessa avaruudessa $(S, \mathcal{S})$, ja olkoon $X(\omega) \in (\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{S}})$ riippumaton $\mathcal{G}$ σ-algebrasta.*

Olkoon $f : (\widetilde{S} \times S) \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja Borel-mitallinen kuvaus.

Silloin ehdollisella odotusarvolla on integraali-esitys

$$E_P\big(f(X,Y)\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = E_P\big(f(X,y)\big)\Big|_{y=Y(\omega)} = \int_{\widetilde{S}} f(x, Y(\omega))P_X(dx) \tag{10.5.1}$$

jossa $P_X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$.

Tod. Olkoon

$V := \big\{ f : (\widetilde{S} \times S) \to \mathbb{R}$ Borel mitalliset ja rajoitetut funktiot joille pätee 10.5.1 $\big\}$

Osoitamme ensi että V on monotoninen luokka. Ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa 10.5.1 on voimassa funktiolle $f(x,y)$ jos ja vain jos $\forall G \in \mathcal{G}$

$$E_P\big(f(X,Y)\mathbf{1}_G\big) = \int_\Omega \bigg\{ \int_{\widetilde{S}} f(x, Y(\omega))P_X(dx) \bigg\} \mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega)$$

Selvästi V on vektori avaruus koska odotusarvo on lineaarinen. Jos $\{f_n(x,y) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$ ja $0 \le f_n(x,y) \uparrow f(x,y)$ jossa $f(x,y)$ on rajoitettu, seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta että $f(x,y) \in V$.

Monotonisen luokan lauseesta seuraa että jos $\mathcal{I} \subseteq V$ on π-luokka, V sisältää kaikki rajoitettu $\sigma(\mathcal{I})$ mitalliset funktiot. Väite on osoitettu kun näytämme että 10.5.1 pätee funktiolle $f(x,y) = \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_D(y)$: $\forall G \in \mathcal{G}$ riippumattomuudesta seuraa

$$\begin{aligned}
&E_P\big(\mathbf{1}_B(X)\mathbf{1}_D(Y)\mathbf{1}_G\big) = P_X(B)P(\{Y \in D\} \cap G) \\
&= \int_\Omega \bigg\{ \int_\Omega \mathbf{1}_B(X(\widetilde{\omega}))P(d\widetilde{\omega}) \bigg\} \mathbf{1}_D(Y(\omega))\mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega) = \\
&\int_\Omega \bigg\{ \int_\Omega \mathbf{1}_B(X(\widetilde{\omega}))\mathbf{1}_D(Y(\omega))P(d\widetilde{\omega}) \bigg\} \mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega) = \\
&\int_\Omega \bigg\{ \int_\Omega f\big(X(\widetilde{\omega}), Y(\omega)\big)P(d\widetilde{\omega}) \bigg\} \mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega)
\end{aligned}$$

joka tarkoittaa $\mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_D(y) \in V$ □

10.6 Ehdollisen odotusarvon laskenta mitan-vaihdon avulla: Bayesin kaava

Lemma 10.6.1. *Ehdollinen odotusarvon on itse-adjungoitu operaattori, eli kun $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ on ali σ-algebra, $\forall A \in \mathcal{F}$*

$$E_P\big(X\ E_P(\mathbf{1}_A|\mathcal{G})\big) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\ E_P(\mathbf{1}_A|\mathcal{G})\big) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\ \mathbf{1}_A\big)$$

Tod. Suoraan ehdollisen odotusarvon ominaisuuksista.

Olemme esittäneet kaksi tapausta jossa osaamme laskea ehdollisia odotusarvoja: silloin kun σ-algebralla $\mathcal{G}$ on numeroituva määrä atomeja, ja riippumattomuuden nojalla lauseessa 10.5.1.

Yleisemmin voidaan joskus paluattaa ehdollisen odotusarvon laskeminen lauseen 10.5.1 tilanteeseen mitan-vaihdon avulla. Ensin esitämme mitanvaihtokaavan ehdolliselle odotusarvolle:

Teoreema 10.6.1. *(Abstrakti Bayesin kaava). Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ja $P \overset{\mathcal{F}}{\ll} Q$ todennäköisyysmitat joilla $Q(A) = 0 \Longrightarrow P(A) = 0$ kun $A \in \mathcal{F}$.*

Radon-Nikodym lauseesta seuraa että on olemassa Radon-Nikodym derivaatta eli satunnaismuuttuja

$$0 \le Z(\omega) := \frac{dP}{dQ}(\omega) \ \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$$

jolle odotusarvon mitanvaihtokaava on voimassa:

$$E_P(X) = E_Q(XZ) \qquad \forall X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

Silloin ehdolliselle odotusarvolle pätee Bayesin kaava:

$$E_P\big(X\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = \frac{E_Q\big(XZ\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}{E_Q\big(Z\big|\mathcal{G}\big)(\omega)} \quad \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P) \tag{10.6.1}$$

Huomautus 10.6.1. *Olkoon*

$$N = \Big\{ \omega : E_Q(Z|\mathcal{G})(\omega) \ = 0 \Big\}$$

$N \in \mathcal{G}$ koska $E_Q(Z|\mathcal{G})$ on $\mathcal{G}$-mitallinen, mitan vaihto kaavasta ja ehdollisen odotusarvon määritelmästä

$$P(N) = E_Q\big(Z\mathbf{1}_N\big) = E_Q\Big(E_Q(Z|\mathcal{G})\mathbf{1}_N\Big) = E_Q\Big(E_Q(Z|\mathcal{G})\mathbf{1}\big\{ \ E_Q(Z| \ \mathcal{G}) = 0\big\}\Big) = 0$$

Seuraa että P-melkein varmasti (mutta ei vältämättä Q-melkein varmasti) $E_P(Z|\mathcal{G})(\omega) > 0$, ja yhtälön (10.6.1) väsen puoli on hyvin määritelty.

Tod. Olkoon $G \in \mathcal{G}$. Mitanvaihto kaavasta odotusarvolle ja ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa

$$\begin{aligned} &E_P\big(X\mathbf{1}_G\big) = E_Q\big(ZX\mathbf{1}_G\big) = E_Q\big(E_Q(ZX\mathbf{1}_G|\mathcal{G})\big) = E_Q\big(E_Q(ZX|\mathcal{G})\mathbf{1_G}\big) \\ &= E_Q\bigg(\frac{E_Q(Z|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}E_Q(ZX|\mathcal{G})\mathbf{1}_G\bigg) = E_Q\bigg(Z\frac{E_Q(ZX|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}\mathbf{1}_G\bigg) = E_P\bigg(\frac{E_Q(ZX|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}\mathbf{1}_G\bigg) \end{aligned} \quad \square$$

Esimerkki 10.6.1. *(Perinteinen Bayesin kaava) Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, olkoon ja $X(\omega) \in \mathbb{R}^d, Y(\omega) \in \mathbb{R}^m$ satunnaismuuttujia joilla $\mathcal{F} = \sigma(X, Y)$, $\mathcal{G} = \sigma(Y)$.*

Olkoon $P \overset{\mathcal{F}}{\ll} Q$ todennäköisyysmitat joilla $X \overset{Q}{\perp\!\!\!\perp} Y$ ja olkoon

$$0 \le Z(\omega) := z(X(\omega), Y(\omega)) = \frac{dP}{dQ}(\omega) \ \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$$

jollakin Borel-mitallisilla funktiolla $z(x, y) \ge 0$. Olkoon $f(x, y)$ rajoitettu Borel-mitallinen kuvaus. Bayesin kaavasta

$$\begin{aligned} &E_P\big(f(X, Y)\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = \frac{E_Q\big(f(X, Y)Z\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}{E_Q\big(Z\big|\mathcal{G}\big)(\omega)} \\ &= \frac{\int_\Omega f(X(\widetilde{\omega}), Y(\omega)) \ z(X(\widetilde{\omega}), Y(\omega))P(d\widetilde{\omega})}{\int_\Omega z(X(\widetilde{\omega}), Y(\omega))P(d\widetilde{\omega})} \\ &= \int_\Omega f(X(\widetilde{\omega}), Y(\omega))K(\omega, d\widetilde{\omega}) \quad \textit{jossa} \\ &K(\omega, d\widetilde{\omega}) = \frac{z(X(\widetilde{\omega}), Y(\omega))}{\int_\Omega \ z(X(\omega'), Y(\omega))P(d\omega')}P(d\widetilde{\omega}) \end{aligned}$$

on ehdollisen todennäköisyyden ydin. Voidaan myös integroida suoraan $\mathbb{R}^d$ avaruudessa jossa $X(\omega)$ saa arvoja:

$$E_P\big(f(X,Y)\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} f(x,Y(\omega))z(x,Y(\omega))P_X(dx)}{\int_{\mathbb{R}^d} z(x,Y(\omega))P_X(dx)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,Y(\omega))k(Y(\omega),dx)$$

jossa

$$k(y,dx) = \frac{z(x,y)}{\int_{\mathbb{R}^d} z(x',y)P_X(dx')} P_X(dx)$$

Kun satunnaisvektorin (X,Y) jakaumalla on tiheysfunktio $(d+m)$-ulotteisen Lebesgue mitan suhteen, siis $P(X\in dx, Y\in dy) = p_{X,Y}(x,y)dxdy$, Fubini lauseesta seuraa että silloin myös marginaalijakaumilla P_X ja P_Y ovat tiheydet,

$$P(X\in dx) = p_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} p_{X,Y}(x,y)dy$$
$$P(Y\in dy) = p_Y(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} p_{X,Y}(x,y)dx$$

ja voidaan valita todennäköisyysavaruudeksi $\Omega = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ todennäköisyysmitoilla

$$Q_{X,Y}(dx,dy) := (P_X\otimes P_Y)(dx,dy) = p_X(x)p_Y(y)dxdy,\ \ P_{X,Y}(dx,dy) = p_{X,Y}(x,y)dxdy$$

Oletuksesta $P_{X,Y} \ll (P_X\otimes P_Y)$, seuraa että Radon Nykodim derivaatta on

$$\frac{dP_{X,Y}}{dQ_{X,Y}}(x,y) = \frac{dP_{X,Y}}{d(P_X\otimes P_Y)}(x,y) = z(x,y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)p_Y(y)}$$

Voidaan silloin kirjoittaa ehdollisen todennäköisyyden ytimen tiheysfunktioiden avulla

$$k(y,dx) = \frac{z(x,y)}{\int_{\mathbb{R}^d} z(x',y)P_X(dx')} P_X(dx) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}dx = p_{X|Y}(x|y)dx$$

jossa viimeinen yhtälö on ehdollisen tiheysfunktion määritelmä. Perinteinen Bayesin kaava on

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{p_X(x)p_{Y|X}(y|x)}{p_Y(y)} \quad .$$

10.6.1 Ehdollisen odotusarvon laskenta tuloavaruudessa

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyyskolmikko ja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Tuloavaruudessa $(\Omega \times \Omega)$ varustettuna tulo σ-algebralla $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$ määritellään Dynkinin laajennuslauseen kautta todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ jolla

$$\mathbb{P}(H \times G) = P(H \cap G) \quad \forall H \in \mathcal{H}, G \in \mathcal{G}$$

Lause 10.6.1. *Olkoon $X(\omega, \omega') \in L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{P})$.*

Silloin

$$\iint_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega')\mathbb{P}(d\omega \times d\omega') = \int_{\Omega} X(\omega, \omega)P(d\omega) \tag{10.6.2}$$

Tod. Kun $X(\omega, \omega') = \mathbf{1}_H(\omega)\mathbf{1}_G(\omega')$ jossa $H \in \mathcal{H}$ ja $G \in \mathcal{G}$, väite seuraa suoraan $\mathbb{P}$:n määritelmästä. Olkoon

$$V := \big\{ X(\omega, \omega') : \text{ rajoitetut ja } \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}\text{-mitalliset s.m. joilla (10.6.2) on voimassa } \big\}$$

Selvästi V on vektori avaruus, ja monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa että V on monotoninen luokka. Koska V sisältää satunnaismuuttujat $\mathbf{1}_H(\omega)\mathbf{1}_G(\omega')$ jossa $H \in \mathcal{H}$ ja $G \in \mathcal{G}$, monotonisen luokan lauseesta seuraa sisältää myös kaikki rajoitetut $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$-mitalliset satunnaismuuttujat.

Yleisemmin kun X on ei-rajoitettu ja $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$-mitallinen voidaan ensin hajottaa $X = (X^+ - X^-) \in L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, P^{\otimes 2})$ satunnais-muuttujen jonolla $X_n = (X^+ \wedge n) - (X^- \wedge n)$, ja käytää monotonisen konvergenssin lausetta erikseen positiivisille ja negatiivisille puolille $\square$

Esimerkki 10.6.2. *Olkoon $\xi(\omega), \eta(\omega) \in \mathbb{R}$ satunnaismuuttujat $\mathcal{H} = \sigma(\xi)$, $\mathcal{G} = \sigma(\eta)$. Jos $X(\omega, \omega') \geq 0$ on $\sigma(\xi) \otimes \sigma(\eta)$-mitallinen, on olemassa Borel-mitallinen kuvaus $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ jolla $X(\omega, \omega') = f(\xi(\omega), \eta(\omega'))$. Silloin*

$$\int_{\Omega} f(\xi(\omega), \eta(\omega))P(d\omega) = \iint_{\Omega \times \Omega} f(\xi(\omega), \eta(\omega'))\mathbb{P}(d\omega, d\omega')$$

Oletamme nyt että σ-algebrat $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{G}$ ovat P-riippumattomia eli

$$P(H \cap G) = P(H)P(G) \text{ kun } H \in \mathcal{H} \text{ ja } G \in \mathcal{G}$$

Silloin $\mathbb{P} = P \otimes P = P^{\otimes 2}$ eli

$$\mathbb{P}(H \times G) = P(H \cap G) = P(H)P(G) \quad \forall H \in \mathcal{H}, G \in \mathcal{G}$$

Tästä esityksestä seuraa suoraan että kun $G \in \mathcal{G}$, $X(\omega, \omega) = f(\xi(\omega), \eta(\omega))$,

$$E_P(X\mathbf{1}_G) = \int_\Omega X(\omega,\omega)\mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega) = \iint\limits_{\Omega\times\Omega} X(\omega,\omega')\mathbf{1}_G(\omega')P^{\otimes 2}(d\omega, d\omega')$$
$$= \int_\Omega \left\{ \int_\Omega X(\omega,\omega')P(d\omega) \right\} \mathbf{1}_G(\omega')P(d\omega')$$

ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega') = \int_\Omega X(\omega,\omega')P(d\omega)$$

joka vastaa kaavan (10.5.1)

Yleisemmin, kun σ-algebrat $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{G}$ eivät ole riippumattomia P-mitan suhteen, oletamme että $\mathbb{P} \ll P^{\otimes 2}$ tulo σ-algebrassa $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{G})$, eli $\mathbb{P}(C) = 0$ kun $C \in (\mathcal{H} \otimes \mathcal{G})$ ja $P^{\otimes 2}(C) = 0$.

Seuraa Radon-Nikodymin lauseesta että on olemassa $(\mathcal{H}\otimes\mathcal{G})$-mitallinen Radon-Nikodymin derivaatta

$$0 \le Z(\omega,\omega') := \frac{d\mathbb{P}}{dP^{\otimes 2}}(\omega,\omega') \;\in\; L^1(\Omega\times\Omega, \mathcal{H}\otimes\mathcal{G}, P^{\otimes 2})$$

jolla mitan vaihdon kaava on voimassa kaikille $X \in L^1(\Omega\times\Omega, \mathcal{H}\otimes\mathcal{G}, \mathbb{P})$

$$\int_\Omega X(\omega,\omega)P(d\omega) = \iint\limits_{\Omega\times\Omega} X(\omega,\omega')\mathbb{P}(d\omega,d\omega') = \iint\limits_{\Omega\times\Omega} X(\omega,\omega')Z(\omega,\omega')P^{\otimes 2}(d\omega,d\omega') =$$
$$\int_\Omega \left(\int_\Omega X(\omega,\omega')Z(\omega,\omega')P(d\omega) \right) P(d\omega')$$

Kun $G \in \mathcal{G}$ saadaan

$$\int_\Omega X(\omega,\omega)\mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega) =$$
$$\iint\limits_{\Omega\times\Omega} X(\omega,\omega')\mathbf{1}_G(\omega')\mathbb{P}(d\omega,d\omega') = \int_\Omega \left(\int_\Omega X(\omega,\omega')Z(\omega,\omega')P(d\omega) \right) \mathbf{1}_G(\omega')P(d\omega') =$$
$$\int_\Omega Y(\omega')\mathbf{1}_G(\omega')P(d\omega'),$$

jossa

$$Y(\omega') = \int_\Omega X(\omega,\omega')Z(\omega,\omega')P(d\omega)$$

on $\mathcal{G}$-mitallinen,

$$= \iint\limits_{\Omega\times\Omega} Z(\omega,\omega')Y(\omega')\mathbf{1}_G(\omega')P^{\otimes 2}(d\omega\times d\omega') = \iint\limits_{\Omega\times\Omega} Y(\omega')\mathbf{1}_G(\omega')\mathbb{P}(d\omega,d\omega')$$
$$= \int_\Omega Y(\omega')\mathbf{1}_G(\omega')P(d\omega')$$

Kolmogorovin ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa $Y(\omega') = E_P(X|\mathcal{G})(\omega')$.

Huomataan myös että

$$K(\omega,d\omega') := Z(\omega,\omega')P(d\omega')$$

on ehdollisen todennäköisyyden ydin: $\forall A\in\mathcal{H}$, kuvaus

$$\omega \mapsto K(\omega,A) := \int_A Z(\omega,\omega')P(d\omega')$$

on $\mathcal{G}$-mitallinen, ja $\int\limits_\Omega Z(\omega,\omega')P(d\omega)\equiv 1$ koska

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega\times G) &= P(\Omega\cap G) = P(G) = P(\Omega)P(G) = P^{\otimes 2}(\Omega\times G) \quad \forall G\in\mathcal{G} \\ \iff P(G) &= \int_\Omega\Big(\int_\Omega Z(\omega,\omega')P(d\omega)\Big)\mathbf{1}_G(\omega')P(d\omega') \quad \forall G\in\mathcal{G} \end{aligned}$$

Samoin, $\int\limits_\Omega Z(\omega,\omega')P(d\omega')\equiv 1$.

Huomautus 10.6.2. *Tässä kappaleessa yleistettiin lause 10.5.1 ja esimerkki 10.6.1 tilanteeseen jossa $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{G}$ ovat yleisiä ali-σ-algebrat eikä välttämättä satunnaisvektoreiden virittämiä.*

10.7 Ehdollistaminen nollamittaisiin tapahtumiin: varoitus

Olkoon $X(\omega), Y(\omega)$ riippumattomia standardi gaussisia satunnaismuuttujia,

$E_P(X) = E_P(Y) = 0$, $E_P(X^2) = E_P(Y^2) = 1$. Olkoon

$$W(\omega) = (X(\omega) - Y(\omega)), \quad Z(\omega) = \mathbf{1}(Y(\omega) \neq 0)\,\frac{X(\omega)}{Y(\omega)}$$

Olkoon $N = \{\omega : \ Y(\omega) = 0\}$.
Selvästi $P(N) = 0$ ja

$$N^c \cap \{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\} = N^c \cap \{\omega : W(\omega) = 0\} = N^c \cap \{\omega : Z(\omega) = 1\}$$

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rajoitettu Borel mitallinen kuvaus.

$$i) \qquad E_P(f(X)|\{X = Y\}) = \frac{\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy}{\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy}$$

$$ii) \qquad E_P(f(X)|W = 0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)p_{X|W}(x|0)dx$$

$$iii) \qquad E_P(f(X)|Z = 1) = \int_{\mathbb{R}} f(x)p_{X|Z}(x|1)dx$$

eivät ole valttämättä samasuuruisia, vaikka

$$\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\} \cap \{\omega : Y(\omega) \neq 0\} = \{\omega : W(\omega) = 0\} \cap \{\omega : Y(\omega) \neq 0\}$$
$$= \{\omega : Z(\omega) = 1\} \cap \{\omega : Y(\omega) \neq 0\}.$$

Näytämme että $i) = ii) \neq iii)$.
$i)$ Perustuu tulkintaan

$$E_P(f(X)|\{X = Y\}) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} E_P\big(f(X)\big|\{\ |X-Y| < \varepsilon\}\big)$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{E_P\big(f(X)\mathbf{1}\{\ |X-Y| < \varepsilon\}\big)}{P(|X-Y| < \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y)dy\right) f(x)p_X(x)dx}{\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y)dy\right) p_X(x)dx}$$

$$= \frac{\int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \left((2\varepsilon)^{-1}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y)dy\right) f(x)p_X(x)dx}{\int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \left((2\varepsilon)^{-1}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y)dy\right) p_X(x)dx}$$

$$= \frac{\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)p_Y(x)p_X(x)dx}{\int\limits_{\mathbb{R}} p_Y(x)p_X(x)dx} = \frac{\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy}{\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy}$$

Tässä δ_0 on Diracin delta distribuutio jolla on ominaisuus

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\delta_0(x)dx = g(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)F(dx)$$

kaikille jatkuville funktioille g, ja $F(x) = \mathbf{1}(x \geq 0)$. Diracin δ on porrasfunktion F:n derivaatta distribution mielessä.

Lasketaan:

$i)$ $$\frac{\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy}{\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy} = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)p_X(x)p_Y(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} p_X(x)p_Y(x)dx} = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx$$

$ii)$ Bayesin kaavasta

$$p_{X|W}(x,w) = \frac{p_X(x)p_{W|X}(x,w)}{p_W(w)} = \frac{p_X(x)p_{W|X}(x,w)}{p_W(w)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(w-x)^2)\Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp(-\frac{1}{4}w^2)\Big)^{-1}$$

koska $p_{W|X}(w|x) = p_Y(w-x)$ ja W on gaussinen ja $E(W) = E(X)-E(Y) = 0$, $E(W^2) = E(X^2) + E(Y^2)$, siis

$$p_{W|X}(w|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\big(-\frac{(w-x)^2}{2}\big)$$

joka on gaussisen jakauman $\mathcal{N}(x,1)$ tiheysfunktio.

Tästä seuraa

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)p_{X|W}(x|0)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx$$

joka täsmää i) arvon kanssa.

Kuitenkin

$$p_{Z|X}(z|x) = p_Y(x/z)\left|\frac{dy}{dz}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\big(-\frac{x^2}{2z^2}\big)\ \frac{|x|}{z^2}$$

muuttujan vaihdolla $z = x/y$, ja

$$
\begin{aligned}
p_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} p_{Z|X}(z|x)p_X(x)dx = \frac{1}{z^2 2\pi}\int_{\mathbb{R}} |x| \exp\bigl(-\frac{x^2}{2}(1+z^{-2})\bigr)dx \\
&= \frac{1}{z^2 2\pi} 2 \int_0^\infty r^{1/2} \exp\bigl(-\frac{r}{2}(1+z^{-2})\bigr)\frac{r^{-1/2}}{2} dr \\
&= \frac{1}{z^2 2\pi} \int_0^\infty \exp\bigl(-\frac{r}{2}(1+z^{-2})\bigr)dr = \frac{1}{z^2 2\pi}\frac{2}{(1+z^{-2})} = \frac{1}{(1+z^2)\pi}
\end{aligned}
$$

muuttujan vaihdolla $r = x^2$. Tämän jakauman nimi on Student-t vapausasteella 1.

Tästä seuraa Bayesin kaavalla

$$
\begin{aligned}
p_{X|Z}(x|z) &= \frac{p_X(x)p_{Z|X}(x|z)}{p_Z(z)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\bigl(-\frac{x^2}{2z^2}\bigr)\ \frac{|x|}{z^2}}{(1+z^2)^{-1}\pi^{-1}} \\
&= \frac{(1+z^2)|x|}{2}\exp\bigl(-\frac{x^2}{2}(1+z^{-2})\bigr)
\end{aligned}
$$

Kun $z = 1$ saadaan $p_{X|Z}(x|1) = |x| \exp(-x^2)$ ja

$$
E_P(f(X)|Z=1) = \int_{\mathbb{R}} f(x)p_{X|Z}(x|1)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)|x|\exp(-x^2)dx
$$

joka on eri kuin integraalien i) ii) arvo.

Nolla-mittaisilla tapahtumilla voi olla eri esityksiä eri satunnaismuuttujen avulla, ja vastaavien ehdollisten odotusarvojen pistettäiset arvot saattaavat olla eriläisiä. Tämä ei ole ristiriidassa todennäköisyysteorian kanssa koska aina voidaan vaihtaa ehdollisen odotusarvon arvot pistettäin nolla mittaisissa joukoissa.

Luku 11

Martingaalit

Määritelmä 11.0.1. *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{F})$ *todennäköisyysavaruus, ja* $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+, \dots$ *aikaindeksien joukko.*

Filtraatio $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T})$ *on* σ*-algebroiden kokoelma, joka on ajan suhteen ei-vähenevä:*

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall 0 \leq s \leq t$$

Määritelmä 11.0.2. *Stokastinen prosessi* $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$ *on sopiva (tai adaptoitu) filtration* $\mathbb{F}$*:n suhteen, kun* $X_t(\omega)$ *on* $\mathcal{F}_t$*-mitallinen* $\forall t \in \mathbb{T}$.

Määritelmä 11.0.3. *Diskreetti ajassa, eli kun* $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$*, stokastinen prosessi* $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$ *on ennustettava filtration* $\mathbb{F}$*:n suhteen, kun* $X_t(\omega)$ *on* $\mathcal{F}_{t-1}$*-mitallinen* $\forall t \in T$.

Määritelmä 11.0.4. *Sanotaan että stokastinen prosessi* $X = (X_t : t \in \mathbb{T})$ *on (ali,yli)-martingaali filtraation* $\mathbb{F}$*:n suhteen kun*

1. (X_t) *on* $\mathbb{F}$*-sopiva*
2. $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ $\forall t \in \mathbb{T}$,
3. $$E_P(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \quad \forall s \leq t,$$

   vastaavasti $\leq$ *ylimartingaalin tapauksessa ja* $\geq$ *alimartingaalin tapauksessa.*

Huomataan että martingaalin ominaisuus riippuu sekä todennäköisyysmitasta että filtraatiosta. Ylimartingaali on ajan-suhteen "keskimäärin" ei-kasvava, alimartingaali on "keskimäärin" ei-vähenevä, martingaali on sekä ylimartingaali että alimartingaali.

Lemma 11.0.1. *Diskreetti ajassa ($\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$), määritelmässä 11.0.4 ominaisuus (3) seuraa kaikille $s \leq t$ kun*

$$E_P(M_t|\mathcal{F}_{t-1}) = M_{t-1} \quad \forall t$$

Tod. Induktiolla, kun $t = s$,

$$E_P(M_t|\mathcal{F}_s) = E_P(M_s|\mathcal{F}_s) = M_s$$

Muuten voidaan käyttää induktiota $r = (t-s)$:n suhteen, olettamalla että lemma on voimassa kaikille arvoille t, s joilla $(t-s) < r$, kun $(t-s) = r$ seuraa

$$\begin{aligned} E_P(M_t|\mathcal{F}_s) &= E_P(E_P(M_t|\mathcal{F}_{s+1})|\mathcal{F}_s) \\ &= E_P(M_{s+1}|\mathcal{F}_s) = M_s \end{aligned}$$

Samoin voidaan tarkistaa myös ali- ja yli- martingaalin epäyhtälöitä.

Esimerkki 11.0.1. *Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$ riippumattomien satunnaismuuttujen jono jolla $E(X_t) = \mu \in \mathbb{R}$, ja olkoon $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_t)$*

$S_t = (X_1 + \dots + X_t)$ on $\mathbb{F}$-alimartingaali kun $\mu > 0$, ja $\mathbb{F}$-ylimartingaali kun $\mu > 0$, ja $\mathbb{F}$-martingaali kun $\mu = 0$.

Esimerkki 11.0.2. *Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ riippumattomien satunnaismuuttujen jono jolla $X_t(\omega) \geq 0$ P-m.v. ja $E(X_t) = \mu \in [0, +\infty)$, ja olkoon $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_t)$*

Silloin tuloprosessi $M_t = (X_1 X_2 \dots X_t)$ on $\mathbb{F}$-alimartingaali kun $\mu > 1$, ja $\mathbb{F}$-ylimartingaali kun $\mu < 1$, ja $\mathbb{F}$-martingaali kun $\mu = 1$.

Esimerkki 11.0.3. *Olkoon $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ $t \in \mathbb{N}$, diskreetti aikainen Markovin ketju alkujakaumalla $\pi(dx)$ ja siirtymäytimellä $K(x, dy)$.*

Olkoon $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_t)$.

Määritellään operaattori

$$(Kf)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)K(y,dx) = E_x(f(X_1)) = E_P(f(X_t)|X_{t-1}=x)$$

Osoita että

$$M_t(f) = \sum_{s=1}^{t} (f(X_s) - (Kf)(X_{s-1}))$$

on $\mathbb{F}$-martingaali kun $f(x)$ on rajoitettu ja Borel mitallinen.

Teleskoppisen summan esityksestä,

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{s=1}^{t}(f(X_s) - f(X_{s-1}) =$$
$$f(X_0) + \sum_{s=1}^{t}(f(X_s) - Kf(X_{s-1}) + \sum_{s=1}^{t}((Kf)(X_{s-1}) - f(X_{s-1}))$$
$$= f(X_0) + M_t(f) + A_t(f)$$

saadaan Doobin hajotelma jossa $A_t(f)$ on ennustettava prosessi

Lause 11.0.1. *Olkoon (X_t) martingaali ja (Y_t) ennustettava prosessi filtraation $(\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$ suhteen.*

Määritellään martingaalimuunnos tai aika-diskreetti stokastinen integraali

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} Y_s(X_s - X_{s-1}) = \sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta X_s$$

Kun $E(|Y_s \Delta M_s|) < \infty \; \forall s \in \mathbb{N}$, (M_t) on martingaali.

Tod. Määritelmästä seuraa että M_t on $\mathbb{F}$-sopiva ja integroituvuus ehto seuraa kolmio epäyhtälöstä. Tarkistamme että martingaali-ominaisuus on voimassa:

$$E_P(M_t - M_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) = E_P(Y_t(X_t - X_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}) = Y_t E_P(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$$

jossa käytettiin integrandin (Y_t):n $\mathbb{F}$-ennustettavuutta.

Integroituuvus voidaan tärkistää Hölderin epäyhtälöllä

$$E(|Y_s \Delta M_s|) \leq \| Y_s \|_{L_p} \| \Delta M_s \|_{L_q}$$

kun $p, q \in [1, +\infty]$ ovat konjugaatti-eksponentteja joilla $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Vedonlyönti-tulkinta Oletamme että hetkellä $(t-1)$ on mahdollisuus ostaa tai myydä arpajaisia hinnalla X_{t-1}. Hetkellä t arpajaisen arvo on X_t, satunnaisvoittolla $\Delta X_t = (X_t - X_{t-1})$ (negatiivinen voitto tulkitaan on tappioksi). Tässä $Y_t(\omega)$ on vedonlyonti strategia, ennustettava siinä mielessä että on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen kun ΔX_t on $\mathcal{F}_t$-mitallinen, siis kun lyödään vetoa ei tiedetä mitä tapahtuu seuraavaksi. M_t on pelajan pääoma ja

$$M_t - M_0 = \sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta X_s$$

on pelajan voitto. Reilussa pelissa $E_P(\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ ja arpajaisen arvoprosessi on martingaali. Lause 11.0.1 kertoo että niin kauan kun integroituvuusehdot ovat voimassa ja pelistrategia on ennustettava, pelajan voitto-prosessi on martingaali. Kun X_t on ylimartingaali (kuten roulette-pelissä), ja ennustettava pelistrategia on rajoitettu ja ei-negatiivinen, voittoprosessi on edelleen ylimartingaali.

Määritelmä 11.0.5. *Satunnais-hetki $\tau(\omega) \in \mathbb{T} = \mathbb{N}$ on $(\mathcal{F}_t)$-pysähdyshetki kun*

$$\{\, \omega : \tau(\omega) \le t \} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

Jokaisella ajanhetkellä $t \in \mathbb{N}$, σ-algebran $\mathcal{F}_t$ sisältämän informaation perusteella voidaan päättää onko $\tau(\omega)$ tapahtunut jo, vai se tapahtuu vasta tulevaisuudessa.

Satunnais hetki $\tau(\omega)$ on pysähdyshetki jos ja vain jos laskuri prosessi $N_t(\omega) = \mathbf{1}\big(\tau(\omega) \le t\big)$ on $(\mathcal{F}_t)$-sopiva.

Tehtävä 11.0.1. *Jos $\tau(\omega)$ ja $\sigma(\omega)$ ovat $(\mathcal{F}_t)$-pysähdyshetkiä, siitä seuraa ettö niiden minimi $\tau(\omega) \wedge \sigma(\omega)$ ja maksimi $\tau(\omega) \vee \sigma(\omega)$ ovat myös $(\mathcal{F}_t)$-pysähdyshetkiä,*

Luku 12

Martingaalien konvergenssi

12.1 Doobin Martingaali-konvergenssi lause

Martingaali $(M_t : t \in \mathbb{N})$ joka on rajoitettu $L^1(P)$ normissa, suppenee P-melkein varmasti kun $t \to +\infty$.

Teoreema 12.1.1. *(Doob) Olkoon* $(X_t : t \in \mathbb{N})$ *ylimartingaali jolla* $\sup_{t \in \mathbb{N}} E_P(X_t^-) < \infty$, *(tässä* $x^- = \max(-x, 0)$*). Silloin*

$$\sup_{t \in \mathbb{N}} E_P(|X_t|) < \infty$$
$$\lim_{t \to \infty} X_t(\omega) = X_\infty(\omega) \quad P\text{-}m.v.$$

jossa $X_\infty(\omega) \in L^1(\Omega)$

Huomautus : vaikka $X_\infty(\omega) \in L^1(P)$, kun $(X_t : t \in \mathbb{N})$ ei ole rajoitettu $L^1(P)$ normissa, $L^1(P)$-konvergenssi ei välttämättä päde.

Tod. Koska X_t on ylimartingaali, $\forall t \in \mathbb{N}$

$$E(X_t^+) \le E(X_0) + E(X_t^-)$$

joten

$$\sup_t E(X_t^+) \le E(X_0) + \sup_t E(X_t^-)$$

jossa $E(|X_0|) < \infty$, siksi $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ on rajoitettu $L^1(P)$ avaruudessa.

Olkoon $a < b$, ja määritellän pysähdyshetkien jono

$$\sigma_0(\omega) = \inf\{s \in \mathbb{N} : X_s(\omega) < a\}$$

(ensimmäinen a tason alituksen hetki)

$$\tau_i(\omega) = \inf\{s > \sigma_i(\omega) : X_s(\omega) \geq b\},$$
$$\sigma_i(\omega) = \inf\{s > \tau_{i-1}(\omega) : X_s(\omega) < a\},\ i \geq 1$$

joilla $0 \leq \sigma_i < \tau_i < \sigma_{i+1} < \dots$ Nämä ovat pysähdyshetkiä, koska $\forall t \in \mathbb{N}$ tapahtumat

$$\{\omega : \sigma_i(\omega) \leq t\} \quad \text{ja} \quad \{\omega : \tau_i(\omega) \leq t\}$$

riippuvat ainoastaan prosessin polusta $(X_1(\omega), \dots, X_t(\omega))$, ja siksi ovat $\mathcal{F}_t$-mitallisia.

Määritellään sijoitusstrategia

$$C_t(\omega) = \begin{cases} 1 & t \in (\sigma_i, \tau_i] \text{ joillekin } i \in \mathbb{N} \\ 0 & t \in (\tau_i, \sigma_{i+1}] \end{cases}$$

Koska τ_i ja σ_i ovat pysähdyshetkiä, kaikille $t \in N$

$$\{C_t = 1\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{t \in (\sigma_i, \tau_i]\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\sigma_i \leq (t-1)\} \cap \{\tau_i \leq (t-1)\}^c \in \mathcal{F}_{t-1}$$

Koska $C_t(\omega) \in \{0, 1\}$ on ei-negatiivinen ja rajoitettu ennustettava prosessi, seuraa että martinagaali muunnos

$$Y_t(\omega) = \sum_{s=1}^{t} C_s(\omega) \Delta X_s$$

on myös ylimartingaali, erityisesti $E(Y_t) \leq E(Y_0) = 0$.

Koska

$$Y_t \geq (b-a) U_{[a,b]}([0,t]) - (X_t - a)^-$$

ja koska $E(Y_t) \leq E(Y_0) = 0$, seuraa *Doobin ylitysten-epäyhtälö (upcrossing-inequality)*

$$E_P\big(U_{[a,b]}([0,t])\big) \leq \frac{1}{(b-a)} E_P\big((X_t - a)^-\big)$$

Koska $U_{[a,b]}([0,t])$ on ei-vähenevä, $\forall\omega$ on olemassa

$$U_{[a,b]}([0,\infty),\omega) := \lim_{t\to\infty} U_{[a,b]}([0,t]) \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$$
$$(X_t-a)^- = \max(a-X_t,0) \le |a| + X_t^-$$

seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta

$$E_P\big(U_{[a,b]}([0,\infty))\big) = \lim_{t\to\infty} E_P\big(U_{[a,b]}([0,t])\big) \le \frac{1}{(b-a)}\left(|a|+\sup_{t\in\mathbb{N}} E_P(X_t^-)\right) < \infty$$

Erityisesti $U_{[a,b]}([0,\infty),\omega) < \infty$ P-melkein varmasti.

Olkoon

$$\begin{aligned} N &= \big\{\omega : \liminf_{t\to\infty} X_t(\omega) \lneq \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\big\} \\ &= \bigcup_{a<b\in Q} \big\{\omega : \liminf_{t\to\infty} X_t(\omega) \le a < b \le \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\big\} \\ &= \bigcup_{a<b\in\mathbb{Q}} \big\{U_{[a,b]}([0,\infty),\omega) = \infty\big\} \end{aligned}$$

on P-nolla tapahtumien numeroituva yhdiste, joten $P(N)=0$.

Tämä tarkoittaa että P-melkein varmasti $(X_t(\omega))_{t\in\mathbb{N}}$ suppenee kohti raja-arvoa $X_\infty(\omega) := \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega), \quad \forall\omega\in\Omega$.

A priori $X_\infty(\omega)\in[-\infty,\infty]$, mutta Fatoun lemmasta seuraa

$$E(|X_\infty|) = E(\liminf_t |X_t|) \le \liminf_t E(|X_t|) \le \sup_t E(|X_t|) < \infty,$$

siksi $|X_\infty(\omega)| < \infty$ P-melkein varmasti $\square$.

Seuraus 12.1.1. *Olkoon $(X_t : t\in\mathbb{N})$ alimartingaali jolla $E_P(X_t^+) < \infty$. Silloin, P-melkein varmasti $\exists \lim_{t\to\infty} X_t(\omega) = X_\infty(\omega) \in L^1(P)$.*

Tod. Doobin konvergenssi lause soveltuu ylimartingaalille $(-X_t)$.

Seuraus 12.1.2. *Kun X_t on ei-negatiivinen ylimartingaali, on olemassa P-melkein varmasti raja-arvo $X_\infty(\omega) := \lim_{t\to\infty} X_t(\omega) \ge 0$ jolla $E_P(X_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega) \le X_t(\omega)$ $\forall t<\infty$.*

Tod. Doobin martingaalikonvergenssilause soveltuu koska $X_t^-(\omega) \equiv 0$. Fatou lemmasta ehdolliselle odotusarvolle

$$\begin{aligned} &E_P(X_\infty|\mathcal{F}_t) = E_P(\liminf_u X_u|\mathcal{F}_t) \\ &\leq \liminf_u E_P(X_u|\mathcal{F}_t) \leq X_t \end{aligned}$$

(X_t) on ylimartingaali laajennetulla indeksijoukolla $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ □

12.1.1 Tasaisesti integroituvat martingaaalit

Lause 12.1.1. *Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kokoelma*

$$\big\{ E_P(X|\mathcal{G})(\omega) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ ali } \sigma\text{-algebra } \big\}$$

on tasaisesti integroituva.

Tod. Koska $\{ X\} \subseteq\in L^1(P)$ on tasaisesti integroituva, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ jolla $E_P(|X|\mathbf{1}_A) < \varepsilon$ kun $P(A) < \delta$.

Olkoon $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$, seuraa että $E_P(|Y|\ ) \leq E_P(|X|) < \infty$

$$KP(|Y| > K) \leq E_P(|Y|) \leq E_P(|X|)$$

josta seuraa $P(|Y| > K) < \delta$ kun $K > E_P(|X|)\delta^{-1}$, ja

$$\begin{aligned} &\varepsilon \geq E_P(|X|\mathbf{1}(|Y| > K)) = E_P\big(E_P(|X||\mathcal{G})\mathbf{1}(|Y| > K|)\big) \\ &\geq E_P\big(|Y|\mathbf{1}(|Y| > K)\big) \end{aligned}$$

on voimassa samaan aikaan kaikille ali σ-algebroille $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Seuraus 12.1.3. *Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ja $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T})$ filtraatio. Silloin*

$$M_t(\omega) = E_P(X|\mathcal{F}_t)(\omega) \quad t \in \mathbb{T}$$

on tasaisesti integroituva martingaali.

Teoreema 12.1.2.
- *$\mathbb{F}$-martingaali $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva jos ja vain jos on olemassa satunnaismuuttuja $M_\infty(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$*

  jossa $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_t$ ja

  $M_t(\omega) \to M_\infty(\omega)$ P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä.

- *Kun $\mathbb{F}$-martingaali $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on ei-negatiivinen, erityisesti se on ei-negatiivinen ylimartingaali, seuraa laueseesta 12.1.2 että on olemassa $M_\infty(\omega) \in L^1(P)$ jolla $M_t(\omega) \to M_\infty(\omega)$ P-melkein varmasti ja $E_P(M_\infty | \mathcal{F}_t)(\omega) \leq M_t(\omega) \quad \forall t \in \mathbb{N}$.*

  Silloin $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva ja $M_t(\omega) = E_P(M_\infty | \mathcal{F}_t)(\omega)$ jos ja vain jos $E_P(M_0) = E_P(M_\infty)$.

Tod. Koska $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on rajoitettu $L^1(P)$:ssa koska on tasaisesti integroituva ja

$$\sup_t E_P(|M_t|) \leq K + \sup_{t \in \mathbb{N}} E_P\big(|X_t| \mathbf{1}(|X_t| > K)\big) < \infty.$$

Doobin martingaali konvergenssi lause soveltuu

$$\lim_{t \to \infty} M_t(\omega) = M_\infty(\omega) \qquad P\text{-m.v.}$$

jossa määritellään $\forall \omega$

$$M_\infty(\omega) := \liminf_{t \to \infty} M_t(\omega)$$

$L^1(P)$ konvergenssin karakterisaatiosta seuraa että $M_t \stackrel{L^1(P)}{\to} M_\infty$.

Olkoon $A \in \mathcal{F}_t$, koska $(M_t(\omega) \mathbf{1}_A(\omega) : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva, seuraa kun $\forall u \geq t$

$$E_P(M_t \mathbf{1}_A) = E_P(M_u \mathbf{1}_A) \to E_P(M_\infty \mathbf{1}_A) \text{ kun } u \uparrow \infty \qquad \forall A \in \mathcal{F}_t$$

joka tarkoittaa $E_P(M_\infty | \mathcal{F}_t)(\omega) = M_t(\omega)$.

Kun (M_t) on ei-negatiivinen martingaali, seuraa että

$$M_t - E_P(M_\infty | \mathcal{F}_t) \geq 0$$

jos

$$0 = E_P(M_t) - E_P(M_\infty) = E_P\big(M_t - E_P(M_\infty | \mathcal{F}_t)\big)$$

seuraa että

$$M_t = E_P(M_\infty | \mathcal{F}_t)$$

ja se on tasaisesti integroituva.

Huomautus $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva martingaali, jos ja vain jos (M_t) on martingaali laajennetussa aikaindeksijoukolla $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Esimerkki 12.1.1. *Olkoon $X_t(\omega) \geq 0$ ja P-riippumattomia, joilla $E_P(X_t) = 1$ $\forall t \in \mathbb{N}$. Silloin $M_t(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega)\dots X_t(\omega)$ on $\mathbb{F}$-martingaali jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$.*

Koska M_t on ei-negatiivinen ylimartingaali, seuraa että P-melkein varmasti $\lim_{t\to\infty} M_t(\omega) = M_\infty(\omega) \in L^1(p)$, ja $M_t(\omega) \geq E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega)$.

Jos $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva, seuraa $M_t(\omega) = E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega)$.

12.1.2 Martingaalin takaperäinen konvergenssi

Olkoon $(\mathcal{F}_t : t \in -\mathbb{N})$ filtraatio. Kun $-\infty \leq s \leq t \leq 0$

$$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_t \supseteq \mathcal{F}_s \supseteq \mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{t \in -\mathbb{N}} \mathcal{F}_t$$

jossa $\mathcal{F}_{-\infty}$ on *häntä σ-algebra* .

Teoreema 12.1.3. *(Doobin martingaalin takaperäinen konvergenssilause) Olkoon $(X_t : t \in -\mathbb{N})$ ylimartingaali filtraatiossa $(\mathcal{F}_t : t \in -\mathbb{N})$.*

Tarkastellaan mitä tapahtuu kun $t \downarrow (-\infty)$ ja informaatio pienenee.

1. *P-melkein varmasti on olemassa raja-arvo*

$$X_{-\infty}(\omega) = \lim_{t\to-\infty} X_t(\omega) \in [-\infty, \infty)$$

2. *Kun*

$$\sup_{t\leq 0} E(X_t^+) < +\infty$$

seuraa että $X_{-\infty}(\omega) \in L^1(P)$.

3. *Kun $(X_t : t \in -\mathbb{N})$ on martingaali, koska $X_t = E_P(X_0|\mathcal{F}_t)$ $\forall t \in -\mathbb{N}$ se on on tasaisesti integroituva ja*

$$X_{-\infty}(\omega) = E(X_0|\mathcal{F}_{-\infty})(\omega)$$

eli martingaalin ominaisuus on voimassa lajennetussa aika-indeksi joukossa $\{-\infty\} \cup \mathbb{Z}$, ja $\lim\limits_{t\to-\infty} X_t = X_{-\infty}$ myös $L^1(P)$ konvergenssin mielessä.

Tod. Olkoon $U_{(a,b)}([t,0])$ prosessin (X_t):n (a,b)-ylitysten määrä aikavälissä $[t,0]$, jossa $a<b\in\mathbb{R}$, $t\in-\mathbb{N}$.

Olkoon $C_t(\omega)\in\{0,1\}$ sama ennustettava pelistrategia kuten Doobin etuperäisessa martingaalikonvergenssilauseessa, ja

$$Y_u - Y_t = \sum_{r=t+1}^{u} C_r \Delta X_r \quad t\le u\le 0$$

on ylimartingaali aikaparemetrilla $u\in\{t,t+1,\dots,0\}$. Kun $t<u=0$

$$Y_0(\omega)-Y_t(\omega)\ge U_{(a,b)}([t,0],\omega)-(Y_0(\omega)-a)^-$$

$E(Y_0-Y_t)\le 0$ koska (Y_t) on alimartingaali, josta seuraa

$$E_P(U_{[a,b]}([t,0]))\le \frac{E_P((X_0-a)^-)}{(b-a)}\le\frac{(|a|+E_P(|X_0|)}{(b-a)}$$

ja kuten etuperäisessa martingaalikonvergenssilauseessa

$$X_{-\infty}(\omega):=\limsup_{t\to-\infty}X_t(\omega)=\liminf_{t\to-\infty}X_t(\omega)\quad P\text{-m.v.}$$

Kun X_t on martingaali, on tasaisesti integroituva ja siitä seuraa konvergenssi $L^1(P)$ mielessä.

Alimartingaalin tapauksessa, koska $X_t\le E(X_0|\mathcal{F}_t)$ kun $t<0$, seuraa

$$X_t^+\le E(X_0|\mathcal{F}_t)^+\le E(X_0^+|\mathcal{F}_t)$$

ja Fatou lemmasta seuraa

$$\begin{aligned}E(|X_{-\infty}|)&\le\liminf_t E_P(X_t^+)+\liminf_t E_P(X_t^-)\\&\le E_P(|X_0|)+\sup_t E_P(X_t^-)\end{aligned}$$

Olkoon $A\in\mathcal{F}_{-\infty}\subseteq\mathcal{F}_t\ \forall t\in-\mathbb{N}$. Koska $\big(X_t=E_P(X_0|\mathcal{F}_t):t\in-\mathbb{N}\big)$ on tasaisesti integroituva martingaali, $L^1(P)$-konvergenssin karakterisaation nojalla voidaan ottaa raja-arvoa odotusarvon sisään kun tarkistamme ehdollisen odotusarvon määritelmää, eli

$$E_P(X_0\mathbf{1}_A)=E_P(X_t\mathbf{1}_A)\to E_P(X_\infty\mathbf{1}_A)\quad\forall A\in\mathcal{F}_{-\infty}$$

joka tarkoittaa $X_{-\infty}=E_P(X_t|\mathcal{F}_{-\infty})$.

Teoreema 12.1.4. *(Kolmogorovin vahva suurten lukujen laki)*

Olkoon $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ *riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia jossa* $X_1 \in L^1(P)$*, ja olkoon*

$$S_t(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_t(\omega)$$

Silloin

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} S_t(\omega) = E_P(X_1) \quad P\text{-melkein varmasti ja } L^1(P)\text{:n mielessä.}$$

Tod.

Olkoon $(\mathcal{F}_{-t} : t \in \mathbb{N})$ filtraatio jossa kun $t \leq 0$

$$\mathcal{F}_{-t} = \sigma(S_t, S_{t+1}, \dots),$$

ja martingaali $(M_{-t} : t \in \mathbb{N})$ jossa

$$M_{-t} = E_P(X_1 | \mathcal{F}_{-t})$$

Huomataan että σ-algebran $\mathcal{F}_{-t}$:n sisältämä informaatio vähenee kun $t \uparrow \infty$.

Symmetrisyyden nojalla satunnaisparit (S_t, X_r) ja (S_t, X_1) ovat samoin jakautuneita kun $1 \leq r \leq t$, ja P-riippumattomuusesta seuraa kun $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
&M_{-t} := E_P(X_1|\mathcal{F}_{-t}) = E_P(X_1|S_t, S_{t+1}, S_{t+2}, \dots) \\
&= E_P(X_1|S_t, X_{t+1}, X_{t+2} \dots) = E_P(X_1|\sigma(S_t)) = E_P(X_r|\sigma(S_t)) \quad \forall 1 \leq r \leq t
\end{aligned}$$

eli

$$S_t = E_P(X_1 + \cdots + X_t|\sigma(S_t)) = \sum_{r=1}^{t} E_P(X_r|\sigma(S_t)) = tE_P(X_1|\sigma(S_-))$$

ja $M_{-t}(\omega) = S_t(\omega)/t$ kun $t \geq 0$. Doobin takaperäisestä martingaali-konvergenssi lausesta seuraa P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä on olemassa rajaarvo

$$M_{-\infty}(\omega) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} S_t(\omega) = M_{-\infty}(\omega) \quad P \text{ m.v.}$$

jossa

$$M_{-\infty}(\omega) := \liminf_{t\to\infty} t^{-1} S_t(\omega) \quad \forall\omega$$

Huomataan myös että $\forall\omega \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} S_t(\omega) = \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) + \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=(n+1)}^{t} X_i(\omega)$$
$$= 0 + \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=(n+1)}^{t} X_i(\omega)$$

on $\mathcal{T}_{-n} = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$-mitallinen $\forall n$, on mitallinen häntä σ-algebran $\mathcal{T}_{-\infty}$ suhteen (**??**), koska $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ovat P-riippumattomia Kolmogorovin $0-1$ lemmasta seuraa että $M_{-\infty}(\omega)$ on P-triviaali:

$P(t \le M_{-\infty}) \in \{0,1\}$ $\forall t$ ja $P(M_{-\infty} < \infty) = 1$, siitä seuraa että on olemassa $c \in \mathbb{R}$ jolla $P(M_{-\infty} = c) = 1$.

Siis P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä

$$\frac{1}{t} S_t(\omega) \to c = E_P(X_1|\mathcal{F}_{-\infty})(\omega)$$

Ottaamalla odotusarvoa seuraa

$$c = E_P(M_{-\infty}) = E_P\big(E_P(X_1|\mathcal{F}_{-\infty})\big) = E_P(X_1).$$

Huomautus Symmetriasta seuraasi että $t^{-1}S_t(\omega) = E_P(X_1|\ \sigma(S_t))(\omega)$, ja sen konvergenssi P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä seurasi taperäisestä martingaali-konvergenssi lauseesta. Riippumattomuuden tarvittiin osoittamaan

$$E_P(X_1|\ \sigma(S_t))(\omega) = E_P(X_1|\sigma(S_t, S_{t+1}, S_{t+2} \dots))(\omega)$$

ja että raja-arvo on P-triviaali. Kun luovutaan rippumattomuudesta, raja-arvo on satunnainen. Siihen pohjautuu De Finettin lause. Bruno De Finetti (1906-1985) oli italialainen matematiikko, taloustieteilijä ja filosofi.

12.2 Vaihdettavuus ja De Finettin lause

Määritelmä 12.2.1. *Satunnaisjono $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ joka saa arvot todennäköisyysavaruudessa $(S,\mathcal{S})$ on äärettömään vaihdettavissa (engl. infinitely exchangeable) kun $\forall n$, $t_1,\dots,t_n\in\mathbb{N}$ ja indeksien $\{1,\dots,n\}$ permutaatio π, satunnaisvektorit $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ ja $(X_{t_{\pi(1)}},\dots,X_{t_{\pi(n)}})$ ovat samoin jakautuneita P mitan suhteen.*

Huomataan että kun jono $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ saa arvot $\mathbb{R}$:ssa, kuuten riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen tapauksessa

$$M_{-t}(\omega)=t^{-1}S_t(\omega):=E(X_1|\mathcal{T}_{-t}),\quad t\in\mathbb{N}$$

on martingaali jolla on martingaali jolla on raja-arvo P-melkein varmasti ja $L^1(P)$:mielessä kun $t\to\infty$

$$M_{-\infty}(\omega)=E(X_1|\mathcal{T}_{-\infty})(\omega)$$

Häntä σ-algebra $\mathcal{T}_{-\infty}$ ei tarvitse olla triviaali ja $M_{-\infty}(\omega)$ on aidosti satunnainen.

Määritelmä 12.2.2. *Satunnaismuuttujat $(X_t(\omega):t\in\mathbb{N})$ jotka saavat arvoja todennäköisyysavaruudessa $(S,\mathcal{S})$ ovat ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita ehdolla σ-algebraa $\mathcal{G}$ kun $\forall n$, $t_1,\dots,t_n$, $A_1\dots A_n\in\mathcal{S}$.*

$$P(X_{t_1}\in A_1,\dots,X_{t_n}\in A_n|\mathcal{G})(\omega)=\prod_{i=1}^n P(X_1\in A_i|\mathcal{G})(\omega)\quad P\ m.v$$

Ottaamalla ehdollisen odotusarvon odotusarvoa, seuraa että ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujat ovat äärettömään vaihdettavissa.

Teoreema 12.2.1. *(De Finetti) Olkoon $(S,\mathcal{S})$ Borelin avaruus. Kun satunnaisjono $(X_t(\omega):t\in\mathbb{N})\subseteq S$ on äärettömästi vaihdettavissa P:n suhteen toinen implikaatio on myös voimassa, satunnaismuuttujat ovat ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita ehdolla häntä-σ-algebraa $\mathcal{T}_{-\infty}$ joka tullaan määrittelemään.*

Proof Olkoon

$$\mu_t(dx;\omega)=t^{-1}\sum_{i=1}^t\mathbf{1}(X_i(\omega)\in dx)$$

satunnaismuuttujen $(X_1,\dots,X_t)$ empiirinen mitta joka virittää σ-algebran $\sigma(\mu_t)=\sigma\{\mu_t(A):A\in\mathcal{S}\}\subseteq\mathcal{F}$.

Huomataan että $\sigma(\mu_t)\subseteq\sigma(X_1,\dots,X_t)$, ja kun $t>1$ se on aidosti pienempi koska empiirinen mitta sisältää satunnaismuuttujen arvot mutta unohtaa niiden järjestyksen.

Määritellään vähenevä σ-algebroiden jono

$$\mathcal{T}_{-t}:=\bigvee_{k\geq t}\sigma(\mu_k),\quad \mathcal{T}_{-\infty}=\bigcap_{t\in\mathbb{N}}\mathcal{T}_{-t}\text{ , on häntä-}\sigma\text{-algebra .}$$

Olkoon $k\in\mathbb{N}$ ja $f(x_1,\dots,x_k):S^k\to\mathbb{R}$ rajoitettu ja mitallinen funktio. Kun $t\geq k$ laskemme symmetrian avulla $E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\mathcal{T}_{-t})(\omega)$.

Olkoon $1\leq k\leq t$ ja määritellään satunnaistodennäköisyysmitta

$$\mu_t^{\circ k}:\mathcal{S}^{\otimes k}\to[0,1]$$

joka on säännöllinen versio satunnaisvektorin $(X_1,\dots,X_k)$ ehdollisesta jakaumasta ehdolla $\sigma(\mu_t)$ (joka on olemassa koska $(S,\mathcal{S})$ on Borelin avaruus).

Symmetriasta seuraa

$$\begin{aligned}
&E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\sigma(\mu_t))(\omega)\\
&=\mu_t^{\circ k}(f;\omega):=\int_{S^k}f(x)\mu_t^{\circ k}(dx;\omega)=\frac{1}{t!}\sum_{\pi}f(X_{\pi(1)}(\omega),\dots,X_{\pi(k)}(\omega))\\
&=\frac{(t-k)!}{t!}\sum_{1\leq i_1,\dots,i_k\leq t\text{ eriläisiä}}f(X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_k})
\end{aligned}$$

jossa summa otetaan yli $\{1,\dots,t\}$ joukon permutaatioita π.

Huomataan että $\mu^{\circ k}(dx;\omega)$ on $\sigma(\mu_t)$-mitallinen, koska rippuu vain arvoista $\{X_1(\omega),\dots,X_t(\omega)\}$ eikä niiden järjesyksestä. Huomataan myös että $\mu_t^{\circ k}(dx)$ ei ole tulo mitta, koska summassa ei ole toistuvien indeksien termeja.

Huomataan myös että kun $k=1$

$$\mu_t^{\circ 1}(A)=\mu_t(A)=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}\mathbf{1}(X_k\in A)$$

on otoksen $(X_1(\omega),\dots,X_t(\omega))$:n empiirinen mitta.

Kun $k\le t$ vaihdettavuuden nojalla kaikille $\{1,\dots,t\}$ joukon permutaatiolle π $(X_1,\dots,X_k,\mu_t)$ ja $(X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(k)},\mu_t)$ ovat samoin jakutuneita, josta seuraa

$$E_P(f(X_1,\dots,X_k|\sigma(\mu_t))(\omega)=E_P(f(X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(k)})|\sigma(\mu_t))(\omega)$$

Kun summataan permutaatioiden π:n yli ja jaetaan niiden määrällä saadaan

$$\mu_t^{\circ k}(f;\omega)=E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\sigma(\mu_t))(\omega)$$

Osoitamme seuraavaksi

$$E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\sigma(\mathcal{T}_{-t}))(\omega)=E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\sigma(\mu_t))(\omega)$$

Huomaamme myös että

$$\mathcal{T}_{-t}=\sigma(\mu_t,\mu_{t+1},\mu_{t+2},\dots)=\sigma(\mu_t,X_{t+1},X_{t+2},\dots)$$

koska empiiriset mitat $\mu_t(dx;\omega)$ ja $\mu_{t+1}(dx;\omega)$ määrävät $X_{t+1}(\omega)$ yhtälössä

$$(\mu_{t+1}-\mu_t)(dx)=\frac{1}{t+1}\bigg(\mathbf{1}(X_{t+1}\in dx)-\mu_t(dx)\bigg)$$

Then from infinite exchangeability it follows that in law, for $m\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&(X_1,X_2,\dots,X_n,X_{n+1},X_{n+2},\dots X_{n+m})\\ \overset{\mathcal{L}}{=}\;&(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\dots,X_{\pi(n)},X_{n+1},X_{n+2},\dots X_{n+m})\end{aligned}$$

for any permutation π of $\{1,\dots,n\}$.

Esimerkki 12.2.1. *$(X_1,\dots,X_n)$ ja $(X_{n+1},X_{n+2},\dots)$ ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla $\sigma(\mu_n)$,*

R. *Huomataan ensin että satunnaismuuttuja $W(\omega)$ on $\sigma(\mu_n)$ mitaalinen jos ja vain jos $W(\omega)=g(X_1,\dots,X_n)$ jossa g on mitallinen ja symmetrinen, eli*

$$g(x_1,\dots,x_m)=g(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(m)})\quad\forall\pi \textit{ permutaatiolle .}$$

Oletaamme myös että g on rajoitettu.

Olkoon myös $Y(\omega)$ rajoitettu ja $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$-mitallinen, ja $f(x_1, \dots, x_n)$ rajoitettu $\mathcal{S}^{\otimes n}$ mitallinen, (ei välttämättä symmetrinen) Jonon äärettömästä vaihdettavuudesta seuraa $\forall n \in \mathbb{N}$ ja kaikille $\{1, \dots, n\}$ indeksien permutaatioille π, jonot

$$(X_1, X_2, \dots X_n, X_{n+1}, X_{n+1}, \dots) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots X_{\pi(n)}, X_{n+1}, X_{n+1}, \dots)$$

ovat samoin jakautuneita P-mitan suhteen

$$\begin{aligned}
&E_P(Y\ W\ f(X_1, \dots, X_n))E_P(Y\ g(X_1, \dots, X_n)\ f(X_1, \dots, X_n)) \\
&= E_P(Y\ g(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})\ f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) \\
&\quad \text{(koska jono on vaihdettavissa)} \\
&= E_P(Y\ g(X_1, \dots, X_n)\ f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) = E_P(Y\ W\ f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) \\
&\quad \text{(koska } g \text{ on symmetrinen)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} E_P\Big(YWf(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})\Big) = E_P\Big(YW \frac{1}{n!} \sum_{\pi} f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})\Big) \\
&= E_P\big(Y\ W\ \mu_n^{\circ n}(f)\big)
\end{aligned}$$

Ehdollinen odotusarvon määritelmästä seuraa että

$$E_P\big(f(X_1, \dots, X_n)\big|\sigma(\mu_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)\big)(\omega) = \mu_n^{\circ n}(f; \omega) = E_P\big(f(X_1, \dots, X_n)\big|\sigma(\mu_n)\big)(\omega)$$

eli $(X_1, \dots, X_n)$ ja $(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ ovat ehdollisesti P-rippumattomia ehdolla $\sigma(\mu_n)$.

Toisin sanoen, $\mathcal{T}_{-n}$ ei sisällä informatioota jono ensimmäisten n-arvojen järjesyksestä.

Koska $M_{-t}^{(k)}(f) := \mu_t^{\circ k}(f)$ on martingaali filtratiossa $(\mathcal{T}_{-t} : t \in \mathbb{N})$, Doobin takaperäisestä martingaalikonvergenssi lauseesta seuraa että kun $t \to \infty$, on olemassa rajaarvo $M_{-\infty}^{(k)}(f)$ P-melkein varmasti ja $L^1(P)$:ssa.

Koska $(X_1, \dots, X_k)$ saa arvot Borel avaruudessa, ehdollisella todennäköisyydellä

$$P((X_1, \dots, X_k) \in A|\mathcal{T}_{-\infty})(\omega), \quad A \in \mathcal{S}^{\otimes k}$$

on säännöllinen versio,

eli $\mathcal{T}_{-\infty}$-mitallinen todennäköisyysydin $\mu_{\infty}^{\circ k}(dx;\omega)$ on $(S_1 \times \cdots \times S_k)$ jolla P-melkein varmasti kaikille rajoitetuille ja mitalliseille funktioille

$$M_{-\infty}^{(k)}(f;\omega) = E_P(f(X_1,\ldots,X_k)|\sigma(\mathcal{T}_{-\infty}))(\omega)$$
$$= \int_{S_1,\ldots,S_k} f(x_1,\ldots,x_k)\mu_{\infty}^{\circ k}(dx_1,\ldots dx_k;\omega)$$

Kun $k=1$ merkitään $\mu_\infty = \mu_\infty^{\circ 1}$, jossa

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} f(X_i(\omega)) = \int\limits_S f(x)\mu_\infty(dx,\omega) \qquad P\text{-m.v.}$$

Esimerkki 12.2.2. *Koska $(S,\mathcal{S})$ on Borelin avaruus, on olemassa mitallinen injektio $f:(S,\mathcal{S})\to([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ jolla on mitallinen käänteiskuvaus f^{-1}. Tästä seuraa että kun $A\subseteq\mathcal{S}$, $A\in\mathcal{S}$ jos ja vain jos $f(A)$ on Borelin joukko. Koska*

$$\sigma\big\{(a,b] : 0\le a<b\le 1,\ a,b\in\mathbb{Q}\big\} = \mathcal{B}([0,1])$$

seuraa että myös $\mathcal{S}$ on numeroituvasti generoitu, koska

$$\mathcal{S} = \sigma\big\{f^{-1}((a,b]\cap f(S)) : 0\le a<b\le 1, a,b\in\mathbb{Q}\big\} = \sigma\big\{A(\ell):\ell\in\mathbb{N}\big\}$$

A priori tiedetään että $\forall A\in\mathcal{S}$, $\exists\mathcal{N}_A\subseteq\Omega$ jolla $P(\mathcal{N}_A)=0$ ja

$$\mu_t(A;\omega)\to\mu_\infty(A;\omega) \quad \forall\omega\notin\mathcal{N}_A$$

Koska $P(\mathcal{N})=0$ jossa $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{\ell\in\mathbb{N}}\mathcal{N}_{A(\ell)}$, seuraa että

$$\mu_t(A_\ell;\omega)\to\mu_\infty(A_\ell;\omega) \quad \forall\ell\in\mathbb{N} \quad \forall\omega\notin\mathcal{N}$$

ja koska $\sigma\{\,A_\ell:\ell\in\mathbb{N}\}=\mathcal{S}$ seuraa että $\forall A\in\mathcal{S}$

$$\mu_t(A;\omega)\to\mu_\infty(A;\omega) \quad \forall A\in\mathcal{S} \quad \forall\omega\notin\mathcal{N} \tag{12.2.1}$$

Samoin löytyy nolla mittainen joukko $\widetilde{\mathcal{N}}\subseteq\Omega$ jolla $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall\{\,A_i\}\subseteq\mathcal{S}$

$$\mu_t^{\circ k}(A_1\times\cdots\times A_k;\omega)\to\mu_\infty^{\circ k}(A_1\times\cdots\times A_k;\omega) \quad \forall\omega\notin\widetilde{\mathcal{N}} \tag{12.2.2}$$

P-melkein varmasti äärellisulotteisten jakaumien kokoelma

$$\Big\{\mu_\infty^{\circ k}(dx_1, \dots dx_k; \omega) : k \in \mathbb{N}\Big\}$$

on yhteensopiva (tarkista!), ja Kolmogorovin laajennuslauseesta 2.0.1 seuraa että on olemssa satunnaismitta $\boldsymbol{\nu}_\infty(\ \cdot\ ;\omega)$ jonojen $(x_k : k \in \mathbb{N}) \subseteq S$ avaruudessa jolla $\forall k$, $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{S}$

$$P\big(X_1 \in A_1, \dots X_k \in A_k | \mathcal{T}_{-\infty})(\omega) =$$
$$\mu_\infty^{\circ k}(A_1 \times \dots \times A_k; \omega) = \boldsymbol{\nu}_\infty\big(\big\{(x_l : l \in \mathbb{N}) : x_1 \in A_1, \dots, x_k \in A_k\big\}; \omega\big)$$

Näytän että P-melkein varmasti $\boldsymbol{\nu}_\infty(\cdot;\omega)$ on satunnaismitan kopioiden ääretön tulomitta, eli $\forall k$

$$P\big(X_1 \in A_1, \dots X_k \in A_k | \mathcal{T}_{-\infty})(\omega) = \prod_{i=1}^{k} P(X_1 \in A_i | \mathcal{T}_{-\infty})(\omega)$$

Olkoon $\mu_t^{\otimes k}$ k-kertainen tulomitta empiirisestä mitasta μ_t. Kun $f(x_1, \dots, x_k)$ rajoitettu ja Borel mitallinen,

$$\mu_t^{\otimes k}(f) = t^{-k} \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le t} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$$

joka sisältää myös termeja joissa on toistettuja indekseja. Silloin

$$(\mu_t^{\circ k} - \mu_t^{\otimes k})(f) = \mu_t^{\circ k}(f) - \mu_t^{\otimes k}(f) =$$
$$\mu_t^{\circ k}(f)\left(1 - \frac{t!}{t^k (t-k)!}\right) + t^{-k} \sum_{1 \le i_1, \dots i_k \le t:\ \exists l \ne m\ i_l = i_m} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$$

jossa ensimmäisessä osassa on termeja ilman toistettuja indekseja ja toisessa osassa kaikissa termeissä vähintään yksi satunnaismuuttuja on toistettu. Silloin $\forall k \in \mathbb{N}$,$\omega \in \Omega$,

$$|\mu_t^{\circ k}(f;\omega) - \mu_t^{\otimes k}(f;\omega)|$$
$$\le \| f \|_\infty \left(1 - \prod_{l=0}^{k-1} \frac{(t-l)}{t} + t^{-k} \binom{k}{2} t^{k-1}\right) \to 0 \text{ kun } t \to \infty$$

jossa $\| f \|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|$ ja arvio ei riipu ω:sta

Kaikille $A_1, A_2 \dots \in \mathcal{S}$, $\forall k$ P-melkein varmasti kun $t \to \infty$

$$\mu_t^{\circ k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) \to \mu_\infty^{\circ k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)$$

ja kun $k = 1$

$$\mu_t^{\circ 1}(A_i) \to \mu_\infty(A_i),$$

kovergenssi seuraa myös tulomitoille

$$\mu_t^{\otimes k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = \prod_{i=1}^k \mu_t^{\circ 1}(A_i) \to \prod_{i=1}^k \mu_\infty(A_i) = \mu_\infty^{\otimes k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k).$$

Kolmio epäyhtälöstä

$$\begin{aligned} &|\mu_{-\infty}^{\circ k}(f) - \mu_{-\infty}^{\otimes k}(f)| \\ &\le |\mu_{-\infty}^{\circ k}(f) - \mu_t^{\circ k}(f)| + |\mu_t^{\circ k}(f) - \mu_t^{\otimes k}(f)| + |\mu_t^{\otimes k}(f) - \mu_\infty^{\otimes k}(f)| \to 0 \end{aligned}$$

P-m.v. kun $t \to \infty$, ja

$$\mu_\infty^{\circ k}(f;\omega) = \mu_\infty^{\otimes k}(f;\omega) \qquad P\text{-a.s}$$

kaikille rajoitetuille mitallisille $f(x_1, \dots, x_k)$. Se tarkoittaa Kolmogorovin laajennus $\boldsymbol{\nu}_\infty$ on tulomitta jonojen avaruudessa $S^{\mathbb{N}}$. Rajoitetuille mitalliselle funktiolle $g_1, \dots, g_k : S \to \mathbb{R}$

$$E_P(g_1(X_1)\dots g_k(X_k)|\mathcal{T}_{-\infty})(\omega) = \prod_{i=1}^k \left\{ \int_S g_i(x)\mu_\infty(dx,\omega) \right\}$$

Ottaamalla odotusarvoa seuraa

$$\begin{aligned} &E_P(g_1(X_1)\dots g_k(X_k)) \\ &= E_P\left(\int_S g_i(x)\mu_\infty(dx) \right) = \int_{\mathcal{M}(S)} \left\{ \prod_{i=1}^k \int_S g_i(x)\mu(dx) \right\} Q(d\mu) \end{aligned}$$

jossa Q on satunnaismitan $\mu_\infty(dx;\omega)$ jakauman avaruudessa

$$\mathcal{M}(S) = \left\{ \text{ todennäköisyys mittoja } \nu : \mathcal{S} \to [0,1] \right\}$$

Toisin sanoen, permutaatio-symmetrinen (eli äärettömästi vaihdettavissa) satunnaismuuttujen jono joka saa arvot Borelin avaruudessa, on riippumattomien ja samoin jakautuneiden jonojen sekoitus $\square$

Esimerkki 12.2.3. *De Finetti todisti ensin lauseensa yksinkertaisimmissa tapauksessa, binaarijonoille, jossa* $S = \{0,1\}$*. Silloin* $\mathcal{M}(S) = [0,1]$.

Olkoon $S_t(\omega) = (X_1(\omega) + \cdots + X_t(\omega))$.

Jos kolikkoheittojenjono on äärettömästi vaihdettavissa P*-mitan suhteen, raja-arvo* $\vartheta(\omega) := \lim_{t\to\infty} t^{-1} S_t(\omega) \in [0,1]$ *on olemassa* P*-melkein varmasti ja* $L^1(P)$*:ssa* .

Olkoon $Q(d\theta) = P(\{\omega : \vartheta(\omega) \in d\theta\})$*. Kun ehdollistetaan* σ*-algebraan* $\sigma(\vartheta)$*, kolikonheitot ovat ehdollisesti riippumattomia ja Bernoulli jakautuneita, samalla satunnais-todennäköisyysparametrilla* $\vartheta(\omega) \in [0,1]$*. Raja-arvon todennäköisyysmitta* $Q(d\theta)$ *tulkitaan prioritodennäköisyydeksi parametrille* ϑ*. Silloin* $\forall k$*,* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \{0,1\}$*,*

$$P\big(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k\big) = \int_0^1 \left\{ \prod_{i=1}^k P(X_1 = x_i | \vartheta = \theta) \right\} Q(d\theta)$$
$$\int_0^1 \theta^{S_k} (1-\theta)^{(k-S_k)} Q(d\theta)$$
$$Q(B) = P\big(\{\omega : \lim_{t\to\infty} t^{-1} S_t(\omega) \in B\}\big), \quad B \in \mathcal{B}([0,1])$$

De Finettin lause on avain Bayeslaiseen päättelyyn.

Luku 13

Radon-Nikodymin lause

Määritelmä 13.0.1. *Olkoon μ ja ν positiiivisia mittoja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra*

ν on absoluttisesti jatkuva μ:n suhteen ali σ-algebrassa $\mathcal{G}$, kun

$$A \in \mathcal{G},\ \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$$

Silloin merkitään $\nu \overset{\mathcal{G}}{\ll} \mu$.

Kun $\mu \ll \nu$ ja $\nu \ll \mu$ mitat ovat eqvivalentteja, niillä on samat nolla-mittaiset joukot, ja merkitään $\mu \sim \nu$.

Lemma 13.0.1. *Olkoon $Q \ll P$ todennäköisyysmittoja avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$.*

$\forall \varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ jolla

$$A \in \mathcal{F},\ P(A) < \delta \Longrightarrow Q(A) < \varepsilon$$

Tod. Muuten on olemassa $\varepsilon > 0$ ja jono $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ jolla $P(A_n) \leq 2^{-n}$ ja $Q(A_n) \geq \varepsilon > 0$ Borel Cantelli lemmasta $P(\limsup A_n) = 0$. Käänteisestä Fatou lemmasta seuraa

$$Q(\limsup A_n) \geq \limsup Q(A_n) \geq \varepsilon > 0$$

joka on ristiriidassa oletuksen $Q \ll P$ kanssa □

Teoreema 13.0.1. *(Radon-Nikodym) Olkoon μ ja ν σ-äärellisia positiivisia mittoja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$. Kun $\nu \overset{\mathcal{F}}{\ll} \mu$, on olemassa $\mathcal{F}$-mitallinen* *kuvaus* $Z : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$*, jolla pätee mitan vaihto kaava*

$$\nu(A) = \int_\Omega Z(\omega)\mathbf{1}_A(\omega)\mu(d\omega) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Tod Koska μ ja ν are σ-äärellisiä, on olemassa numeroituva mitallinen ositus $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ jolla $\mu(\Omega_n) < \infty$ and $\nu(\Omega_n) < \infty \; \forall n$. Kun otamme $P_n(d\omega) = \mu(d\omega)/\mu(\Omega_n)$ ja $Q_n(d\omega) = \nu(d\omega)/\nu(\Omega_n)$ jokaiselle Ω_n, huomaamme että lause seuraa yleisesti kun se todistetaan todennäköisyysmitoille $Q \ll P$.

Oletamme ensin että σ-algebra $\mathcal{F}$ on numeroituvasti viritettävässä tai *separoituva* , eli $\mathcal{F} = \sigma(F_n : n \in N)$ jossa $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, esimerkiksi silloin $(\Omega, \mathcal{F})$ on Borelin avaruus.

Olkoon filtraatio $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ jossa $\mathcal{F}_n = \sigma(F_1, \dots, F_n)$, ja $\mathcal{F} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Kaikille $n \in \mathbb{N}$, ottaamalla leikkauksia joukoista $F_1, \dots F_n$, löytyy Ω:n $\mathcal{F}_n$-mitallinen ositus $\{A_1^{(n)}, \dots, A_{m_n}^{(n)}\}$ jolla $\mathcal{F}_n = \sigma(A_k^{(n)} : k = 1, \dots, m_n)$.

Määritellään $\mathcal{F}_n$ mitallinen satunnaismuuttuja

$$Z_n(\omega) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{Q(A_k^{(n)})}{P(A_k^{(n)})} \mathbf{1}(\omega \in A_k^{(n)})$$

jossa $0/0$ saa mielivaltainen arvo, esimerkiksi 0.

Koska $Q \ll P$, seuraa että $Q(A_k^{(n)}) = 0$ kun $P(A_k^{(n)}) = 0$, siksi $Z_n(\omega) \in [0, +\infty)$.

Seuraa määritelmästä että $Z_n(\omega)$ on $\mathcal{F}_n$-mitallinen, $Q(A_k^{(n)}) = E_P(Z_n \mathbf{1}_{A_k^{(n)}})$, $k \in \{1, \dots, m_n\}$, ja siksi $E_Q(X) = E_P(Z_n X)$ kun X on $\mathcal{F}_n$-mitallinen satunnaismuuttuja.

Huomataan myös että $Z_n(\omega)$ on P-integroituva (koska saa äärellisesti monta arvoa) $E_P(Z_n) = Q(\Omega) = 1$.

Näytämme että satunnaisjono $(Z_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ on $(P, \{\mathcal{F}_n\})$-martingaali.

Olkoon $A_k^n = \bigcup_{j=1}^m A_{\ell_j}^{n+1}$ joillekin m, $\ell_1, \dots, \ell_m$.

$$E_P(Z_n \mathbf{1}_{A_k^n}) = Q(A_k^n) = \sum_{j=1}^m Q(A_{\ell_j}^{n+1}) = \sum_{j=1}^m E_P\big(Z_{n+1} \mathbf{1}_{A_{\ell_j}^{n+1}}\big) = E_P(Z_{n+1} \mathbf{1}_{A_k^n})$$

josta seuraa

$$E_P(Z_n \mathbf{1}_A) = Q(A) = E_P(Z_{n+1}\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_n$$

ja martingaali ominaisuus seuraa ehdollisen odotusarvon määritelmästä

$$E_P(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n)(\omega) = Z_n(\omega).$$

Määritellän kaikille $\omega \in \Omega$

$$Z_\infty(\omega) := \limsup_{n\to\infty} Z_n(\omega) \ .$$

Koska $(Z_n(\omega)) \geq 0$ Doobin etuperäinen martingaalikonvergenssi lauseesta seuraa että P melkein varmasti

$$Z_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} Z_n(\omega)$$

jolla $Z_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja $E_P(Z_\infty) \leq E_P(Z_1) = 1$.

Osoitan että $Q(A_n) = E_P(Z_\infty \mathbf{1}_{A_n})\ \forall n, A_n \in \mathcal{F}_n$, ja koska nämä virittävät $\mathcal{F}$ σ-algebran, seuraa $Q(A) = E_P(Z_\infty \mathbf{1}_A)\ \forall A \in \mathcal{F}$.

Koska $Q(A_n) = E_P(Z_m A_n)$ kun $m \geq n$, yhtälö

$$E_P(Z_\infty A_n) = \lim_{m\to\infty} E_P(Z_m \mathbf{1}_{A_n}) = Q(A_n)$$

seuraa L^1 konvergenssin karakterisaatiosta kun osoitamme että P-martingaali (Z_n) on P-tasaisesti integroituva.

Koska $Q \ll P$, lemman13.0.1 nojalla kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ jolla kun $A \in \mathcal{F}$ ja $P(A) < \delta$ seuraa $Q(A) < \varepsilon$.

Chebychevin epäyhtälöstä

$$P(Z_n > K) < K^{-1} E_P(Z_n) = K^{-1} \quad \forall n$$

Kun valitaan $K > \delta^{-1}$, koska $\{\omega : Z_n(\omega) > K\} \in \mathcal{F}_n$, mitanvaihto kaavasta

$$\sup_n E_P(Z_n \mathbf{1}(Z_n > K)) = \sup_n Q(Z_n > K) < \varepsilon$$

joka tarkoittaa tasaista integroituvuutta:

$$\lim_{K\to\infty} \sup_n E_P(Z_n \mathbf{1}(Z_n > K)) = 0$$

Siis lause on todistettu silloin kun σ-algebra $\mathcal{F}$ on separoituva.

Yleisemmin joudumme käyttämään yleistettyjen jonojen konvergenssia.

Muistetaan määritelmä topologian kurssista:

Määritelmä 13.0.2. *Topologisessa avaruudessa $(E, \mathcal{T})$ verkko (engl. net) on yleistetty jono $(x_\alpha : \alpha \in \mathcal{I})$ jossa indeksi joukko $(I, \leq)$ on suunnattu, eli osittain järjestetty joukko jolla kaikille $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ on olemassa $(\alpha \vee \beta) \in I$ jolla*

$$\alpha \vee \beta \geq \alpha,\ \alpha \vee \beta \geq \beta,\ \gamma \geq \alpha \text{ ja } \alpha \geq \beta \Longrightarrow \gamma \geq \alpha \vee \beta$$

$x_\alpha \to x \in E$ kun kaikille avoimille $U \ni x$, $\exists \bar{\alpha}$ jolla $x_\alpha \in U\ \forall \alpha \geq \bar{\alpha}$.

$(\mathbb{G}, \subseteq)$ on suunnattu joukko, jossa

$$\mathbb{G} := \left\{ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} : \mathcal{G} \text{ on separoituva ali-}\sigma\text{-algebra} \right\}$$

Kun $\mathcal{G}\prime, \mathcal{G}'' \in \mathbb{G}$ ovat separoituvia, myös $\mathcal{G}\prime \vee \mathcal{G}'' := \sigma(\mathcal{G}\prime, \mathcal{G}'')$ on separoituva ali-σ-algebra. $(\mathbb{G}, \subseteq)$ on verkko.

Kun $\mathcal{G}$ on separoituva tiedämme että on olemassa satunnaismuuttuja $0 \leq Z_{\mathcal{G}}(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ jolla mitan vaihto kaavassa on voimassa

$$Q(A) = E_P(Z_{\mathcal{G}} \mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Osoitamme että $(Z_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \in \mathbb{G})$ on Cauchy-verkko $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$:ssa, ja täydellisyydestä seuraa että on olemassa raja $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Osoitan että $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa $\overline{\mathcal{G}} \in \mathbb{G}$ jolla kun $\mathcal{G}\prime \supseteq \overline{\mathcal{G}}$, $\mathcal{G}'' \supseteq \overline{\mathcal{G}}$, $\mathcal{G}\prime, \mathcal{G}'' \in \mathbb{G}$, seuraa

$$E_P\big(|Z_{\mathcal{G}\prime} - Z_{\mathcal{G}''}|\big) < \varepsilon$$

Yhtäpitävästi, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{\mathcal{G}}$ separoituva σ-algebra jolla kun $\overline{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}\prime$ separoituva, seuraa

$$E_P\big(|Z_{\overline{\mathcal{G}}} - Z_{\mathcal{G}\prime}|\big) < \varepsilon$$

Jos $(Z_{\mathcal{G}})$ ei olisi Cauchy verkko löytyisi $\varepsilon > 0$ ja ei-vähenevä jono $(\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{G}$

$$E_P\big(|Z_{\mathcal{G}_n} - Z_{\mathcal{G}_{n+1}}|\big) \geq \varepsilon > 0$$

Olkoon $\mathcal{G}_\infty = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$, joka on myös separoituva.

Kuten todistuksen ensimmäisessä vaiheessa seuraa että

$$Z_{\mathcal{G}_n}(\omega) = E_P(Z_{\mathcal{G}_\infty}|\mathcal{G}_n)(\omega) \to Z_{\mathcal{G}_\infty}(\omega)$$

on tasaisesti integroituva martingaali joka suppenee P-melkein varmasti ja $L^1(P)$:n mielessä, joka on ristiriidassa (13) kanssa.

Täydellisessä metrisessa avaruudessa (E, d) jokainen Cauchy verkko $(x_\alpha : \alpha \in \mathcal{I})$ suppenee, eli on olemassa $x^* \in E$ jolla $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{\alpha}$ jolla $d(x^*, x_\alpha) \leq \varepsilon\ \forall \alpha \geq \overline{\alpha}$.

Todistamme myös tätä väiteettä, joka seuraa numeroituvien Cauchyn jonojen suppenemisesta.

Olkoon $\overline{\alpha}_n, n \in \mathbb{N}$ jolla $d(x_{\overline{\alpha}_n}, x_\alpha) \leq n^{-1}\ \forall \alpha \geq \overline{\alpha}_n$, ja valitaan $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$.

$\overline{x}_n := x_{\overline{\alpha}_n}$ on Cauchyn jono jolla on raja-arvo $x^* \in E$, joka on myös verkon (x_α) raja-arvo, koska kun n on tarpeeksi suuri jolla $d(x^*, x_{\overline{\alpha}_n}) < \varepsilon$ ja $n > (1/\varepsilon)$, seuraa $\forall \alpha \geq \overline{\alpha}_n$

$$d(x_\alpha, x^*) \leq d(x_\alpha, x_{\overline{\alpha}_n}) + d(x_{\overline{\alpha}_n}, x^*) < 2\varepsilon$$

Siksi yleistetyllä Cauchyn jonolla $(Z_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \in \mathbb{G})$ on raja-arvo $Z_\infty(\omega)$ $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$:n normissa.

Seuraavaksi osoitaamme että mitänvaihtokaava pätee.

Olkoon $A \in \mathcal{F}$ ja $\mathcal{G} \in \mathbb{G}$ jolla

$$E_P(|Z_\infty - Z_{\mathcal{G}\prime}|) < \varepsilon$$

kaikille $\mathcal{G}\prime \supseteq \mathcal{G}$, $\mathcal{G}\prime \in \mathbb{G}$.

Olkoon $\widetilde{\mathcal{G}} := \sigma(\mathcal{G} \vee F) \in \mathbb{G}$.

Koska $A \in \widetilde{\mathcal{G}}$

$$Q(A) = E_P(Z_{\widetilde{\mathcal{G}}}\mathbf{1}_A)$$

seuraa

$$\left|E_P(Z_\infty \mathbf{1}_A) - Q(A)\right| \le E_P\left(\left|Z_\infty - Z_{\widetilde{\mathcal{G}}}\right|\right) < \varepsilon$$

jossa $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen pieni $\square$

Luku 14

Johdatus Cramerin suurten poikkeamien teoriaan

Lause 14.0.1. *(Heikko suurten lukujen laki) Olkoon* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^2(P)$ *satunnaismuuttujen jono joilla* $E(X_n) = 0$

$$E_P(X_n^2) \le c < \infty \; \forall n \quad , \quad E_P(X_n X_m) = 0 \quad \text{kun } n \neq m$$

Merkitään $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$ *ja otoksen keskiarvo* $\overline{S}_n(\omega) = n^{-1} S_n(\omega)$.

Silloin $\overline{S}_n \to 0$ $L^2(P)$*-mielessä ja stokastisesti kun* $n \uparrow \infty$.

Samoin, kun $E_P(X_n) = \mu \; \forall n$*, seuraa* $\overline{S}_n \to \mu$ $L^2(P)$*-mielessä ja stokastisesti.*

Tod.

$$E_P(\overline{S}_n^2) = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^n E_P(X_i^2) + \sum_{i=1}^n \sum_{1 \le j < i} E_P(X_i X_j)\right\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n E_P(X_i^2) \le \frac{c}{n}$$

Stokastinen konvergenssi seuraa L^2-konvergenssista □

Huomautus 14.0.1. *Stokastisesta konvergenssista seuraa* $P(\bar{S}_n \ge x) \to 0 \; \forall x > \mu$*. Suurten poikkeamien teoria kertoo (tietyillä oletuksilla) että suppeneminen on eskponentiaalinen otoskoon* n *suhteen ja miten vauhti rippuu* x*:sta.*

Määritelmä 14.0.1. *Jono* $\{a(n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *on subadditiivinen kun*

$$a(n+m) \le a(n) + a(m) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Lemma 14.0.1. *Olkoon* $\{a(n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *subadditiivinen. Silloin*

1.

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a(n)}{n}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{n} = +\infty \iff a(n) = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tod. Olkoon $n > m \geq N$, $n = (qm + r)$ jossa $1 \leq r \leq m$, $q \in \mathbb{N}$. Subadditiivisuudesta,

$$\begin{aligned}
&a(n) \leq a(qm) + a(r) \leq qa(m) + \max_{1\leq r\leq m} a(r) \\
&\frac{a(n)}{n} \leq \frac{q}{n} a(m) + \frac{1}{n} \max_{1\leq r\leq m} a(r) \\
&\Longrightarrow \limsup_n \frac{a(n)}{n} \leq \frac{a(m)}{m} \quad \forall m \geq N \\
&\Longrightarrow \limsup_n \frac{a(n)}{n} \leq \inf_{m\geq N} \frac{a(m)}{m} \leq \liminf_m \frac{a(m)}{m}
\end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\limsup_n \frac{a(n)}{n} = \liminf_n \frac{a(n)}{n} = \lim_n \frac{a(n)}{n}$$

Väite seuraa kun osoitamme

$$\inf_{k<N} \frac{a(k)}{k} \geq \inf_{m\geq N} \frac{a(m)}{m} \tag{14.0.1}$$

Tämä on selvä jos $a(m) = \infty$ $\forall 0 < m < N$. Muuten $a(k) < \infty$ jollekin $0 < k < N$, ja subadditiivisuudesta seuraa

$$\frac{a(kN)}{kN} \leq \frac{a(k)}{k}$$

jossa $k < N \leq kN$, Tästä seuraa (14.0.1):

$$\inf_{k<N} \frac{a(k)}{k} \geq \inf_{k<N} \frac{a(kN)}{kN} \geq \inf_{m\geq N} \frac{a(m)}{m} \quad \square$$

Teoreema 14.0.1. *Olkoon satunnaismuuttujat $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ P-rippumattomia ja samoin jakautuneita. Silloin*

1. *funktio*

$$h(x) := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n > x) = \Big(-\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n > x)\Big) \in [0, +\infty]$$

on hyvin määritelty

2. $h(x)$ *on ei-vähenevä ja konveksi.*

3. $h(x) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad P(X_1 \geq x) > 0$

$h(x)$ *on jonon* $(\overline{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vauhtifunktio*

Tod.

1. Koska

$$P\big(\overline{S}_{n+m} > x\big) = P\big(S_{n+m} > (n+m)x\big) \geq P\big(\{S_n > nx\} \cap \{S_{n+m} - S_n > mx\}\big) = P\big(S_n > nx\big)P\big(S_m > mx\big) = P\big(\overline{S}_n > x\big)P\big(\overline{S}_m > x\big)$$

jono $a(n) := -\log P(\overline{S}_n > x)$ on subadditiivinen ja väite seuraa lemmasta 14.0.1.

2. Tod.

$$P\bigg(\overline{S}_{2n} > \frac{x+y}{2}\bigg) = P\big(S_{2n} > n(x+y)\big) \geq P\big(\overline{S}_n > x\big)P\big(\overline{S}_n > y\big)$$
$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2n} \log P(\overline{S}_{2n} > \frac{x+y}{2}) \leq -\frac{1}{2}\bigg(\frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n > x) + \frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n > y)\bigg)$$

kun $n \uparrow \infty$ seuraa

$$h(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}\bigg(h(x) + h(y)\bigg)$$

Tämä ominaisuus kutsutaan *keskipiste-konveksisuudeksi* . Seuraa että jatkuva kuvaus on konveksi jos ja vain jos se on keskipistekonveksi (harjoitustehtävä). Tässä osoitamme että ei-vähenevä kuvaus on konveksi jos ja vain jos se on keskipistekonveksi.

Osoitamme

$$h\big(\alpha x+(1-\alpha)y\big)\le \alpha h(x)+(1-\alpha)h(y) \qquad (14.0.2)$$

dyadisille luvuille $\alpha=k2^{-N},\ k=0,\dots,2^N$, $N\in\mathbb{N}$.

Väite on jo osoitettu kun $N=1$ $\alpha=\alpha_1=0,\frac{1}{2},1$. Oletamme induktiohypoteesia: (14.0.2) on voimassa kun $\alpha=k2^{-n}$ $k=0,\dots,2^n$, $1\le n<N$. Olkoon

$$\alpha_N:=(2k+1)2^{-N}=\frac{\alpha_{N-1}^-+\alpha_{N-1}^+}{2}$$

jossa $\alpha_{N-1}^-:=k2^{-(N-1)},\ \alpha_{N-1}^+:=(k+1)2^{-(N-1)}$.

$$\begin{aligned}
&h(x\alpha_N+y(1-\alpha_N))\\
&=h\left(\frac{1}{2}\big(x\alpha_{N-1}^-+y(1-\alpha_{N-1}^-)\big)+\frac{1}{2}\big(x\alpha_{N-1}^++y(1-\alpha_{N-1}^+)\big)\right)\\
&\text{(keskipiste-konveksisuus)}\\
&\le\frac{1}{2}h\left(x\alpha_{N-1}^-+y(1-\alpha_{N-1}^-)\right)+\frac{1}{2}h\left(x\alpha_{N-1}^++y(1-\alpha_{N-1}^+)\right)\le\\
&\text{(induktio)}\\
&\le\frac{1}{2}\left(\alpha_{N-1}^-h(x)+(1-\alpha_{N-1}^-)h(y)\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha_{N-1}^+h(x)+(1-\alpha_{N-1}^+)h(y)\right)\\
&=\alpha_Nh(x)+(1-\alpha_N)h(y)
\end{aligned}$$

eli (14.0.2) on voimassa myös kun $n=N$ ja induktiosta seuraa kaikille dyadisille luvuille α.

Olkoon $\alpha\in[0,1]$ ja $x\ge y$, joten $h(x)\ge h(y)$. $\forall N$ on olemassa dyadinen α_N jolle $0\le(\alpha_N-\alpha)\le 2^{-N}$.

$$\begin{aligned}
&\alpha h(x)+(1-\alpha)h(y)=\alpha_Nh(x)+(1-\alpha_N)h(y)+(\alpha-\alpha_N)(h(x)-h(y))\\
&\ge h(\alpha_Nx+(1-\alpha_N)y)+(\alpha-\alpha_N)(h(x)-h(y))\\
&\ge h(\alpha x+(1-\alpha)y)+(\alpha-\alpha_N)(h(x)-h(y))
\end{aligned}$$

koska $\alpha_N(x-y)+y\ge\alpha(x-y)+y$, h on ei-vähenevä, ja $0\le(\alpha_N-\alpha)<2^{-N}$ on mielivaltainen pieni seuraa $\forall\alpha\in[0,1]$

$$\alpha h(x)+(1-\alpha)h(y)\ge h(\alpha x+(1-\alpha)y)$$

3. Koska jono $\big(-\log(P(\overline{S}_n > x) : n \in \mathbb{N}\big)$ on subadditiivinen,

$$h(x) = +\infty \iff P(\overline{S}_n > x) = 0 \iff P(X_1 > x) = 0 \quad \square$$

Määritelmä 14.0.2. $\Lambda_X(t) := \log E_P\big(\exp(tX_1)\big) = \log m_X(t)$ *on momenttigeneroivafunktion logaritmi joka kutsutaan kumulanttigeneroiva funktioksi.*

Määritelmä 14.0.3. *Jono*

$$k_n := \frac{d^n}{dt^n}\Lambda_X(t)\bigg|_{t=0}, \; n \in \mathbb{N}$$

kutsutaan X jakauman kumulanttien jonoksi. Kumulantit ovat kertoimet kumulanttigeneroiva funktion Taylorin kehitelmässä:

$$\Lambda_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n t^n}{n!}$$

Lemma 14.0.2. $\Lambda_X(t)$ *on konveksi.*

Tod. Kun $\alpha \in [0,1]$, eksponentit α^{-1} ja $(1-\alpha)^{-1}$ ovat konjugatteja, Hölderin epäyhtälöstä seuraa

$$\Lambda(\alpha t + (1-\alpha)s) := \log E_P\big(\exp(\alpha tX)\exp((1-\alpha)sX)\big)$$
$$\le \log\Bigg(E_P(\big(\exp(\alpha tX)^{1/\alpha})^{\alpha} E_P(\big(\exp((1-\alpha)sX)^{1/(1-\alpha)})^{1-\alpha}\Bigg) =$$
$$\alpha \log E_P(\exp(tX)) + (1-\alpha)\log E_P(\exp(sX)) \quad \square$$

Olkoon $P^{(t)}$ todennäköisyysmitan P:n Esscherin muunnos (8.0.3)jonka suhteen satunnaismuuttujat X_i ovat edelleen riippumattomia ja samoin jakautuneita

$$P^{(t)}(\{X_1 \in B_1\} \cap \{X_2 \in B_2\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\}) =$$
$$m_X(t)^{-n} E_P\big(\exp(tS_n)\mathbf{1}\{X_1 \in B_1\}\mathbf{1}\{X_2 \in B_2\}\dots\mathbf{1}\{X_n \in B_n\}\big) =$$
$$\prod_{i=1}^{n} E_P\big(\exp(tX_1 - \Lambda_X(t))\mathbf{1}\{X_1 \in B_i\}\big)$$

jossa $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$.

Muistetaan että

$$\frac{d}{dt}\Lambda_X(t) = m_X(t)^{-1}\frac{d}{dt}m_X(t) = m_X(t)^{-1}E_P(X_1\exp(tX_1)) = E_{P(t)}(X_1)$$

jossa integraalin ja derivaatan järjestyksen vaihto on sallittu olettamalla että $m_X(s) < \infty$ kun $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ jollekin $\varepsilon > 0$

Olkoon $x \neq \mu = E_P(X_1)$. Osoitamme että on olemassa mitanvaihtoparametri $\widetilde{t} = \widetilde{t}(x)$ jolla $E_{P(t)}(X_1) = x$.

Määritelmä 14.0.4. *Määritellään Legendren muunnos*

$$\Lambda_X^*(x) = \sup_t \bigl\{xt - \Lambda_X(t)\bigr\}$$

Huomautus 14.0.2. *Koska kuvaus $t \mapsto (xt - \Lambda_X(t))$ on derivoituva ja konkaavi, huomataan että sen maksimi saavutetaan pisteessä $\widetilde{t} = \widetilde{t}(x)$ jos ja vain jos*

$$\frac{d\Lambda_X}{dt}(\widetilde{t}) = E_{P(t)}(X_1) = x \ ,$$

ja $\Lambda_X^*(x) = x\widetilde{t} - \Lambda_X(\widetilde{t})$.

Huomautus 14.0.3. *Legendren muunnos on konveksi: kun $\alpha \in [0,1]$,*

$$\Lambda_X^*(\alpha x + (1-\alpha)y) = \sup_t \bigl\{\alpha(xt - \Lambda_X(t)) + (1-\alpha)(yt - \Lambda_X(t))\bigr\} \le$$
$$\alpha \sup_t \bigl\{xt - \Lambda_X(t)\bigr\} + (1-\alpha)\sup_s \bigl\{ys - \Lambda_X(s)\bigr\} = \alpha\Lambda_X^*(x) + (1-\alpha)\Lambda_X^*(y)$$

Teoreema 14.0.2. *(Cramerin lause) Olkoon satunnaismuuttujat $(X_n : n \in \mathbb{N})$ riippumattomia ja samoin jakautuneita, jolla $m_X(t) = E_P(\exp(tX_1)) < \infty\ \forall t > 0$ (josta seuraa $E_P^{(t)}(|X_1|^p) < \infty\ \forall p > 0, t \in \mathbb{R}$). Silloin, $\forall x \ge \mu = E_P(X_1)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P(\overline{S}_n \ge x) = -h(x) = -\Lambda^*(x)$$

Tod. Chebychevin epäyhtälöstä, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$P(\overline{S}_n \ge x) \le e^{-tx}E_P(\exp(t\overline{S}_n)) = \exp(-tx)m_X(t/n)^n = \exp(-tx + n\Lambda_X(t/n))$$
$$= \exp\bigl(-n\bigl(x\ t/n - \Lambda(t/n)\bigr)\bigr)$$

kun optimoidaan t:n suhteen

$$P(\overline{S}_n \geq x) \leq \inf_{t\in\mathbb{R}} \exp\bigl(-n(tx - \Lambda(t))\bigr) \iff \frac{1}{n}\log P(\overline{S}_n \geq x) \leq -\sup_{t\in\mathbb{R}}\{tx - \Lambda(t)\}$$
$$= -\Lambda^*(x) \quad \forall n,\ x \geq \mu$$

Alarajan todistus: Olkoon

$$b = \sup_{t\in\Lambda} \frac{d\Lambda}{dt} = P\text{-esssup}_\omega\{\, X(\omega)\}$$

jossa $m = E_P(X) \leq b$ ja $b < \infty$ jos ja vain jos satunnaismuuttuja X on olennaisesti rajoitettu. Silloin osoitettiin jo että kun $x > b$, $P(\overline{S}_n > x) = 0$, vauhtifunktio saa arvoa $h(x) = +\infty$, ja myös

$$\Lambda^*(t) = \sup_t\bigl\{xt - \Lambda(t)\bigr\} \geq \sup_t\bigl\{(x-b)t\bigr\} = +\infty$$

Olkoon sitten $m < x < b$. Silloin on olemassa parametri arvo $\widetilde{t} = \widetilde{t}(x)$ jolla $\frac{d}{dt}\Lambda(\widetilde{t}) = x$.

Olkoon $\widetilde{P} = P^{(\widetilde{t})}$ todennäköisyysmitan P:n Esscherin muunnos, parametrilla $\widetilde{t} = \widetilde{t}(x)$ uskottavuusosamäärällä

$$\frac{dP^{(\widetilde{t})}}{dP}(\omega) = \exp\bigl(X(\omega)\widetilde{t} - \Lambda(\widetilde{t})\bigr)$$

jolla $E_{\widetilde{P}}(X_1) = x$. Koska $\exp(tX_1(\omega)) > 0 \quad \forall t, \omega$, seuraa $P(A) = 0 \iff \widetilde{P}(A) = 0\ \forall A \in \mathcal{F}$ ja kun $X_1, \dots, X_n$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita jakaumalla $P^{(\widetilde{t})}$, uskottavuusosamäärä on

$$\frac{dP}{d\widetilde{P}}(\omega)\bigg|_{\sigma(X_1,\dots,X_n)} = \left(\frac{d\widetilde{P}}{dP}(\omega)\bigg|_{\sigma(X_1,\dots,X_n)}\right)^{-1} = \exp\bigl(-\widetilde{t}S_n(\omega) + n\Lambda_X(\widetilde{t})\bigr)$$

Huomataan että kumulanttigeneroiva funktio $\widetilde{P}$ mitan suhteen on

$$\widetilde{\Lambda}_X(s) := \log E_{\widetilde{P}}(\exp(sX_1)) = \log E_P(\exp((s+\widetilde{t}))) - \Lambda_X(\widetilde{t}) = \Lambda_X(\widetilde{t}+s) - \Lambda_X(\widetilde{t})$$

Mitan vaihto kaavalla

$$P(|\overline{S}_n - a| < \varepsilon) = E_{\widetilde{P}}\bigl(\exp(-\widetilde{t}S_n(\omega) + n\Lambda_X(\widetilde{t}))\mathbf{1}(|\overline{S}_n - a| < \varepsilon)\bigr)$$
$$\geq \exp(n(\Lambda_X(\widetilde{t}) - (a+\varepsilon)\widetilde{t})\widetilde{P}(|\overline{S}_n - a| < \varepsilon)$$

Koska oletetusti $E_P(\exp(tX)) < \infty$ myös $\widetilde{t}(a)$:n ympärillä, tästä seuraa $E_{\widetilde{P}}(|X|^p) < \infty\ \forall p > 0$, ja heikon suurten lukujen lain nojalla, $\forall \varepsilon > 0$ seuraa

$$\widetilde{P}(|\overline{S}_n - a| < \varepsilon) \to 1 \quad \text{kun} \quad n \to \infty,$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{n}\log P(|\overline{S}_n - a| < \varepsilon) \geq \Lambda_X(\widetilde{t}) - (a+\varepsilon)\widetilde{t} + o(1/n)$$

Kun $a = x + \varepsilon$, seuraa , $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{n}\log P(\overline{S}_n \geq x) \geq \frac{1}{n}\log P(x \leq \overline{S}_n \leq x + 2\varepsilon) \geq \Lambda_X(\widetilde{t}) - (x+2\varepsilon)\widetilde{t} + o(1/n)$$

Tästä seuraa

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P(\overline{S}_n \geq x) \geq \Lambda_X(\widetilde{t}) - (x+2\varepsilon)\widetilde{t} \geq -\sup_t\{(x+2\varepsilon)t - \Lambda_X(t)\}$$
$$= -\Lambda_X^*(x+2\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0,$$

ja koska $\Lambda_X^*(t)$ on konveksi ja siksi jatkuva, siitä seuraa

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P(\overline{S}_n \geq x) \geq -\Lambda_X^*(x) \quad \square$$

Huomautus 14.0.4. *Katkaisemalla X satunnaismuuttujan jakaumaa voidaan luopua oletuksesta $m_X(t) < \infty\ \forall t \in \mathbb{R}$, oletus $X_1 \in L^1(P)$ riittää (Lause 27.3 Kallenbergin kirjasta, Foundations of modern probability).*

Teoreema 14.0.3. *(Dini) Olkoon $f_n : K \to \mathbb{R}$ jono jatkuvia funktioita jossa K on kompakti topologinen avaruus, esimerkiksi $K = [-T, T]$.*

Kun $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, x \in K$, $f_n(x) \uparrow f(x) \in \mathbb{R}$ pistettäin. Jos raja-funktio $f : K \to \mathbb{R}$ on jatkuva, silloin konvergenssi on tasainen

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K}\big\{f(x) - f_n(x)\big\} = 0$$

Tod. Koska funktio $(f - f_n)$ on jatkuva, $\forall \varepsilon > 0$

$$E_{\varepsilon,n} = \{x : (f(x) - f_n(x)) < \varepsilon\}$$

on avoin joukko, ja koska $f_n(x) \uparrow f(x)\ \forall x \in K$, seuraa että $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{\varepsilon,n} = K$. Koska K on kompakti, on olemassa $N(\varepsilon)$ jolla $\bigcup_{n\leq N(\varepsilon)} E_{\varepsilon,n} = K$. Koska f_n jono on monotoninen, seuraa että $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ jolla

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{N(\varepsilon)}(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in K, n \geq N(\varepsilon) \quad \square$$

Lemma 14.0.3. *Olkoon $f(t), g(t)$ jatkuvia funktioita kompaktissa K, ja*

$$f^* = \sup_{t\in K} f(t), \quad g^* = \sup_{t\in K} g(t) \; .$$

Silloin

$$|f^* - g^*| \le \sup_{t\in K} |f(t) - g(t)| = \| f - g \|_\infty$$

Tod. Epäyhtälö on triviaali kun $f^* = g^*$. Kun $f^* > g^*$, $\exists t^* \in K$ jolla $f^* = f(t^*) > g(t^*) > g^*$. Siitä seuraa

$$|f^* - g^*| \le |f(t^*) - g(t^*)| \le \| f - g \|_\infty$$

Seuraus 14.0.1. *Kun $X_1 \in L^1(P)$, Cramerin lause pätee, myös silloin kun $E_P(\exp(tX)) = \infty$ jollekin $t > 0$.*

Tod. Olkoon $x > \mu = E_P(X_1)$. Cramerin lauseen yläraja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n > x) \le -\Lambda^*(x)$$

seuraa joka tapauksessa Chebychevin epäyhtälöstä.

Olkoon

$$X_n^{(M)}(\omega) = \big(X_n(\omega) \wedge M\big) \uparrow X_n(\omega) \text{ kun } M \uparrow \infty,$$
$$\overline{S}_n^{(M)} = \frac{1}{n}\big(X_1^{(M)} + \cdots + X_n^{(M)}\big)$$

Kun $x > \mu = E_P(X_1)$

$$\frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n > x) \ge \frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n^{(M)} > x) \to -(\Lambda^{(M)})^*(x) \quad \forall M > 0.$$

Väite on todistettu kun osoitamme että $(\Lambda^{(M)})^*(x) \downarrow \Lambda^*(x)$ kun $M \to \infty$. Monotonisen konvergenssilauseesta seuraa $\forall t \ge 0$

$$\Lambda^{(M)}(t) = \log E_P(\exp(t(X_1 \wedge M))) \uparrow \Lambda(t) = \log E_P(\exp(t(X_1))) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

jossa $\Lambda^{(M)}(t) < +\infty \; \forall M, t \ge 0$, ja Dinin lauseesta seuraa että suppeneminen on tasainen kompakteissa K joissa $\Lambda(t) < \infty$.

Kun kiinnitetään $x > m$, koska $\Lambda^{(M)} \uparrow \Lambda^{(M)}$, on olemassa $K < \infty$ jolla

$$\Lambda^*(x) = \sup_t \big\{xt - \Lambda(t)\big\} = \sup_{t\in[0,K]} \big\{xt - \Lambda(t)\big\} =$$
$$(\Lambda^{(M)})^*(x) = \sup_t \big\{xt - \Lambda^M(t)\big\} = \sup_{t\in[0,K]} \big\{xt - \Lambda^M(t)\big\},$$

ja Dinin lemmasta 14.0.3 seuraa että $(\Lambda^{(M)})^*(x) \downarrow \Lambda^*(x)$ kaikissa $x > m$.

Luku 15

Jakaumien konvergenssi

Olkoon $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono todennäköisyysavaruuksia, ja $X_n : \Omega_n \to (S, \mathcal{B}(S))$ satunnaismuuttujen jono jossa (S, ρ) on metrinen avaruus, esimerkiksi $S = \mathbb{R}^d$, Olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Määritelmä 15.0.1. *Sanotaan että jono X_n suppenee heikosti tai jakauman mielessä kohti X:n ja merkitään $X \xrightarrow{d} X$, kun*

$$\forall f \in C_b(S;\mathbb{R}) = \big\{ f : S \mapsto \mathbb{R},\ \textit{jatkuva ja rajoitettu}\ \big\},$$
$$E_{P_n}(f(X_n)) \to E_P(f(X)) \quad \textit{kun } n \to \infty$$

Huomataan että heikko konvergenssin käsite koskee vain satunnaismuuttujen jakaumia, siksi soveltuu myös tapaukseen jossa satunnaismuuttujat eivät elä samalla todennäköisyysavaruudella. Kun $\Omega_n = \Omega$ $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ ja $P_n = P$ $\forall n$, nähdään myös että heikko konvergenssi on kaikien heikompi konvergenssikäsite:

Lemma 15.0.1. *Kun $X_n \xrightarrow{P} X$ (stokastisesti) ja f on jatkuva seuraa että $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.*

Tod. Kaikille alijonolle (n_k) on olemassa alijonon alijono (n_{k_l}) jolla $X_{n_{k_l}}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti. Koska f on jatkuva seuraa myös että samalla alijono alajonolla $f(X_{n_{k_l}}(\omega)) \to f(X(\omega))$. Tästä seuraa $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

Lause 15.0.1. *Kun $X_n \xrightarrow{P} X$ (stokastisesti) seuraa että $X_n \xrightarrow{w} X$ (jakauman mielessä)*

Tod. Olkoon f jatkuva ja rajoitettu. Seuraa lemmasta että $f(X_n) \overset{P}{\to} f(X)$. Koska f on rajoitettu jono $\{f(X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ on tasaisesti integroituva ja siksi $f(X_n) \overset{L^1(P)}{\to} f(X)$, josta seuraa $E_P(f(X_n)) \to E_P(f(X))$.

Osoitamme vielä lauseessa 15.0.3 että stokastinen konvergenssi seuraa jakauman konvergenssista ainoastaan kun rajajakauma on degeneroitu,

Lause 15.0.2. *Olkoon $X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujat, $F_n(t) = P_n(X_n \le t)$, $F(t) = P(X \le t)$. Silloin*

$$X_n \overset{w}{\to} X \iff F_n(t) \to F(t) \quad \forall t : F(t-) = F(t)$$

Tod. $\Longrightarrow$ Approksimoidaan indikaattorin $x \mapsto \mathbf{1}(x \le t)$ jatkuvalla funktiolla h_ε jossa $\varepsilon > 0$

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & t \ge x \\ 1 - \frac{t-x}{\varepsilon} & t < x < t+\varepsilon \\ 0 & t+\varepsilon < x \end{cases}$$

Huomataan että

$$\mathbf{1}(x \le t) \le h_\varepsilon(x) \le \mathbf{1}(x \le t+\varepsilon)$$

josta seuraa

$$\begin{aligned} & F_n(t) \le E_{P_n}(h_\varepsilon(X_n)) \to E_P(h_\varepsilon(X)) \le F(t+\varepsilon) \\ & \Longrightarrow \limsup_n F_n(t) \le F(t+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0, \\ & \Longrightarrow \limsup_n F_n(t) \le F(t+) = F(t) \end{aligned}$$

koska $t \mapsto F(t)$ on oikealta jatkuva.

Samoin valitsemalla $g_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(x+\varepsilon)$, koska

$$\mathbf{1}(x < t) \ge g_\varepsilon(x) \ge \mathbf{1}(x \le t-\varepsilon)$$

seuraa

$$\begin{aligned} & F_n(t-) \ge E_{P_n}(g_\varepsilon(X_n)) \to E_P(g_\varepsilon(X)) \ge F(t-\varepsilon) \\ & \Longrightarrow \liminf_n F_n(t-) \ge F(t-\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ & \Longrightarrow \liminf_n F_n(t-) \ge F(t-) \end{aligned}$$

Kun $F(t) = F(t-)$ saadaan

$$\limsup_n F_n(t) \le F(t) = F(t-) \le \liminf_n F_n(t-)$$

josta seuraa että $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$.

Toinen implikaatio seuraa Skorokhodin esityksestä.

15.0.1 Skorokhodin esitys

Olkoon $t \mapsto F(t)$ ei-vähenevä, oikealta jatkuva, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Kanonisessa todennäköisyysavaruudessa $\Omega = [0,1]$, joka on varustettu Borelin σ-algebralla ja tasajakaumalla P (Lebesgue mitta), voidaan rakentaa satunnaismuuttuja $X(\omega)$ jolla $P(\omega : X(\omega) \le t) = F(t)$.

Määritellään kertymäfunktion F:n yleistetyt käänteisfunktiot

$$X^+(\omega) := \inf\{t : F(t) > \omega\} = \sup\{t : F(t) \le \omega\}, \qquad (15.0.1)$$

$$X^-(\omega) := \inf\{t : F(t) \ge \omega\} = \sup\{t : F(t) < \omega\} \qquad (15.0.2)$$

- $X^+(\omega) \ge X^-(\omega)$ ovat ei väheneviä ω:n suhteen
- $\omega \mapsto X^+(\omega)$ on oikealta jatkuva ja $\omega \mapsto X^-(\omega)$ on vasemmalta jatkuva.
- Huomataan myös että $F(X^-(\omega)-) \le \omega \le F(X^+(\omega))$, koska F on oikealta jatkuva.

Osoitamme että $P(\omega : X^-(\omega) \le z) = P(\omega : X^+(\omega) \le z) = F(z)$,
ja $P(X^- = X^+) = 1$. Koska

$$X^-(\omega) \le z \Longleftrightarrow \omega \le F(X^-(\omega)) \le F(z) \ ,$$

ja P on Lebesguen todennäköisyysmitta, seuraa

$$F(z) = P([0, F(z)]) = P(\omega : \omega \le F(z)) = P(\omega : X^-(\omega) \le z).$$

Koska $X^+(\omega) \ge X^-(\omega) \ge X^+(\omega') \ge X^-(\omega')$ kun $\omega > \omega'$, seuraa

$$X^+(\omega) \ge X^-(\omega) \ge X^+(\omega-) := \lim_{\omega'\uparrow\omega} X^+(\omega),$$

siksi joukko $\{\omega : X^-(\omega) < X^+(\omega)\}$ on korkeintaan numeroituva ja $P(X^- < X^+) = 0$ (P on Lebesguen mitta). Tästä seuraa

$$P(X^+ \le z) = P(\{X^- \le z\} \cap \{X^+ = X^-\}) = P(X^- \le z) = F(z)$$

Lauseen 15.0.2 implikaation $\Longleftarrow$ todistus Olkoon $z \in \mathbb{R}$ jolla $F(z-) = F(z)$, ja $F_n(z) \to F(z)$. Olkoon $X_n^+(\omega), X_n^-(\omega)$ kertymäfuntkion F_n yleistetyt käänteisfunktiot kuten kaavoissa 15.0.1-2.

Koska $X^+(\omega) < z \Longleftrightarrow \omega < F(z)$, kun n on tarpeeksi suuri $\omega < F_n(z)$ ja tämä tapahtuu jos ja vain jos $X_n^+(\omega) < z$. Silloin, $\limsup_n X_n^+(\omega) \le z$. Tästä seuraa

$$\limsup_n X_n^+(\omega) \le X^+(\omega)$$

muuten olisi olemassa z jolla

$$\limsup_n X_n^+(\omega) > z > X^+(\omega),$$

josta seuraa ristiriita.

Jos $X^-(\omega) > z$ seuraa $\omega > F(z)$ ja kun n on tarpeeksi suuri $\omega > F_n(z)$ josta seuraa $X_n^-(\omega) \ge z$. Silloin $\liminf_n X_n^-(\omega) \ge X^-(\omega)$.

$$X^-(\omega) \le \liminf X_n^-(\omega) \le \liminf X_n^+(\omega) \le \limsup X_n^+(\omega) \le X^+(\omega)$$

Joukossa $\{\omega : X^-(\omega) = X^+(\omega)\}$ jolla on todennäköisyys $P = 1$, pätee

$$\lim_n X_n^+(\omega) = \lim_n X_n^-(\omega) = X^+(\omega) = X^-(\omega)$$

Siis olemme rakentaneet satunnaismuuttujan $X(\omega) = X^\pm(\omega)$ ja satunnaismuuttujen jonon $X_n(\omega) = X_n^\pm(\omega)$ (ei ole väliä kumpaa versiota valitaan) samassa todennäkäisyysavaruudessa jolla

$$X_n(\omega) \to X(\omega) \quad P\text{-melkein varmasti}, \quad P(X_n \le t) = F_n(t), \; P(X \le t) = F(t)$$

Jos $f(x)$ on rajoitettu ja jatkuva testifunktio, seuraa dominoidun konvergenssin lauseesta $E_P(f(X_n)) \to E_P(f(X))$. $\square$

Varoitus: Olkoon $X_n, n \in \mathbb{N}$ ja $X(\omega)$ satunnaismuuttujat jotka elävät samassa todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jolla $X_n \xrightarrow{d} X$.

Koska $P(X_n \le t) = F_n(t) \to F(t) = P(X \le t)$ $\forall t$ jolla $F(t) = F(t-)$ Skorokhodin esityksellä saadaan kanonisessa todennäköisyysavaruudessa $\widetilde{\Omega} = [0,1]$ varustettuna Borelin σ-algebralla ja Lebesgue mitalla $\widetilde{P}$,

satunnaismuuttumjen jono $\widetilde{X}_n(\widetilde{\omega})$ ja satunnaismuuttujan $\widetilde{X}(\widetilde{\omega})$ jotka elävät kanonisessa todennäköisyysavaruudessa $\widetilde{\Omega} = [0,1]$ varustettuna Borelin σ-algebralla ja Lebesgue mitalla $\widetilde{P}$, joilla

$$\widetilde{P}(\widetilde{X}_n \in B) = P(X_n \in B) \text{ ja } \widetilde{P}(\widetilde{X} \in B) = P(X \in B),$$
$$\widetilde{X}_n(\widetilde{\omega}) \to \widetilde{X}_n(\widetilde{\omega}) \quad \widetilde{P} \text{ m.v}$$

Tämä ei kerro yhtään mitään alkuperäisestä jonon $X_n(\omega)$ P-melkein varma konvergenssista alkuperäisessä todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Skorokhodin esityksessä satunnaismuuttujen $(\widetilde{X}(\omega), \widetilde{X}_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ yhteinen jakauma sattaa olla aivan eri kun alkuperäisten satunnaismuuttujen $(X(\omega), X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ yhteistä jakaumaa, vaikka yksi-ulotteiset marginaalijakaumat täsmävät. Vaikka $\widetilde{X}_n(\widetilde{\omega}) \to \widetilde{X}(\widetilde{\omega})$ $\widetilde{P}$-melkein varmasti kanonisessa avaruudessa $\widetilde{\Omega}$, siitä ei saa tehdä johtopäätöksiä alkuperäisen jonon $X_n(\omega)$ stokastisesta konvergenssista alkuperäisessä todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Esimerkki Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon $(G_i(\omega) : i \in \mathbb{N})$ riippumattomia ja samoin jakautuneita standardi gaussisia satunnaismuuttujia, jolla $E_P(G_1) = 0$, $E_P(G_1^2) = 1$.

Olkoon $\widehat{S}_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2^n}}(G_1(\omega) + \dots + G_{2^n}(\omega))$

Koska $S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_1(\omega) + G_2(\omega))$ on standardi gaussinen (harjoitustehtävä) seuraa induktivisesti että myös $\widehat{S}_n$ on standardi gaussinen, $P(\widehat{S}_n \in B) = P(G_1 \in B)$, ja koska Gaussinen jakauma säilyy on selvää että $\widehat{S}_n \xrightarrow{d} G_1$ jakauman mielessä, eikä kuitenkaan suppene stokastisesti.

Muuten voitaisiin kirjoittaa

$$\widehat{S_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\widehat{S_n} + \widehat{S'_n}\big)$$

jossa $\widehat{S'_n} = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}(G_{2^{n-1}+1} + \dots + G_{2^n}) \perp\!\!\!\perp \widehat{S}_n$.

Koska jono $(\widehat{S_n})$ olisi stokastisesti Cauchy, Koska $\forall \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$

$$P(|\widehat{S_{n+1}} - \widehat{S_n}\,| \geq \varepsilon) = P\big(|\widehat{S'_n} - (\sqrt{2}-1)\widehat{S_n}\,| \geq \sqrt{2}\varepsilon\big)$$
$$= P\big(|G_1 - (\sqrt{2}-1)G_2| \geq \sqrt{2}\varepsilon\big) = \eta > 0$$

jossa $\eta > 0$ ei riipu n:sta, jono $(\widehat{S}_n(\omega))$ ei voi olla stokastisesti Cauchy $\square$

Määritelmä 15.0.2. *Olkoon G, F todennäköisyysjakaumat todennäköisyysavaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Niiden totaali-variaatio etäisyys on*

$$d_{TV}(F, G) := \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \big|F(B) - F(G)\big|$$

Kun $(F_n : n \in N)$ ja F ovat todennäköisyysjakaumien kertymäfunktiot ja $F_n \overset{TV}{\to} F$ totaali-variaation mielessä, kun valitaan $B = (-\infty, t]$ seuraa että $F_n \overset{d}{\to} F$ heikon konvergenssin mielessä.

Lemma 15.0.2. *(Scheffe) Oletetaan että kaikille jakaumille F ja $(F_n : n \in \mathbb{N})$ on tiheydet $f(t)$, $f_n(t)$ yhteisen mitan $\mu(dt)$ suhteen. Silloin*

1.
$$d_{TV}(F_n, F) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \mu(dt) \tag{15.0.3}$$

2. *Jos* $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ *μ-melkein kaikille t, seuraa* $d_{TV}(F_n, F) \longrightarrow 0$.

Todistus $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$0 = 1 - 1 = \int_{\mathbb{R}} \big(f_n(t) - f(t)\big)\mu(dt) = \int_B \big(f_n(t) - f(t)\big)\mu(dt) + \int_{B^c} \big(f_n(t) - f(t)\big)\mu(dt)$$

josta seuraa

$$\left| \int_B \big(f_n(t) - f(t)\big)\mu(dt) \right| = \left| \int_{B^c} \big(f_n(t) - f(t)\big)\mu(dt) \right|$$

Tästä seuraa

$$2|F_n(B) - F(B)| = \left| \int_B \big(f_n(t) - f(t)\big)\mu(dt) \right| + \left| \int_{B^c} \big(f_n(t) - f(t)\big)\mu(dt) \right|$$
$$\leq \int_B \big|f_n(t) - f(t)\big|\mu(dt) + \int_{B^c} \big|f_n(t) - f(t)\big|\mu(dt) = \int_{\mathbb{R}} \big|f_n(t) - f(t)\big|\mu(dt)$$

Huomataan että kun $B = \{t : f_n(t) \geq f(t)\}$, epäyhtälöstä tulee yhtälö, ja (15.0.3) seuraa.

Koska $f_n(t) \to f(t)$ μ-melkein kaikkialla, seuraa että $\big(f(t) - f_n(t)\big)^+ \to 0$ μ-melkein kaikkialla jossa $0 \leq \big(f(t) - f_n(t)\big)^+ \leq f(t)$ ja $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$. Lebesguen dominoidun konvergensin lauseesta seuraa

$$\lim_{n\to\infty} 2d_{TV}(F, F_n) = \lim_{n\to\infty} \big|f(t) - f_n(t)\big|\mu(dt) = 2 \lim_{n\to\infty} \int_B \big(f(t) - f_n(t)\big)\mu(dt) = 0 \quad \square$$

Esimerkki 15.0.1. *Olkoon X_n binomi-jakautunut parametreilla n ja p_n*

$$P_n(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}, \quad k = 0, 1 \ldots, n, \quad \textit{jossa oletetaan} \lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0.$$

Silloin $X_n \xrightarrow{d} X$ jossa X on Poisson(λ) jakautunut. Koska

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \ldots \frac{(n-k+1)}{n} \frac{1}{k!} \big(np_n\big)^k \left(1 - \frac{(n-k)p_n}{(n-k)}\right)^{n-k}$$

ja $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \exp(-\lambda)$,

Kun k on kiinteä ja $n \to \infty$, $np_n \to \lambda$, $\frac{(n-k)}{n} \to 1$, $(n - k) \to \infty$, josta seuraa

$$\lim_{n\to\infty} P_n(X_n = k) = \frac{1}{k} \lambda^k \exp(-\lambda) = P(X = k)$$

jossa X on Poisson(λ) jakautunut.

Esimerkki 15.0.2. *Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia ja samoin jakautuneita 1-eskponentiaalisia satunnaismuuttujia, jolla*

$$P(X > t) = \exp(-t), \quad \forall t \geq 0,$$

ja olkoon

$$X_n^*(\omega) := \max\big\{X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big\}$$

jonon juokseva maksimi. Silloin

$$\big(X_n^* - \log n\big) \xrightarrow{d} Y$$

jossa $P(Y \leq t) = \exp\bigl(-e^{-t}\bigr) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$ *kutsutaan Gumbelin standardisoitu ääriarvo-jakaumaksi.*

Todistus

$$P\bigl(X_n^* \leq t + \log n\bigr) = P\bigl(X_k \leq t + \log n, k = 1, \dots, n\bigr)$$
$$= \left\{ 1 - \exp\bigl(-(t + \log n)\bigr) \right\}^n = \left\{ 1 - \frac{\exp\bigl(-t\bigr)}{n} \right\}^n \longrightarrow \exp\bigl(-e^{-t}\bigr) \textit{ kun } n \to \infty \ \square$$

Lause 15.0.3. *Jos* $\forall n \ X_n$ *on satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa* $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ *ja* $X_n \xrightarrow{d} c$ *(jakauman mielessä) jossa* c *on vakio, seuraa että* $X_n \xrightarrow{P_n} c$ *(stokastisesti), eli*

$$P_n(|X_n - c| > \varepsilon) \to 0 \quad \textit{kun } n \to \infty$$

Tod. Koska

$$P_n(X_n \leq t) = F_n(t) \to F(t) = \mathbf{1}(c \leq t) \text{ kun } t \neq c.$$

seuraa $\forall \varepsilon > 0$

$$P_n(|X_n - c| \leq \varepsilon) = P_n(X_n \leq c + \varepsilon) - P_n(X_n \leq c - \varepsilon) \to F(c + \varepsilon) - F(c - \varepsilon) = 1 - 0 \ \square$$

Seuraavaksi yleistetään lause 15.0.2 satunnaisvektoreille.

Lemma 15.0.3. *(Portmanteau) Olkoon* $X_n \in \mathbb{R}^d$ *satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruuksissa* $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ *ja* $X \in \mathbb{R}^d$ *satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruuksissa* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Seuraavat lauseet ovat yhtä päteviä:*

1. $P_n(X_n \leq x) \longrightarrow P(X \leq x)$ *kaikissa pisteissä jossa* $F_X(x) = P(X \leq x)$ *on jatkuva.*

2. $E_{P_n}(f(X_n)) \longrightarrow E_P(f(X))$ *kaikille jatkuville rajoitetuille funktioille* f*.*

3. $E_{P_n}(f(X_n)) \longrightarrow E_P(f(X))$ *kaikille rajoitetuille Lipschitz funktioille* f*.*

4. $\liminf_n E_{P_n}(f(X_n)) \geq E_P(f(X))$ *kaikille ei-negatiivisille jatkuville funktioille* f*.*

5. $\liminf_n P_n(X_n \in U) \geq P(X \in U)$ *kaikille avoimille* $U \subseteq \mathbb{R}^d$*.*

6. $\limsup_n P_n(X_n \in C) \leq P(X \in C)$ *kaikille suljetuille* $C \subseteq \mathbb{R}^d$.

7. $P_n(X_n \in B) \longrightarrow P(X \in B)$ *kaikille* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *jolla* $P(X \in \partial B) = 0$, *jossa* $\partial B = \big(\overline{B} \setminus \mathring{B}\big)$ *on joukon reuna,* $\overline{B} = \Big(\bigcap_{B \subseteq C \text{ suljettu}} C\Big)$ *on joukon sulkeuma,* $\mathring{B} = \Big(\bigcup_{B \supseteq U \text{ avoin}} U\Big)$ *on joukon sisus.*

Huomautus 15.0.1. *Ei ollut ketään kuuluisaa ranskalaista matematiikkoa nimeltä Portmanteau. Ranskankieleinen sana tarkoittaa naulakko, lemman nimi viittaa sen käyttökelpoisuuteen.*

Tod $(1) \Longrightarrow (2)$ Oletetaan ensin että F_X on jatkuva. Oletuksesta (1) seuraa $P_n(X_n \in I) \longrightarrow P(X \in I)$ kaikille suorakulmaisille tulojoukoille I. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja I suorakulmainen kompakti joukko jolla $P(X \in I) > (1-\varepsilon)$. Koska f on jatkuva, se on tasaisesti jatkuva kompaktissa I. On olemassa äärellinen ositus $I = \bigcup_{j=1}^m I_j$ jossa I_j ovat suorakulmaisia joukkoja ja $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ kun $x, y \in I_j$ jollekin j. Valitaan $x_j \in I_j$ $\forall j = 1, \dots, m$ ja määrtiellään yksinkertainen funktio

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^m f(x_j) \mathbf{1}_{I_j}(x)$$

Koska $\big|f(x) - f_\varepsilon(x)\big| < \varepsilon$, seuraa

$$\begin{aligned}
&\big|E_P(f(X)) - E_P(f_\varepsilon(X))\big| < \varepsilon + P(X \notin I) < 2\varepsilon \\
&\big|E_{P_n}(f(X_n)) - E_{P_n}(f_\varepsilon(X_n))\big| < \varepsilon + P_n(X_n \notin I) \quad \forall n, \\
&\leq 2\varepsilon \text{ kun } n \text{ on tarpeeksi suuri.}
\end{aligned}$$

Myös

$$\big|E_{P_n}(f_\varepsilon(X_n)) - E_P(f_\varepsilon(X))\big| < \sum_{j=1}^m |f(x_j)| \big| P_n(X_n \in I_j) - P(X \in I_j)\big|$$

$$\leq \| f \|_\infty \sum_{j=1}^m \big|P_n(X_n \in I_j) - P(X \in I_j)\big| \longrightarrow 0 \text{ kun } n \to \infty$$

Kolmion epäyhtälön avulla

$$\begin{aligned}&\big|E_{P_n}(f(X_n)) - E_P(f(X))\big| \le \\ &\big|E_{P_n}(f(X_n)) - E_{P_n}(f_\varepsilon(X_n))\big| + \big|E_{P_n}(f_\varepsilon(X_n)) - E_P(f_\varepsilon(X))\big| + \big|E_P(f_\varepsilon(X)) - E_P(f(X))\big| \\ &\le 5\varepsilon \quad \text{kun } n \text{ on tarpeeksi suuri, ja väite seuraa.}\end{aligned}$$

Sanotaan B on F_X jatkuvuuden joukko jos $P(X \in \partial B) = 0$. Kun $F_X(x)$ ei ole jatkuva, edellinen argumentti menee läpi jos voidaan valita kaikki suorakulmaisia joukkoja I ja I_k jatkuvuuden joukoiksi. Tämä on mahdollista koska jokaiselle satunnaisvektorin $X(\omega) = (X^{(1)}(\omega), \dots, X^{(d)}(\omega))$ koordinaateille, joukko

$$\Big\{ r \in \mathbb{R} : P(X^{(i)}(\omega) = r) > 0 \Big\}$$

on korkeintaan numeroituva. Siis on olemassa joukkoja $Q_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ joilla on numeroituva komplementti ja jokainen suorakulmainen joukko joilla on kulmat tulojoukossa $Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_d$ on kertymäfunktion $F_X(x)$ jatkuvuuden joukko.

$(3) \implies (5)$ Olkoon $U \subseteq R^d$ avoin. Määritellään Lipschitz funktioden jono

$$f_n(x) := nd(x, U^c) \wedge 1 \quad \text{jolla } 0 \le f_n(x) \uparrow \mathbf{1}_U(x)$$

jolla $|f_n(x) - f_n(y)| \le n|\, x - y|$. Tässä $d(x, A) := \inf_{y \in A} |\, x - y|$. Kaikille $m \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_n P_n(X_n \in U) \ge \liminf_n E_{P_n}(f_m(X_n)) = E_P(f_m(X))$$

Kun $m \uparrow \infty$, monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa $E_P(f_m(X)) \uparrow P(X \in U)$.

$5) \iff 6)$ ottaamalla joukkojen komplementteja.

$(5) + (6) \implies (7)$

$$P(X \in \mathring{B}) \le \liminf_n P_n(X_n \in \mathring{B}) \le \limsup_n P_n(X_n \in \overline{B}) \le P(X \in \overline{B})$$

Jos $P(X \in \partial B) = 0$, kaikki epäyhälöt ovat yhtälöitä, ja $P(X \in B) = \lim_n P_n(X_n \in B)$.

$(7) \implies (1)$ Jos x on kuvauksen $x \mapsto P(X \leq x)$ jatkuvuuden piste, suorakulmainen joukko $B = (-\infty, x] = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_d]$ on jatkuuvuden joukko.

$(2) \implies (4)$ Koska $0 \leq f(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} E_{P_n}(f(X_n) \wedge k) = E_P(f(X) \wedge k),$$

ja monotonisen konvergenssin lauseesta $E_P(f(X) \wedge k) \uparrow E_P(f(X))$ kun $k \uparrow \infty$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun k on tarpeeksi suuri,

$$\liminf_{n\to\infty} E_{P_n}(f(X_n)) \geq \lim_{n\to\infty} E_{P_n}(f(X_n) \wedge k) = E_P(f(X) \wedge k) \geq E_P(f(X)) + \varepsilon$$

ja väite on osoitettu koska ε on mielivaltainen.

$(4) \implies (2)$ Olkoon $f(x)$ jatkuva ja rajoitettu.

Voidaan olettaa $0 \leq f(x) \leq \parallel f \parallel_\infty$, muuten osoitetaan erikseen väite rajoitetuille jatkuville funktioille $f^+(x), f^-(x) \geq 0$.

Koska $g(x) := \parallel f \parallel_\infty - f(x) \geq 0$, seuraa

$$\parallel f \parallel_\infty - \limsup_n E_{P_n}(f(X_n)) = \liminf_n E_{P_n}(g(X_n)) \geq E_P(g(X)) = \parallel f \parallel_\infty - E_P(f(X))$$

ja koska $\liminf_n E_{P_n}(f(X_n)) \geq E_P(f(X))$, seuraa

$$E_P(f(X)) \geq \limsup_n E_{P_n}(f(X_n)) \geq \liminf_n E_{P_n}(f(X_n)) \geq E_P(f(X)) \quad \square$$

Teoreema 15.0.1. *(Jatkuvan kuvauksen lause)*

Olkoon $C \subseteq \mathbb{R}^d$ jolla $P(X \in C) = 1$, ja $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ joka on jatkuva kaikissa pisteissä $x \in C$. Silloin jos $X_n \xrightarrow{d} X$, seuraa $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.

Tod. Jos $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja rajoitettu, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ on myös jatkuva ja rajoitettu, ja koska $X_n \xrightarrow{d} X$, seuraa

$$E_{P_n}\big(f(g(X_n)\big) \longrightarrow E_P\big(f(g(X))\big). \quad \square$$

Seuraus 15.0.1. *(Slutskyn lemma) Jos (X_n, Y_n) ovat satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruuksissa $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ ja $X_n \xrightarrow{d} c, Y_n \xrightarrow{d} Y$, seuraa*

1. $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (c, Y)$

2. $(X_n + Y_n) \stackrel{d}{\longrightarrow} (c + Y)$

3. $X_n Y_n \stackrel{d}{\longrightarrow} cY$

4. $\frac{Y_n}{X_n} \stackrel{d}{\longrightarrow} \frac{Y}{c}$ *kun* $c \neq 0$.

Huomautus 15.0.2. *Huomataan, jos* $X_n \stackrel{d}{\longrightarrow} X$ *ja* $Y_n \stackrel{d}{\longrightarrow} Y$*, yleisesti ei seura että pareina* $(X_n, Y_n) \stackrel{d}{\longrightarrow} (X, Y)$*, koska ei ole mitään tietoa* (X_n, Y_n)*:n ja* (X, Y)*:n yhteisistä jakaumista. Tämä pätee pelkästään kun jommankumman jakauman raja on pistemassa.*

Tod (1). Huomataan ensin että

$$(c, Y_n) \stackrel{d}{\longrightarrow} (c, Y).$$

tämä seuraa koska jos $f(x, y)$ jatkuva ja rajoitettu testi-funktio, väite seuraa koska kuvaus $y \mapsto f(c, y)$ on jatkuva ja rajoitettu.

Jos $f(x, y)$ on jatkuva ja rajoitettu,

$$\begin{aligned}
&\big|E_{P_n}(f(X_n, Y_n)) - E_P(f(c, Y))\big| \leq \\
&\big|E_{P_n}(f(X_n, Y_n) - f(c, Y_n))\big| + \big|E_{P_n}(f(c, Y_n)) - E_P(f(c, Y))\big|
\end{aligned}$$

jossa $E_{P_n}(f(c, Y_n)) \longrightarrow E_P(f(c, Y))$.

Olkoon $Z_n := (X_n, Y_n) - (c, Y_n)$, osoitamme että $Z_n \stackrel{d}{\to} \mathbf{0}$.

Tämä seuraa Portmanteau lemman pykälöistä (5),(6)

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0, \qquad 1 &= \liminf_n P(|\ (X_n, Y_n) - (c, Y_n)| < \varepsilon), \\
0 &= \limsup_n P(|\ (X_n, Y_n) - (c, Y_n)|\ \geq \varepsilon)
\end{aligned}$$

on tosi koska $(X_n - c) \stackrel{P_n}{\to} 0$, eli $\lim_n P(|X_n - c|\ \geq \varepsilon) = 0$.

Portmanteaun lemman pykälä soveltuu sitten avoimille joukolle $U \subseteq \mathbb{R}^2$, jossa

$$\liminf_n P(|\ (X_n, Y_n) - (c, Y_n)| \in U) = \mathbf{1}_U(0) = P(0 \in U)$$

(2),(3),(4) seuraavat sitten (1) ja jatkuvan kuvausken lauseesta 15.0.1 □.

Huomautus 15.0.3. *(Van Der Vaartin kirjasta 'Asymptotic Statistics'): Slutsky's lemman pykälät (4) sovelutuvat myös kun X_n, c, Y_n, Y ovat matriisi arvoisia ja c on $d \times d$ kääntyvä matriisi. Matriisin käännös on jatkuva kuvaus $\mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ kaikissa pisteissa jossa matriisi on kääntyvä.*

Määritelmä 15.0.3. *Satunnaismuuttujen jono $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ on tiukka (engl. tight) kun*

$$\lim_{K\to\infty} \sup_n P_n(|X_n| > K) = 0$$

Lause 15.0.4. *(Hellyn valinta lause)*

- *Olkoon $(F_n : n \in \mathbb{N})$ kertymäjkaumien jono. On olemassa alijono F_{n_k} ja ei-vähenevä ja oikealta jatkuva $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ jolla $F_{n_k}(t) \to F(t)$ kaikissa t jossa $F(t) = F(t-)$.*

- *Ilman lisääoletuksia, rajafunktio $F(t)$ ei ole välttämättä kertymäfunktio, eli*

  $$F(+\infty) = \lim_{t\to\infty} F(t) \leq 1 \text{ ja } F(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} F(t) \geq 0$$

  jossa epäyhtälöt saavat olla aitoja. Seuraava tulos on Prohorovin lause:

  Jos jono $(F_n : n \in \mathbb{N})$ on tiukka, kaikki alijonojen rajafunktiot F ovat kerymäfunktioita.

Tod.

Olkoon $\mathbb{Q} = \{\mathbb{Q}_n : n \in \mathbb{N}\}$ rationaali lukujen numerointi.

Koska $F_n(q_1) \in [0,1]$ joka on kompakti, on olemassa alijono $n(1,k)$ ja rajapiste $G(q_1)$ jolla $F_{n(1,k)}(q_1) \to G(q_1)$.

Koska $F_{n(1,k)}(q_1) \in [0,1]$ on olemassa alijonon alijono $n(2,k)$ ja rajapiste $G(q_2)$ jolla $F_{n(2,k)}(q_1) \to G(q_1)$ ja $F_{n(2,k)}(q_2) \to G(q_2)$ kun $k \to \infty$.

Induktiivisesti, kaikille i on olemassa alijono $\{\, n(i,k) : k \in \mathbb{N}\}$ ja rajaarvot joilla $\forall j = 1, \ldots, i$. $F_{n(i,k)}(q_j) \to G(q_j)$ kun $k \to \infty$.

Olkoon $n_k = n(k,k)$ diagonaali jono. Seuraa että $\forall q \in \mathbb{Q}$, $F_{n_k}(q) \to G(q)$ kun $k \to \infty$. Koska kertymäfunktiot F_n ovat ei väheneviä, myös kuvaus $q \mapsto G(q)$ on ei-vähenevä. Olkoon jatkossa $F_k = F_{n(k,k)}$ kyseinen alijono.

Olkoon $\forall t \in \mathbb{R}$

$$F(t) := \inf\{G(q) : q \in \mathbb{Q} \text{ ja } q > t\}$$

Kun t kasvaa $\inf$ pienemmästä joukosta ei-vähene, $F(t)$ on ei-vähenevä. $F(t)$ on oikealta jatkuva: kun $\varepsilon > 0$, $\exists q > t$ jolla $\forall t \leq t' < q$, infimumin määritelmästä seuraa

$$F(t') - \varepsilon \leq G(q) - \varepsilon \leq F(t) \leq F(t') \leq G(q)$$

Osoitamme että jos $F(t) = F(t-)$ seuraa $F_n(t) \to F(t)$.

$\forall \varepsilon > 0$ On olemassa $s < t$ jolla $F(s) < F(t) < F(s) + \varepsilon$. Olkoon $r, q \in \mathbb{Q}$ jolla $s < r < t < q$ ja $G(q) < F(t) + \varepsilon$. Koska

$$F_n(r) \leq F_n(t) \leq F_n(q)$$

väite seuraa arviosta

$$F(t) - \varepsilon < F(s) \leq G(r) \leq \liminf_n F_n(t) \leq \limsup_n F_n(t) \leq G(q) < F(t) + \varepsilon$$

jossa ε on mielivaltainen.

Jos $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ on tiukka, määritelmästä seuraa että

$$\lim_{K\to\infty} \inf_{n\in\mathbb{N}} F_n(K) = 1, \qquad \lim_{K\to-\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} F_n(K) = 0$$

ja koska kun $K \in \mathbb{Q}$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} F_n(K) \leq \lim_{n\in\mathbb{N}} F_n(K) = G(q)$$

tästä seuraa että $\lim_{K\to\infty} G(K) = \lim_{K\to\infty} F(q) = 1$. Samoin

$$\lim_{K\to-\infty} G(K) = \lim_{K\to-\infty} F(q) = 0.$$

Luku 16

Karakteristinen funktio ja Konvoluutio

16.0.1 Lyhyesti kompleksi-analyysista

Olkoon satunnaisvektori $(\xi(\omega), \eta(\omega)) \in \mathbb{R}^2$. $\zeta(\omega) = \xi(\omega) + i\eta(\omega) \ \in \mathbb{C}$ on kompleksi-arvoinen satunnaismuuttuja jossa $i = \sqrt{-1}$ on imaginaarinen yksikkö jolla $(i)^2 = -1$.

Muistetaan myös että kun $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\overline{z} := x - iy$ ja $|\zeta|^2 = \zeta\overline{\zeta} = \xi^2 + \eta^2$.

Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jossa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = (x + iy)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

Sanotaan että $f(z)$ on analyyttinen pisteessä z jos ja vain jos on olemassa derivaatta

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

riippumatta siitä suunnasta josta w lähestyy z:n.

Sijoittamalla $w = z + \varepsilon$, $w = z + i\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \to 0$,

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

josta seuraavat Cauchy Riemannin ehdot:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

Kun $f(z)$ on analyyttinen $\forall z \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$, pätee Cauchyn lause:

$$\oint f(w)dw = 0, \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(w)}{w-z}dw \quad z \in \Omega \setminus \partial\Omega$$

jossa integroidaan suljetun $\partial\Omega$ käyrän yli.

Määritelmä 16.0.1. *Olkoon $X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_d(\omega)) \in \mathbb{R}^d$ satunnaisvektori todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Sen karakteristinen funktio $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ on

$$\varphi_X(t) = E_P\Big(\exp\big(\sqrt{-1}(t \cdot X)\big)\Big) = E_P\Big(\exp\big(\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{d} t_k X_k\big)\Big)$$

Tässä $\exp(iX(\omega)\cdot t) = \cos(X(\omega)\cdot t) + i\sin(X(\omega)\cdot t)$. Koska $X(\omega)\cdot t \in \mathbb{R}$, seuraa $|\exp(it\cdot X(\omega))| \le 1$, ja siksi karakteristinen funktio on aina olemassa ja $|\varphi_X(t)| \le 1$.

Muita ominaisuuksia:

- $\varphi_X(0) = 1$
- $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$, $t \in \mathbb{R}^d$
- $\varphi_{a+bX}(t) := E_P(\exp(i(a+bX)\cdot t) = e^{ia\cdot t}\varphi_X(bt)$, kun $a, t \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}$
- Kuvaus $t \mapsto \varphi_X(t)$ on jatkuva (dominoidun konvergenssin lauseesta),
- $\varphi_X(t)$ on ei-negatiivi-definiitti, eli kaikille $n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^d$ matriisi $\Big[\ \varphi_X(t_j - t_k)\Big]_{1\le j,k\le n}$ on ei-negatiivinen:

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j \overline{z}_k \varphi_X(t_j - t_k) \ge 0, \quad \forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$$

Tod.

$$
\begin{aligned}
0 &\le E_P\Big(\Big|\sum_{j=1}^n z_j \exp(iX\cdot t_j)\Big|^2\Big)\\
&= E_P\Big(\Big\{\sum_{j=1}^n z_j \exp(iX\cdot t_j)\Big\}\overline{\Big\{\sum_{k=1}^n z_k \exp(iX\cdot t_k)\Big\}}\Big)\\
&= \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n z_i\overline{z}_k E_P\Big(\exp\big(iX\cdot(t_j-t_k)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

Lause 16.0.1. *Olkoon $X(\omega), Y(\omega)$ P-rippumattomia. Silloin satunnaisvektorin (X,Y) karakteristinen funktio faktorisoituu*

$$\varphi_{X,Y}(s,t) := E_P(\exp(i(sX+tY))) = \varphi_X(s)\varphi_Y(t) := E_P(\exp(isX))E_P(\exp(itY))$$

Erityisesti

$$\varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \varphi_{X,Y}(t,t) = E_P(\exp(it(X+Y))) = \varphi_{X+Y}(t)$$

Osoitamme pian että tämä on myös riittävä ehto.

Esimerkki 16.0.1. *Olkoon $G(\omega)$ standardi gaussinen jolla $E(G)=0$ $E(G^2)=1$. silloin*

$$E_P(\exp(itG)) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$$

Koska kuvaus $z\mapsto \exp(-\frac{1}{2}z^2)$ on analyttinen, Cauchyn lauseesta seuraa

$$\oint_\Gamma \exp(-\frac{1}{2}z^2)dz = 0$$

kun integroidaan suljetun polun yli. Valitaan suljettu polku joka kulkee suoraana linjana pisteiden $(R-i\theta, R, -R, -R-i\theta)$ välissä kellon vastaisesti, jossa $R>0$, $\theta\in[0,2\pi]$.

Siksi

$$0 = \int_{-\theta}^{0} \exp(-\frac{1}{2}(R - i\psi)^2)d\psi + \int_{R}^{-R} \exp(-\frac{1}{2}r^2)dr$$
$$+ \int_{0}^{-\theta} \exp(-\frac{1}{2}(-R - i\psi)^2)d\psi + \int_{-R}^{R} \exp(-\frac{1}{2}(r - i\theta)^2)dr =$$
$$\exp(-\frac{1}{2}R^2) \int_{-\theta}^{0} (\exp(iR\psi) - \exp(-iR\psi)) \exp(\frac{1}{2}\psi^2)d\psi$$
$$+ \int_{-R}^{R} \exp(ir\theta + \frac{1}{2}\theta^2) \exp(-\frac{1}{2}r^2)dr - \int_{R}^{-R} \exp(-\frac{1}{2}r^2)dr$$

Kun $R \to \infty$, ensimmäinen integraali suppenee kohti nollaan, ja seuraa

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}r^2)dr = \exp(-\frac{1}{2}\theta^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ir\theta) \exp(-\frac{1}{2}r^2)dr$$

Kun $X = aG + b$, määritelmän mukaan X on edelleen Gaussinen odotusarvolla $E(X) = b$ ja varianssilla $E(X^2) - E(X)^2 = a^2$ ja sen karakteristinen funktio on

$$\varphi_X(\theta) = \exp(i\theta b)\varphi(a\theta) = \exp\left(i\theta b - \frac{\theta^2 a^2}{2}\right)$$

Karakteristinen funktio määrää satunnaismuuttujan jakauman:

Teoreema 16.0.1. *(Lévyn inversio lause)*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\exp(-iat) - \exp(-ibt)}{it} \varphi_X(t)dt = \tag{16.0.1}$$
$$\frac{1}{2}\{\, F(b) + F(b-)\} - \frac{1}{2}\{\, F(a) + F(a-)\} \tag{16.0.2}$$

Kun $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_X(t)|dt < \infty$, yllä oleva integraali suppenee absoluttisesti ja satunnaismuuuttujan jakaumalla on tiheysfunktio

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-itx)\varphi_X(t)dt$$

Tod.

$$\int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-iat) - \exp(-ibt)}{it} \exp(itx) P_X(dx)dt =$$
$$\int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \frac{\exp(it(x-a)) - \exp(it(x-b))}{it} dt P_X(dx),$$

jossa Fubinin lause soveltuu koska

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \left| \frac{\exp(it(x-a)) - \exp(it(x-b))}{it} \right| dt P_X(dx) \leq 2T(b-a)$$

koska $|\exp(i\theta) - \exp(i\psi)| \leq |\theta - \psi|$ kun $\theta, \psi \in \mathbb{R}$.

$$\int_{-T}^{T} \frac{\exp(it(x-a)) - \exp(it(x-b))}{it} dt = 2 \int_{0}^{T} \frac{\sin(t(x-a)) - \sin(t(x-b))}{t} dt$$

koska $t \to \sin(t)$ on ei-parillinen ja $t \to \cos(t)$ on parillinen, ja integroidaan $[-T, T]$ välissä,

$$= 2\{\, U(T(x-a)) - U(T(x-b))\}$$

jossa $U(t) = \int_0^t \sin(x) x^{-1} dx$.

Huomataan että kun $x \in (k2\pi, (k+1)2\pi]$, $\varepsilon \in (0,1)$

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \geq \frac{1}{(k+1)2\pi} \varepsilon \mathbf{1}(|\sin(x)| > \varepsilon)$$

ja siksi

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \geq \frac{2\varepsilon}{\pi} (\pi/2 - \arcsin(\varepsilon)) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Kuitenkin,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx := \lim_{T \to \infty} \int_0^T \frac{\sin(x)}{x} dx$$

ja tätä kautta määritellään integraali joka ei suppene absoluttisesti. Siinä käytetään Cauchyn kaavaa: Olkoon Γ on suljettu käyrä joka koostuu paloista

$$\Gamma_1 := \{\, z = x + i0 : x \in [-R, -\varepsilon]\},$$

$$\Gamma_2 = \{z = \varepsilon(\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)), \theta \in [0, \pi]\}$$

$$\Gamma_3 := \{\, z = x + i0 : x \in [\varepsilon, R]\},$$

$$\Gamma_4 := \{z = R(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \theta \in [0, \pi]\}$$

jossa $0 < \varepsilon < R$. Koska $f(z)/z$ on analyyttinen kun $z \neq 0$, erityisesti Γ käyrän rajoittaman alueen sisällä ja,

$$\oint_\Gamma \frac{\exp(iz)}{z} dz = 0$$

Seuraa

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\exp(iz)}{z} dz = \int_0^\pi \frac{\exp(iR(\cos(\theta) + i\sin(\theta)))}{Re^{i\theta}} \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta =$$
$$\int_0^\pi \frac{\exp(iR\cos(\theta) - R\sin(\theta))}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta$$
$$= i\int_0^\pi \exp(iR\cos(\theta)) \exp(-R\sin(\theta)) d\theta$$

ja kun $R \to +\infty$

$$\left| \int_0^\pi \exp(iR\cos(\theta)) \exp(-R\sin(\theta)) d\theta \right| \le \int_0^\pi \exp(-R\sin(\theta)) d\theta \to 0$$

jossa $\sin(\theta) > 0$ kun $\theta \in (0, \pi)$, ja käytämme dominoidun konvergenssin lausetta.

Samoin

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma_2} \frac{\exp(iz)}{z} dz = -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\int_0^\pi \exp(i\varepsilon\cos(\theta)) \exp(-\varepsilon\sin(\theta)) d\theta = i\int_0^\pi d\theta = -i\pi$$

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} \frac{\exp(iz)}{z} dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos(r) + i\sin(r)}{r} dr + \int_\varepsilon^R \frac{\cos(r) + i\sin(r)}{r} dr$$
$$= 2i\int_\varepsilon^R \frac{\sin(r)}{r} dr$$

koska $\cos(r) = \cos(-r)$ ja $\sin(r) = -\sin(-r)$. Kun $R \uparrow \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$, Cauchyn kaavasta seuraa

$$\int_0^\infty \frac{\sin(r)}{r} dr = \frac{\pi}{2},$$

ja

$$\lim_{T \to \infty} U(Tx) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ kun } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ kun } x < 0 \end{cases}$$

Kun $T \to \infty$, $a \leq b$

$$\lim_{T\to\infty} 2\{U(T(x-a)) - U(T(x-b))\}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{kun } x > b \text{ tai } x < a \text{ tai } x = a = b \\ 2\pi & \text{kun } x \in (a,b) = 2\pi \\ \pi & \text{kun } x = a < b \text{ tai } x = b > a \end{cases},$$

dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa väite 16.0.1

$$\frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty} E_P\Big(U(T(X-a)) - U(T(X-a))\Big) =$$
$$F_X(b-) - F_X(a) + \frac{F_X(b) - F_X(b-)}{2} + \frac{F_X(a) - F_X(a-)}{2}$$

Teoreema 16.0.2. *(Lévy) Olkoon $X_n(\omega_n) \in \mathbb{R}$ satunnaismuuttujen jono todennäköisyysavaruudeilla $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$, $n \in \mathbb{N}$, ja $\varphi_n(\theta) = E_{P_n}\big(\exp(i\theta X_n)\big)$ niiden karakteristiset funktiot.*

Kun

1. *On olemassa*

   $\varphi(\theta) := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\theta)\ \forall \theta \in \mathbb{R}$.

2. *kuvaus $\theta \mapsto \varphi(\theta)$ on jatkuva pisteessä $\theta = 0$,*

siitä seuraa että $\varphi(\theta) = E_P(\exp(i\theta X))$ on jonkun satunnaismuuttujan X:n karakteristinen funktio ja $X_n \xrightarrow{d} X$ jakauman mielessä.

Tod. Osoitamme ensin että jono $(X_n : n \in \mathbb{N})$ on tiukka. Koska

$$\varphi_n(\theta) + \varphi_n(-\theta) = 2E_{P_n}\big(\cos(\theta X_n)\big) \in \mathbb{R}$$

seuraa että $\big(\varphi(\theta) + \varphi(-\theta)\big) \in [-2, 2] \subset \mathbb{R}$.

Koska $\varphi(\theta)$ on jatkuva pisteessä 0, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ jolla

$$|1 - \varphi(\theta)| < \varepsilon/4 \text{ kun } |\theta| < \delta$$

Tästä seuraa

$$0 < \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \big(2 - \varphi(\theta) - \varphi(-\theta)\big) d\theta \leq \varepsilon/2$$

Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa että kun n on tarpeeksi suuri

$$0 < \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \big(2 - \varphi_n(\theta) - \varphi_n(-\theta)\big)d\theta \le \varepsilon$$

Kuitenkin

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{\mathbb{R}}\big(1-\exp(i\theta x)\big)F_n(dx)d\theta \\
&= \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\delta}^{\delta}\big(1-\exp(i\theta x)\big)d\theta F_n(dx) = 2\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin(\delta x)}{\delta x}\right)F_n(dx)
\end{aligned}$$

jossa Fubinin lause soveltuu koska $|1-\exp(i\theta x)| \le 2$. Kun n on tarpeeksi suuri, saadaan

$$\varepsilon \ge 2\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin(\delta x)}{\delta x}\right)F_n(dx) \ge 2\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{1}{\delta|x|}\right)F_n(dx) \ge P_n\big(|X_n| > 1/\delta\big)$$

eli jakaumien jono $F_n(\cdot) = P_n(X_n \le \cdot)$ on tiukka.

Helly valinnan lauseesta 15.0.4 seuraa että on olemassa alijono F_{n_k} ja rajajakauma F jolla $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ ja $F_{n_k}(t) \to F(t)$ kun $k \to \infty$ kaikisissa t jossa $F(t) = F(t-)$.

Heikon konvergenssin karakterisaatiosta seuraa että

$$\varphi_{n_k}(\theta) \to \varphi_F(\theta); = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx)F(dx) \quad \forall\theta \in \mathbb{R},$$

josta seuraa että $\varphi(\theta) = \varphi_F(\theta)$.

Osoitamme nyt että kun $F(t) = F(t-)$, koko jono $F_n(t) \to F(t)$. Se tarkoittaa että jokaisesta alijonosta n_ℓ löytyy alijonon aliljono n_{ℓ_j} jolla

$$F_{n_{\ell_j}}(t) \to F(t).$$

Mutta tämä seuraa kuten ennen, koska tiukkuuden avulla löytyy alijonon alijono jolla $F_{n_{\ell_j}}$ suppenee heikosti kohti rajajakaumaa $\widetilde{F}$, ja koska sen karakteristinen funktio pitää olla myös $\varphi(\theta)$, Lévy inversio lauseesta seuraa nähdään että myös tämä alijonon alijonon raja-jakauma on sama F □

Teoreema 16.0.3. *(Lévy keskeinen raja-arvo lause) Olkoon* (X_n) *P-riippumattomia ja samoin jakautuneita jolla* $E_P(X_1) = 0$*,* $Var_P(X) = \sigma^2 < \infty$

Olkoon

$$S_n(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega), \quad G_n(\omega) := \frac{S_n(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} \ .$$

Kun $n \to \infty$*,*

$$P\big(G_n > x\ \big) \longrightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\bigg(-\frac{x^2}{2}\bigg) dx = P(G \leq x)$$

Eli $G_n \stackrel{d}{\to} G$ *jossa* G *on standardi Gaussinen.*

Todistus.

Kun kehitetään funktion $\exp(ix)$ Taylorin sarjaksi, jäännöstermille

$$R_n(x) = e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!}$$

pätee

$$R_0(x) = e^{ix} - 1 = i \int_0^x e^{iy} dy, \text{ josta seuraa } |R_0(x)| \leq \min\big\{2, |x|\big\}$$

ja rekursio

$$R_n(x) = \int_0^x iR_{n-1}(y) dy, \text{ josta seuraa}$$

$$|R_n(x)| = \int_0^{|x|} \int_0^{x_1} \dots \int_{x_{n-1}} |R_0(x_n)| dx_n dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 \leq \int_0^{|x|} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} x_n dx_n dx_n dx_{n-1} \dots dx_1$$

$$= \int_0^{|x|} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} \int_0^{x_n} dx_{n+1} dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\text{ja } \ |R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} 2 dx_n = 2\frac{|x|^n}{n!}$$

$$\text{eli } \ |R_n(x)| \leq \min\bigg\{ \frac{2|x|^n}{n!}, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \bigg\}$$

Koska $E(X) = 0$ ja Var$(X) = \sigma^2 < \infty$,

$$\big|\varphi_X(\theta) - 1 + \sigma^2\theta^2/2\big| = \big|E_P\big(R_2(\theta X)\big)\big| \leq E_P\big(|R_2(\theta X)|\big) \leq \theta^2 E_P\bigg(X^2 \wedge |\theta| \frac{|X|^3}{6}\bigg) < \infty$$

ja Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa

$$\lim_{\theta\to 0} E_P\left(X^2 \wedge |\theta| \frac{|X|^3}{6} \right) = 0$$

siksi

$$\varphi_X(\theta) = 1 - \frac{\sigma^2\theta^2}{2} + o(\theta^2) \quad \text{kun } \theta \to 0 \tag{16.0.3}$$

Huomataan myös että kun $\log(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta$ kun $r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$ on logaritmin pääarvo,

$$\log(1+z) - z = \int_0^z \frac{-w}{1+w} dw = -z^2 \int_0^1 \frac{t}{1+tz} dt \ ,$$

ja kun $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1/2$ seuraa $|1+tz| \geq 1/2$, ja

$$\left| \log(1+z) - z \right| \leq |z|^2, \text{ kun } \quad |z| \leq 1/2 \ . \tag{16.0.4}$$

Mennään nyt keskeisen raja-arvo lauseen todistukseen: kun $\theta \in \mathbb{R}$, arviosta (16.0.3) seuraa

$$\varphi_{G_n}(\theta) = \varphi_{S_n}\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}} \right) = \varphi_X\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}} \right)^n =$$
$$\left\{ 1 - \frac{\theta^2}{2n} + o\left(\frac{\theta^2}{n} \right) \right\}^n$$

jossa $\theta^2/n \to 0$ kun $n \to \infty$. Arviosta (16.0.4) seuraa

$$\log \varphi_{G_n}(\theta) = n \log\left\{ 1 - \frac{\theta^2}{2n} + o\left(\frac{\theta^2}{n} \right) \right\} = n\left\{ -\frac{\theta^2}{2n} + o\left(\frac{\theta^2}{n} \right) \right\} \to -\frac{\theta^2}{2} \quad \square$$

Sovellus: Ennäysten jono Olkoon $(X_n : n \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, jolla on jatkuva kertymäfunktio $F_X(t)$. Jatkuvuudesta seuraa että $P(N) = 0$ jossa

$$N := \left\{ \omega : \exists \ i \neq j : X_i(\omega) = X_j(\omega) \right\}$$

eli tasatuloksilla on nolla todennäköisyys (harjoitusetehtävä). Määritelään ennätys-tapahtumia

$$A_n := \left\{ \omega : X_n(\omega) > X_k(\omega) \ \forall 1 \leq k \leq n \right\}$$

ja n-satunnaismuuttujan sijoitus

$$R_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}(X_k \geq X_n)$$

Teoreema 16.0.4. *(Rényi) Satunnaismuuttujat* $(R_n : n \in \mathbb{N})$ *ovat* P*-riippumattomia*

$$P(R_n = k) = 1/n \quad k = 1, \ldots, n$$

Tästä seuraa että tapahtumat $(A_n : n \in \mathbb{N})$ *ovat* P*-riippumattomia ja* $P(A_n) = P(R_n = 1) = 1/n$

Todistus Koska satunnaismuuttujat ovat P-riippumattomia ja samoin jakautuneita,

$$P\big(X_{\pi(1)} < X_{\pi(2)} < \cdots < X_{\pi(n)}\big) = 1/n!$$

kaikille joukon $\{\ 1, \ldots, n\}$ permutaatioille π, eli kaikki otoksen järjestyset ovat yhtä-todennäköisiä.

Huomataan myös ett jokainen realisaatio $(R_1 = 1, R_2 = r_2, \ldots, R_n = r_n)$ jossa $r_k \in \{1, 2, \ldots, k\}$ määrä otoksen järjestystä, siksi

$$P\big(R_1 = 1, R_2 = r_2, \ldots R_n = r_n) = 1/(n!)$$

$\forall r_k \in \{1, \ldots, k\}$, $k \leq n$. Erityisesti

$$P(\{\ R_n = k\}) = P(\{\pi(k) = n\}) = \frac{(n-1)!}{n!} = 1/n$$

josta seuraa

$$\prod_{k=1}^{n} P(\{\ R_k = r_k\}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n!} = P\big(R_1 = 1, R_2 = r_2, \ldots R_n = r_n) \quad \square$$

Olkoon nyt

$$\mu_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}(R_k = 1)$$

ennätysten määrä jonossa $(X_1, \ldots, X_n)$.

Lause 16.0.2.

$$\frac{\mu_n(\omega)}{\log(n)} = 1 \qquad P\text{-melkein varmasti}$$

Todistus Olkoon

$$M_n = \mu_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \mathbf{1}_{A_k}(\omega) - \frac{1}{k} \right\}$$

M_n on P-martingaali omassa filtraatiossa jolla on ennustettava kovariaatio

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Luku 17

Keskeinen raja-arvo lause , Steinin todistus

Lemma 17.0.1. *(Gaussinen osittaisintegrointi kaava) Olkoon* $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1)$*, jolla on jakauma*

$$\gamma(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \ .$$

ja olkoon $f, h \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \gamma)$ *jolla myös* $f', h' \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \gamma)$*. Silloin*

$$E_P\big(f'(G)h(G)\big) = E_P\bigg(f(G)(h(G)G - h'(G))\bigg)$$

erityisesti, kun $h(x) = 1$ *saadaan*

$$E_P\big(f'(G)\big) = E_P\big(f(G)G\big) = Cov_P(f(G), G)$$

kun $h(x) = x$ *,* $f \in C^2(\mathbb{R})$

$$E_P\big(f''(G)\big) = E_P\big(f'(G)G\big) = E_P\big(f(G)(G^2 - 1)\big) = Cov_P(f(G), G^2)$$

Kun $f(x) = x^m, h = 1$ *seuraa*

$$mE_P(G^{m-1}) = E_P(f'(G)) = E_P(f(G)G) = E_P(G^m G) = E_P(G^{m+1})$$

Tod.

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(y)dy$$

Koska $\partial\gamma(x) = -x\gamma(x)$, Fubinin lauseesta

$$E_P\big(f'(G)\big) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\gamma(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f'(x) \int_{-\infty}^{x} y\gamma(y)dydx$$
$$= -\int_{\mathbb{R}}\bigg(\int_y^{\infty} f'(x)dx\bigg)y\gamma(y)dy =$$
$$-f(\infty)\int_{\mathbb{R}} y\gamma(y)dy + \int_{\mathbb{R}} f(y)y\gamma(y)dy = -f(\infty)E_P(G) + E_P\big(f(G)G\big)$$

jossa $E_P(G) = 0$, ainakin silloin kun on olemassa $f(\infty) = \lim_{T\to\infty} f(T) \in \mathbb{R}$, ja vaikka näin ei olisi,

$$\lim_{T\to\infty} f(T)\int_{-T}^{T} y\gamma(y)dy = 0$$

joka tapauksessa, koska Gaussinen jakauma on symmetrinen.

Tämä pätee kun $f(x)$ on absoluttisesti jatkuva Lebesgue mitan suhteen ja $f'(x) \in L^1(\mathbb{R},\gamma)$ eli $\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\gamma(x)dx < \infty$, silloin Fubinin lauseen integroituvuuden ehto on voimassa

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\gamma(x)dx = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{x} |f'(x)y\,|\gamma(y)dydx + \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} |f'(x)y|\,\gamma(y)dydx < \infty$$

Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen jono, ja $E_P(X_1) = 0$, $E_P(X_1^2) = 1$ ja $E_P(|X_1|^m) < \infty \forall m > 0$.

Merkitään $S_n(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$. Osoitamme aluksi että, kun $f(x)$ on polynomi,

$$\lim_{n\to\infty} E_P\bigg(f\big(S_n/\sqrt{n}\big)\bigg) = E_P(f(G))$$

jossa satunnaismuuttuja $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1)$ on standardi gaussinen.

Oletamme induktio hypotheesia: kaikille $\ell = 1, \ldots, m$

$$\exists\ L_\ell := \lim_{n\to\infty} E_P\Bigg(\bigg(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\bigg)^\ell\Bigg) .$$

Selvästi $L_1 = 0$ ja $L_2 = 1$.

Kun $l = (m+1)$, symmetrisyydestä ja Newtonin kaavasta $(a+b)^m = \sum\limits_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} a^\ell b^{m-\ell}$ seuraa

$$\begin{aligned}
&E_P\big(S_n^{m+1}\big) = E_P\Big((S_{n-1}+X_n)^m(X_1+\cdots+X_{n-1}+X_n)\Big) = \\
&nE_P\Big((S_{n-1}(\omega)+X_n)^m X_n\Big) \\
&= n\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j} E_P\big(S_{n-1}^{m-j}X_n^{j+1}\big) \\
&= n\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j} E_P\big(S_{n-1}^{m-j}\big)E_P\big(X_n^{j+1}\big) \\
&= nmE_P(S_{n-1}^{m-1}) + \sum_{j=2}^{m}\binom{m}{j} E_P\big(S_{n-1}^{m-j}\big)E_P\big(X_n^{j+1}\big)
\end{aligned}$$

koska $E_P(X_n) = 0$ ja $E_P(X_n^2) = 1$. Jakamalla kertoimella $n^{(m+1)/2}$ saadaan

$$\begin{aligned}
&E_P\Bigg(\bigg(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\bigg)^{m+1}\Bigg) = \\
&mE_P\Bigg(\bigg(\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}\bigg)^{m-1}\Bigg) + \sum_{j=2}^{m} n^{(1-j)/2}\binom{m}{j} E_P\Bigg(\bigg(\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}\bigg)^{m-j}\Bigg)E_P\big(X_n^{j+1}\big)
\end{aligned}$$

Kun $n \to \infty$ induktio hypotheesistä seuraa

$$L_{m+1} := \lim_{n\to\infty} E_P\Bigg(\bigg(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\bigg)^{m+1}\Bigg) = mL_{m-1}$$

Koska $L_1 = 0$, seuraa induktiolla $L_{2m+1} = 0 \quad \forall m$, ja koska $L_2 = 1$ seuraa

$$L_{2m} = (2m-1)L_{2(m-1)} = (2m-1)(2m-3)L_{(2m-2)} = \cdots = \prod_{\ell=1}^{m}(2\ell-1) = \frac{(2m)!}{m!2^m}$$

Lemmasta 17.0.1 seuraa että satunnaismuuttujan $(S_n(\omega)/\sqrt{n})$ asympotti-set momentit täsmävät $\mathcal{N}(0,1)$ jakauman momenttien kanssa, riippumatta satunnaismuuttujan X_1:n jakaumasta.

Voidaan myös laskea formaalisesti raja-jakauman momentti generoiva funktion

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E_P\left(\exp\left(t\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} E_P\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^m\right) = \\
&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\lim_{n\to\infty} E_P\left(\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^m\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}L_m = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{2m}}{(2m)!}L_{2m} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^m = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = E_P\big(\exp(tG)\big)
\end{aligned}
$$

eli formaalisesti $n^{-1/2}S_n(\omega)$ raja-jakauman momentti generoiva funktio on standardi gaussinen.

Lemma 17.0.2. *Olkoon $\{X_k(\omega) : k \in \mathbb{N}\}$ riippumattomien satunnaismuuttujen jono, jolla $E_P(X_k) = 0$ ja $E_P(X_k^2) = \sigma_k^2 < \infty$*

Merkitään

$$
\begin{aligned}
\Sigma_n &= \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2} \\
\hat{S}_n(\omega) &= \frac{1}{\Sigma_n}\big(X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)\big) \\
r_n &= \max_{1\le k\le n}\frac{\sigma_k}{\Sigma_n} \\
g_n(\varepsilon) &= \frac{1}{\Sigma_n^2}\sum_{k=1}^{n} E_P\Big(X_k^2\mathbf{1}\big(|X_k| > \varepsilon\Sigma_n\big)\Big), \quad \varepsilon > 0
\end{aligned}
$$

ja $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1)$ on standardi gaussinen satunnaismuuttuja.

Olkoon $f(x) \in C^3(\mathbb{R})$ jolla on rajoitetut derivaatat:

$$
\| f'' \|_\infty := \sup_x |f''(x)| < \infty, \quad \| f''' \|_\infty := \sup_x |f'''(x)| < \infty,
$$

1. *Silloin $\forall\varepsilon > 0$,*

$$
\Big| E_P\big(f(\hat{S}_n)\big) - E_P\big(f(G)\big) \Big| \le \left(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{r_n}{2}\right) \| f''' \|_\infty + g_n(\varepsilon) \| f'' \|_\infty
$$

2. *Koska* $r_n^2 \leq \varepsilon^2 + g_n(\varepsilon)$, *kun* $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\varepsilon) = 0 \; \forall \varepsilon > 0$, *seuraa*

$$\lim_{n\to\infty} E_P\big(f(\hat{S}_n)\big) = E_P\big(f(G)\big)$$

Tod. Olkoon $\{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$ riippumattomia gaussisia satunnaismuttujat jotka ovat myös riippumattomia $(X_k : k \in \mathbb{N})$ jonosta, ja $E_P(\xi_k) = 0$ ja $E_P(\xi_k^2) = E_P(X_k^2) = \sigma_2^k$. Merkitään

$$\hat{G}_n(\omega) = \frac{1}{\Sigma_n}\big(\xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega)\big)$$

Huomataan että $\forall n \; \hat{G}_n(\omega)$ on standardi gaussinen.

Kiinnitämme nyt n, ja merkitään

$$\hat{X}_k(\omega) = \frac{X_k(\omega)}{\Sigma_n}, \quad \hat{\xi}_k(\omega) = \frac{\xi_k(\omega)}{\Sigma_n},$$
$$\hat{U}_m(\omega) = \big(\hat{X}_1(\omega) + \cdots + \hat{X}_{m-1}(\omega) + \hat{\xi}_{m+1}(\omega) + \cdots + \hat{\xi}_n(\omega)\big) \quad m \leq n$$

Koska $f(\hat{U}_k + \hat{X}_k) = f(\hat{U}_{k+1} + \hat{\xi}_{k+1})$, teleskoppisella summalla,

$$f(\hat{S}_n) - f(\hat{G}_n) = f(\hat{U}_n + \hat{X}_n) - f(\hat{U}_n + \hat{\xi}_n)$$
$$+ f(\hat{U}_{n-1} + \hat{X}_{n-1}) - f(\hat{U}_{n-1} + \hat{\xi}_{n-1}) + \cdots + f(\hat{U}_1 + \hat{X}_1) - f(\hat{U}_1 + \hat{\xi}_1)$$

Tästä seuraa

$$\Big|E_P\big(f(\hat{S}_n)\big) - E_P\big(f(G)\big)\Big| \leq \sum_{k=1}^{m} \Big|E_P\Big(f(\hat{U}_k + \hat{X}_k)\Big) - E_P\Big(f(\hat{U}_k + \hat{\xi}_k)\Big)\Big|$$

Olkoon

$$R_k(x) := f(\hat{U}_k(\omega) + x) - f(\hat{U}_k(\omega)) - x f'(\hat{U}_k(\omega)) - \frac{x^2}{2} f''(\hat{U}_k(\omega))$$

toisen asteen Taylorin kehitelmän jäännöstermi, jossa

$$R_k(x) \leq \min\Big(x^2 \parallel f'' \parallel_\infty, \; \frac{|x|^3}{6} \parallel f''' \parallel_\infty\Big)$$

Koska $\hat{X}_k \perp\!\!\!\perp \hat{U}_k$ ja $\hat{\xi}_k \perp\!\!\!\perp U_k$, $E_P(\hat{X}_k) = E_P(\hat{\xi}_k) = 0$, $E_P(\hat{X}_k^2) = E_P(\hat{\xi}_k^2) = (\sigma_k^2 / \Sigma_n^2)$ seuraa

$$\Big|E_P\Big(f(\hat{U}_k + \hat{X}_k)\Big) - E_P\Big(f(\hat{U}_k + \hat{\xi}_k)\Big)\Big| \leq E_P\Big(\big|R_k(\hat{X}_k)\big|\Big) + E_P\Big(\big|R_k(\hat{\xi}_k)\big|\Big)$$

jossa

$$\sum_{k=1}^n E_P\bigg(\big| R_k(\hat\xi_k)\big|\bigg) \le \frac{E_P(|G|^3)}{6} \parallel f''' \parallel_\infty \sum_{k=1}^n \bigg(\frac{\sigma_k^3}{\Sigma_n^3}\bigg) \le \frac{r_n}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \parallel f''' \parallel_\infty$$

jossa $G \sim \mathcal{N}(0,1)$ ja $E_P(|G|^3) = 2^{3/2}\pi^{-1/2}$, ja

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n E_P\bigg(\big| R_k(\hat X_k)\big|\bigg) \\
&\le \frac{\parallel f''' \parallel_\infty}{6} \sum_{k=1}^n E_P\bigg(|\hat X_k|^3 \mathbf{1}(|\hat X_k| \le \varepsilon)\bigg) + \parallel f'' \parallel_\infty \sum_{k=1}^n E_P\bigg(\hat X_k^2 \mathbf{1}(|\hat X_k| > \varepsilon)\bigg) \\
&\le \frac{\parallel f''' \parallel_\infty}{6} \sum_{k=1}^n E_P\bigg(\varepsilon \hat X_k^2 \mathbf{1}(|\hat X_k| \le \varepsilon)\bigg) + \parallel f'' \parallel_\infty \sum_{k=1}^n E_P\bigg(\hat X_k^2 \mathbf{1}(|\hat X_k| > \varepsilon)\bigg) \\
&\le \varepsilon \frac{\parallel f''' \parallel_\infty}{6} + \parallel f'' \parallel_\infty g_n(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Väite seuraa kun summataan yhteen näitä approksimatioita □

Huomamme että kun satunnaismuuttujat $(X_k : k \in \mathbb{N})$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, joilla $E_P(X_1) = 0$ ja $E_P(X_1^2) = \sigma^2$, automaattisesti lemman 17.0.2 oletus on voimassa, koska

$$g_n(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma^2} E_P(X_1^2 \mathbf{1}(|X_1| > n\varepsilon\sigma^2) \to 0 \text{ kun } n \to \infty \ .$$

Seuraavaksi yleistämme lemman 17.0.2 siloitustekniikalla myös jatkuville funktioille joilla on korkeintaan kvadraattinen kasvu:

Teoreema 17.0.1. *(Lindebergin keskeinen raja-arvo lause).*
Lemman 17.0.2 asetuksissa, olkoon $f(x)$ jatkuva funktio jolle

$$|f(x)| \le c\,(1 + x^2) \quad \forall x, \text{ jollekin } c > 0$$

1. *Jos $g_n(\varepsilon) \to 0$ kaikille $\varepsilon > 0$ seuraa*

$$E_P\bigg(f\big(\hat S_n\big)\bigg) \to E_P\big(f(G)\big)$$

jossa $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2. *Sen lisäksi, kaikille* $a < b$

$$P\Big(a < \hat{S}_n \leq b\Big) \to P\Big(a < G \leq b\Big)$$

Tod. Olkoon $Y(\omega) \in (-1,1)$ satunnaismuuttuja jolla on sileä tiheysfunktio $\rho(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Muuttujan vaihto-kaavalla seuraa että satunnaismuuttujalla $(Y(\omega)/k)$ on tiheysfunktio $k\rho(yk)$ kun $k > 0$. Määritellään

$$\begin{aligned}
&f_k(x) := E_P\Big(f(x - Y/k)\mathbf{1}(|x - Y/k| \leq k)\Big) \\
&= \int_{-1/k}^{1/k} f(x-y)\mathbf{1}(|x-y| \leq k)k\rho(ky)dy = \int_{-k}^{k} f(y)k\rho(k(x-y))dy
\end{aligned}$$

$f_k(x)$ on kompaktikantainen, ja koska $f_k(x) = 0$ kun $|x| > (k + k^{-1})$, ja koska $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ ja f on jatkuva, kuvaus

$$(x,y) \mapsto k^2\rho'((x-y)k)f(y)$$

on rajoitettu kompaktissa

$$C_k = \Big\{(x,y) : y \in [-k,k], x \in [y-k, y+k]\Big\}$$

siksi dominoiudun konevergenssin lauseesta seuraa että f_k on derivoituva ja

$$\frac{d}{dx}f_k(x) = k^2\int_{-k}^{k} f(y)\rho'((x-y)k)dy$$

Samoin seuraa korkeimpien derivaattojen olemassaolo.

Kun $k \to \infty$ dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) := \lim_{k\to\infty} E_P\left(f\left(x - \frac{Y}{k}\right)\mathbf{1}\left(\left|x - \frac{Y}{k}\right| \leq k\right)\right) = E_P(f(x-0)) = f(x)$$

Osoitamme että $f_k(x) \to f(x)$ tasaisesti kompakteissa. Koska f on tasaisesti jatkuva kompakteissa, $\forall R > 0$, $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ jolla $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ kun $|x| \leq R$ ja $|x-y| < \delta$. Siksi kun $k \geq \delta^{-1}$, kaikille

$|x| \leq R$

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f_k(x)| = \\
&= \Big| f(x) - E_P(f(x - Y/k)\mathbf{1}\big(|x - Y/k| \leq k\big) \Big| \\
&= \Big| E_P\big(f(x) - f(x - Y/k)\big) \Big| \qquad \forall x : |x| \leq R \text{ kiinteä ja } k \text{ tarpeeksi suuri} \\
&\leq E_P(|f(x) - f(x - Y/k)|) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Kolmion epäyhtälöstä, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\left| E_P\bigg(f(\hat{S}_n) - f(G_n) \bigg) \right| \\
&\leq \left| E_P\bigg(f(\hat{S}_n) - f_k(\hat{S}_n) \bigg) \right| + \left| E_P\bigg(f_k(\hat{S}_n) - f_k(G_n) \bigg) \right| + \left| E_P\bigg(f_k(G_n) - f(G_n) \bigg) \right|
\end{aligned}$$

Jokaiselle $k \in \mathbb{N}$, $f_k(x)$ on sileä ja kompaktikantainen, rajoitetuilla derivaatoilla, ja täyttää 17.0.2 ehtoja

Oletuksesta $\forall \varepsilon > 0$ $g_n(\varepsilon) \to 0$ kun $n \to \infty$, seuraa $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left| E_P\bigg(f_k(\hat{S}_n) - f_k(G_n) \bigg) \right| \longrightarrow 0 \quad \text{kun } n \uparrow \infty$$

Tasaisesta konvergenssista seuraa $\forall R > 0, \varepsilon$ on olemassa $\delta > 0$ jolle

$$\big| f(\hat{S}_n) - f_k(\hat{S}_n) \big| \mathbf{1}\bigg(|\hat{S}_n| \leq R \bigg) \leq \varepsilon$$

kun $k \geq \delta^{-1}$. Siksi $\forall n, R$.

$$\limsup_{k \to \infty} \limsup_n E_P\bigg(\big| f(\hat{S}_n) - f_k(\hat{S}_n) \big| \mathbf{1}\bigg(|\hat{S}_n| \leq R \bigg) \bigg) = 0$$

Samoin

$$\limsup_{k \to \infty} E_P\bigg(\big| f(G) - f_k(G) \big| \mathbf{1}\bigg(|\hat{G}| \leq R \bigg) \bigg) = 0$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \left| E_P\bigg(f\big(\hat{S}_n\big) - f\big(G\big) \bigg) \right| \leq \\
&\limsup_{k \to \infty} \limsup_n E_P\bigg(\big| f(\hat{S}_n) - f_k(\hat{S}_n) \big| \mathbf{1}\bigg(|\hat{S}_n| > R \bigg) \bigg) \\
&+ \limsup_{k \to \infty} E_P\bigg(\big| f(G) - f_k(G) \big| \mathbf{1}\bigg(|G| > R \bigg) \bigg)
\end{aligned}$$

Nyt käytämme hypotheesia $|f(x)| \leq c\,(1+x^2)$. Kun $|x| \geq 2$ seuraa

$$|f_k(x)| \leq E_P\big(|f(x-Y/k)|\big) \leq c\,(1+(|x|+1)^2) \leq 2c\,(1+x^2) \text{ ja}$$
$$|f_k(x)-f(x)| \leq |f_k(x)|+|f(x)| \leq 3c\,(1+x^2)\ , \text{ siksi}$$
$$\limsup_n \left| E_P\bigg(f\big(\hat{S}_n\big) - f\big(G\big)\bigg)\right|$$
$$\leq \limsup_n 3c\; E_P\bigg((1+\hat{S}_n^2)\mathbf{1}\bigg(|\hat{S}_n| > R\bigg)\bigg) + cE_P\bigg((1+G^2)\mathbf{1}\bigg(|G| > R\bigg)\bigg)$$

Koska $G \in L^2(P)$,

$$\lim_{R\to\infty} E_P\bigg((1+G^2)\mathbf{1}\bigg(|G| > R\bigg)\bigg) = 0\ .$$

Seuraavaksi approksimoidaan indikaattori $\mathbf{1}\big(|x| > R\big)$ sileällä funktiolla. Olkoon $\eta \in C^\infty : \mathbb{R} \to [0,1]$, jolla

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{kun } |x| \leq 1/2 \\ \in (0,1) & 1/2 < |x| < 1 \end{cases}$$

$$\psi_R(x) := (1+x^2)\eta(x/R) \leq (1+x^2) \quad \text{jolla}$$
$$(1+x^2)\mathbf{1}(|x| > R) \leq \psi_R(x) \leq (1+x^2)\mathbf{1}(|x| > R/2)\ .$$

Koska

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_R(x) = R^{-2}\eta''(x/R)(1+x^2) + R^{-1}\eta'(x/R)2x + 2\eta(x/R)$$

ja derivaatat $\eta^{(\ell)}(x/R) = 0$, $\ell \geq 1$, ovat kompaktikantaisia seuraa

$$\sup_x |\psi_R''(x)| < \infty,\ \sup_x |\psi_R'''(x)| < \infty\ .$$

Lemmasta 17.0.2 seuraa

$$\left| E_P\big(\psi_R(\hat{S}_n)\big) - E_P\big(\psi_R(G)\big)\right| \longrightarrow 0$$

kun $n \to \infty$, ja

$$E_P\bigg((1+S_n^2)\mathbf{1}\bigg(|\hat{S}_n| > R\bigg)\bigg)$$
$$\leq E_P\big(\psi_R(\hat{S}_n)\big) \to E_P\big(\psi_R(G)\big) \leq E_P\bigg((1+G^2)\mathbf{1}(|G| > R/2)\bigg) \to 0 \text{ kun } R \uparrow \infty.$$

Lopuksi olkoon $a < b$. On olemassa jatkuvien funktioden jonoja $(\overline{\psi}_m)$, $(\underline{\psi}_m) \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ joilla

$$0 \le \underline{\psi}_m(x) \uparrow \mathbf{1}_{(a,b]}(x), \quad 1 \ge \overline{\psi}_m(x) \downarrow \mathbf{1}_{(a,b]}(x)$$

Väiteestä (1) ja monotonisesta konvergenssista seuraa

$$\liminf_n P(a < \hat{S}_n \le b) \ge \liminf_n E_P(\overline{\psi}_m(S_n)) = E_P(\overline{\psi}_m(G)) \downarrow P(a < G \le b)$$
$$\limsup_n P(a < \hat{S}_n \le b) \le \limsup_n E_P(\underline{\psi}_m(S_n)) = E_P(\underline{\psi}_m(G)) \uparrow P(a < G \le b)$$

kun $m \to \infty$ □

Teoreema 17.0.2. *Yleistetty keskeinen raja-arvo lause Olkoon* $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ *jono* P*-riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden tiheysfunktio* $p(x)$ *on olemassa ja totetuttaa*

1. $p(x) = p(-x), \quad x \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to\infty} p(x)x^{\alpha+1} = c \in (0, +\infty)$*, jossa* $0 < \alpha < 2$*,*

Silloin

$$\widehat{S}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d} \widehat{Y}$$

jossa Y*:n jakaumalla on karakteristinen funktio* $\varphi_Y(t) = \exp(-c|t|^\alpha)$.

Tod. Osoitamme ensin että

$$\lim_{t\to 0} \varphi_X(t) = 1 - c|t|^\alpha + o(|t|^\alpha) \qquad \text{kun } t \to 0$$

Tästä seuraa

$$\varphi_{\widehat{S}_n}(t) = \Big(\varphi_X(tn^{-1/\alpha})\Big)^n = \Big(1 - \frac{c|t|^\alpha + o(1)}{n}\Big)^n \to \exp\big(-c|t|^\alpha\big) \text{ kun } n \to \infty$$

Lähdetään nyt arvioimaan $\varphi_X(t)$ kun $t \to 0$. Käytämme symmetriaa $p(x) = p(-x)$, josta seuraa $\varphi_X(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)} \in \mathbb{R}$. Kun $M > 0$ kiinteä,

$$\varphi_X(t) = \int_R p(x)e^{itx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)p(x)dx = 1 - \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(tx))p(x)dx$$

olkoon $t > 0$

$$\int_0^{\infty}(1-\cos(tx))dx = \int_0^{1/t}(1-\cos(tx))p(x)dx + \int_{1/t}^{\infty}(1-\cos(tx))p(x)dx \le t\int_0^{1/t} xp(x)dx$$

$$\int_0^M p(x)\cos(tx)dx + \int_M^{1/t} p(x)\cos(tx)dx + \int_{1/t}^{+\infty} p(x)\cos(tx)dx$$

jossa kun $t \downarrow 0$

$$\left|\int_{1/t}^{+\infty} p(x)\cos(tx)dx\right| \le \text{Const.}t^{\alpha} \downarrow 0$$

Koska $1-\cos(x) \le x^2/2$,

$$\left|\int_0^M p(x)(\cos(tx)-1)dx\right| \le \frac{ct^2}{2}\int_0^M p(x)x^2dx \le \frac{cM^2t^2}{2} \to 0 \text{ kun } t \to 0$$

ja $\left|e^{itx}-1\right| \le |tx|$

$$\left|\int_M^{1/t} p(x)\Big(e^{itx}-1-itx\ \Big)dx\right| \le \frac{ct^2}{2}\int_M^{1/t} x^{1-\alpha}dx \le \text{Const.}t^{\alpha} \to 0 \text{ kun } t \to 0$$

Siis

$$\varphi_X(t) = \int_0^{1/t} p(x)dx + \int_M^{1/t} itx$$

Luku 18

Suurten satunnaismatriisien ominaisarvojen jakauma

Olkoon $\{\xi_{ij}(\omega) : i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq i\}$ P-riippumattomia ja samoinjakautuneita satunnaismuuttujia jolla pätee

1. $E(|\xi_{ij}|^k) < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
2. $E(\xi_{ij}) = 0$, $E(\xi_{ij}^2) = 1$
3. ξ_{ij} jakauma on symmetrinen, eli $P(\xi_{ij} \in B) = P(-\xi_{ij} \in B)$.

Jakauman symmetriasta seuraa että $E_P(\xi_{ij}^{2k+1}) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Merkitään myös $\xi_{ij}(\omega) = \xi_{ji}(\omega)$ kun $j > i$.

Olkoon $A^{(n)}(\omega) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrinen satunnaismatriisi jolla $A_{ij}^{(n)}(\omega) = A_{ji}^{(n)}(\omega) = \frac{\xi_{ij}(\omega)}{2\sqrt{n}}$, ja olkoon $\lambda_1^{(n)} \leq \lambda_2^{(n)} \leq \dots \lambda_n^{(n)}$ sen ominaisarvot.

Ominaisarvojen jakauma on

$$Q^{(n)}(B) = E_P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(\lambda_i^{(n)} \in B)\right), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Osoitamme että $Q^{(n)}$ suppenee jakauman mielessä kohti satunnaismuuttujan jakaumaa.

Tutkimme $Q^{(n)}$ momentteja

$$M^{n,k} := \int_{\mathbb{R}} \lambda^k Q^{(n)}(d\lambda) = E_P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\lambda_i^{(n)}\big)^k\right) =$$
$$E_P\left(\frac{1}{n}\mathrm{Trace}\big((A^{(n)})^k\big)\right) = \frac{1}{2^k n^{1+k/2}}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n} E_P\Big(\xi_{i_1 i_2}\xi_{i_2 i_3}\ldots\xi_{i_k i_1}\Big)$$

P-riippumattomuudesta ja jakauman symmetriasta huomataan että että odotusarvo on nolla silloin kun satunnaismuuttuja $\xi_{j\ell}$ esintyy paritonta monta kertaa. Erityisesti $M^{n,k} = 0$ kun k on pariton. Oletetaan sitten että $k = 2m$ on parillinen.

Todistamme että kun $n \to \infty$, rajaarvoon kontribuoivat pelkästään termeja jossa jokainen indeksi pari $\{j, \ell\}$ esintyy täsmälleen 0 tai 2 kertaa.

Jokainen termi summassa vastaa suljettua polkua $i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2m} i_1$ joka kulkee joukossa $\{1, \ldots, n\}$ ja palaa takaisiin alkutilaan. Sanotaan että polku kulkee parin $\{j, \ell\}$ kautta jos $i_s = j, i_{s+1} = \ell$ tai $i_s = \ell, i_{s+1} = j$ jollekin $s = 1, \ldots, 2m$. Myös $\{j, j\}$ on mahdollinen pari.

Polun kontribuutio on 0 jos jokin pari esintyy polussa paritonta monta kertaa. Että polun kontribuutio summalle olisi positiivinen, jokain pari $\{j, \ell\}$ pitää esintyä parillista monta kertaa.

Sanotaan että $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m) \in \mathbb{N}^m$ on m-osituksen jos

$$1\pi_1 + 2\pi_2 + \cdots + m\pi_m = m$$

Merkitään $|\pi| = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m$.

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_{2m}=1}^{n} E_P\Big(\xi_{i_1 i_2}\xi_{i_2 i_3}\ldots\xi_{i_k i_1}\Big) = \sum_{\pi} N_\pi C_\pi$$

jossa π on $(2m)$-ositus,

$$C_\pi = \prod_{\ell=1}^{m} E_P(\xi_{11}^{2\ell})^{\pi_\ell}$$
$$N_\pi =$$

Olkoon $X^{(n)}(\omega) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satunnaismatriisi jolla $X_{ij}^{(n)}(\omega)$ ovat satunnaisia.