

HY Todennäköisyysteoria I kevät 2015, kurssikokeen malliratkaisut (30.03.2015)

Valitse kolme tehtävää tästä neljän tehtävän listasta ja vastaa tehtävien kysymyksiin. Jos jää aikaa voit toki vastata myös neljanteen tehtävään.

Tehtävissä, kaikki satunnaismuuttujat elävät todennäköisyysavaruudessa (Ω, \mathcal{F}, P) .

1. Muistetaan monotonisen konvergenssin lause: Jos $0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ P -melkein varmasti kun $n \rightarrow \infty$, siitä seuraa $E_P(X_n) \uparrow E_P(X) \in [0, +\infty]$.

- (a) Todista Fatou'n lemma monotonisen konvergenssin lauseen perusteella, eli kun satunnaismuuttujien jono $X_n(\omega) \geq 0$ P -melkein varmasti $\forall n \in \mathbb{N}$, siitä seuraa

$$E_P(\liminf_n X_n) \leq \liminf_n E_P(X_n)$$

R. Fatou Lemma löytyy tn-teorian kirjoista ja luennoitsijan monisteesta (Lemma 4.1.4).

- (b) Käänteis-Fatou lemma koskee $\limsup_n X_n(\omega)$,

$$E_P(\limsup_n X_n) \geq \limsup_n E_P(X_n)$$

mutta millä oletuksilla se pätee? Todista Käänteis-Fatou lemma.

R Tämä ei päde ilman lisäoletuksia (Lemma 4.1.5) luennoitsijan monisteesta: Riittävä ehto on: on olemassa integroitava yläraja $Y(\omega) \in L^1(P)$ jolla

$$X_n(\omega) \leq Y(\omega) \quad P\text{-melkein varmasti } \forall n \in \mathbb{N}$$

- (c) Olkoon $\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ ja $X(\omega)$ satunnaismuuttujat jolla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \quad P\text{-melkein varmasti} \quad (0.1)$$

Esitä riittävä ehto odotusarvojen konvergenssille $E_P(X_n) \rightarrow E_P(X)$.

R. Lebesgue dominoidun konvergenssin lauseen mukaan (Lause 4.1.1 luennoitsijan monisteesta), $E(X_n) \rightarrow E(X)$ kun $X_n(\omega) \rightarrow$

$X(\omega)$ P -melkein varmasti ja on olemassa integroitava yläraja $Y \in L^1(P)$ jolla

$$|X_n(\omega)| \leq Y(\omega) \quad P\text{-melkein varmasti } \forall n \in \mathbb{N}$$

Esitä myös vastaesimerkki jossa $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ P -melkein varmasti mutta $E_P(X_n)$ ei suppene kohti $E_P(X)$.

R. Katso Esimerkki (4.1.1) luennoitsijan monisteesta.

2. Todennäköisyysvaruudessa (Ω, \mathcal{F}, P) , olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja jolla

$$P(G \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (0.2)$$

- (a) Laske odotusarvo $E_P\left(\exp(G^2\lambda/2)\right) \in [0, +\infty]$ kun $\lambda \in \mathbb{R}$.

R.

$$\begin{aligned} E_P\left(\exp(G^2\lambda/2)\right) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(x^2\lambda/2) P(G \in dx) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp(x^2\lambda/2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{x^2(1-\lambda)}{2}\right) dx \end{aligned}$$

joka saa arvo $+\infty$ jos $\lambda \leq 0$, ja kun $\lambda > 0$, muuttujan vaihdolla $y = x\sqrt{1-\lambda}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \left|\frac{dx}{dy}\right| dy = (1-\lambda)^{-1/2} P(G \in \mathbb{R}) = (1-\lambda)^{-1/2}$$

- (b) Laske sitten oikean puolen yläraja seuraavan Chernoffin epäyhtälöstä.

$$\begin{aligned} P(|G| \geq t) &= P\left(\exp\left(\frac{\lambda G^2}{2}\right) \geq \exp\left(\frac{\lambda t^2}{2}\right)\right) \quad \forall \lambda > 0 \\ \implies P(|G| \geq t) &\leq \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \exp\left(-\frac{\lambda t^2}{2}\right) E_P\left(\exp\left(\frac{\lambda G^2}{2}\right)\right) \right\} \end{aligned}$$

Vihje Etsi funktion minimin derivoimalla funktion logaritmin.

R. Minimoidaan λ :n suhteen funktio

$$\lambda \mapsto -\frac{\lambda t^2}{2} - \frac{1}{2} \log(1-\lambda)$$

Koska minimi-kohdalla λ_* derivaatta saa arvo nolla silloin kun se on olemassa, saadan $\lambda_* = 1 - t^{-2}$, ja sijoittamalla

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \exp\left(-\frac{\lambda t^2}{2}\right) (1 - \lambda)^{-1/2} \right\} = \exp\left(-\frac{\lambda_* t^2}{2}\right) (1 - \lambda_*)^{-1/2} = \exp\left(\frac{1 - t^2}{2}\right) t$$

$$P(|G| \geq t) \leq \min\left\{1, \exp\left(\frac{1 - t^2}{2}\right) t\right\}$$

3. Olkoon $\varepsilon > 0$, ja $(X_n(\omega) \in \mathbb{N})$ jono satunnaismuuttujia (ei välttämättä riippumattomia !) jolla

$$P\left(X_n = (n^{(1+\varepsilon)} - 1)\right) = n^{-(1+\varepsilon)} = 1 - P(X_n = -1)$$

Pelin tulkinta: X_n on pelaajan voitto arpajaisissa jossa arpalippu maksaa 1 €, ja voittaa $n^{(1+\varepsilon)}$ € todennäköisyydellä $n^{-(1+\varepsilon)}$.

(a) Osoita: $E_P(X_n) = 0$

R

$$E_P(X_n) = (n^{(1+\varepsilon)} - 1)P(X_n = (n^{(1+\varepsilon)} - 1)) - P(X_n = -1) = (n^{(1+\varepsilon)} - 1)n^{-(1+\varepsilon)} - (1 - n^{-(1+\varepsilon)}) = 0$$

(b) Osoita :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} \begin{cases} = \infty & \text{kun } \varepsilon \leq 0 \\ < \infty & \text{kun } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

R.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} \leq \int_1^{\infty} x^{-(1+\varepsilon)} dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} x^{-(1+\varepsilon)} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

ja siitä seuraa että

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} < \infty \iff \int_1^{\infty} x^{-(1+\varepsilon)} dx < \infty$$

jossa oikean puolen integraali on laskettavissa:

$$\int_1^t x^{-(1+\varepsilon)} dx = \begin{cases} \varepsilon^{-1}(1 - t^{-\varepsilon}) & \text{kun } \varepsilon \neq 0 \\ \log(t) - \log(1) = \log(t) & \text{kun } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

ja siksi

$$\int_1^{\infty} x^{-(1+\varepsilon)} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-(1+\varepsilon)} dx = \begin{cases} \varepsilon^{-1} < \infty & \text{kun } \varepsilon > 0 \\ +\infty & \text{kun } \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

- (c) Olkoon $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)$. Osoita että todennäköisyydellä $P = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = -1$$

Vihje: käytä Borel Cantellin lemma (kumpi ?).

Eli vaikka peli on odotusarvon mielessä reilu, pelaaja joka jatkaa pelaamaan lopulta häviää pystyyn! **R.** Koska oletetusti $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(X_n \neq -1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-(1+\varepsilon)} < \infty$$

ensimmäisen Borel Cantelli lemmän nojalla seuraa

$$P(\limsup_n \{ \omega : X_n(\omega) \neq -1 \}) = 0$$

ja siksi

$$P(\liminf_n \{ \omega : X_n(\omega) = -1 \}) = 1$$

Eli P -melkein varmasti, on olemassa $N(\omega) < \infty$ jolla $X_n(\omega) = -1$ $\forall n > N(\omega)$.

Tästä seuraa että P -melkein varmasti, $\forall n > N(\omega)$

$$\frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{S_{N(\omega)}(\omega)}{n} - \frac{n - N(\omega)}{n}$$

josta seuraa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{N(\omega)}(\omega)}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - N(\omega)}{n} = 0 - 1$$

4. Muistetaan satunnaismuuttujen jonon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ stokastisen konvergenssin määritelmä:

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$$

Osoita:

- (a) Jos $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0$ P -melkein varmasti, siitä seuraa $X_n \xrightarrow{P} 0$ (stokastisesti). **R.** Lause (6.0.1.1) luennoitsijan monisteesta.

- (b) Jos $X_n \xrightarrow{P} 0$ (stokastisesti), on olemassa deterministinen alijono $(n_k : k \in \mathbb{N})$ jolla $\lim_{k \rightarrow \infty} X_{n_k}(\omega) = 0$ P -melkein varmasti.

Vihje Muista Borel Cantellin lemma.

R. Lause (6.0.1.2) luennoitsijan monisteesta.

- (c) Jos $X_n \xrightarrow{L^q} 0$, eli $\lim_{n \rightarrow \infty} E_P(|X_n|^q) = 0$ jossa $q > 0$, siitä seuraa $X_n \xrightarrow{P} 0$ (stokastisesti).

Vihje Muista Chebychevin epäyhtälö.

R. Teoreema (7.0.1) luennoitsijan monisteesta.

- (d)

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \text{ (stokastisesti)} \iff d(X_n, 0) := E_P\left(\frac{|X_n|}{1 + |X_n|}\right) \longrightarrow 0 \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

R. Teoreema (6.0.1) luennoitsijan monisteesta.