

**HY, Todennäköisyysteoria I yleistentti, Ratkaisut 25 helmikuuta 2015**

Valitse 4 tehtävää listasta 1,2,3,4,5, ja vastaa tehtävien kysymyksiin. Toki voit myös ratkaistaa kaikki tehtävät jos sinulle jää siihen tarpeeksi aikaa.

1. Olkoon  $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$  satunnaismuuttujen jono todennäköisyysavaruudessa  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

(a) Osoita että  $X(\omega) := \liminf_n X_n(\omega)$  on olemassa  $\forall \omega \in \Omega$  ja se on satunnaismuuttuja (eli  $\mathcal{F}$ -mitallinen funktio).

**R.** Olkoon

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega) = \min\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}, \quad \bigvee_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega) = \max\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\},$$

Silloin  $\liminf_n X_n(\omega) = \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{n \geq m} X_n(\omega)$ .

Kuvaus  $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  on mitallinen jos ja vain jos  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$Y^{-1}((-\infty, t]) = \{\omega : Y(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}$$

Tämä seuraa koska kokoelma

$$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$$

on sekä  $\pi$ -luokka että Dynkinin luokka, eli se on suljettu leikkauksen, komplementtin ja monotonisen rajan suhteen, koska  $\mathcal{F}$  on  $\sigma$ -algebra, eli  $\mathcal{C}$  on  $\sigma$ -algebra.

Jos  $(-\infty, t] \in \mathcal{C}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , sitä seuraa

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \mathcal{C} \supseteq \sigma((-\infty, t] : t \in \mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ja väite on osoitettu.

Olkoon nyt  $Y_m(\omega) = \bigvee_{n \geq m} X_n(\omega)$ . Silloin  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$Y_m^{-1}((-\infty, t]) = \{\omega : Y_m(\omega) \leq t\} = \bigcap_{n \geq m} \{\omega : X_n(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}$$

koska  $X_n$  ovat  $\mathcal{F}$ -mitallisia ja  $\mathcal{F}$  on  $\sigma$ -algebra.

Samoin

$$X(\omega) := \limsup_n X_n(\omega) = \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} Y_m(\omega)$$

on  $\mathcal{F}$ -mitallinen ja

$$\{\omega : X(\omega) > t\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{\omega : Y_m(\omega) > t\} \in \mathcal{F}$$

ja  $\{\omega : X(\omega) \leq t\} = \{\omega : X(\omega) > t\}^c \in \mathcal{F}$ .

Lopuksi myös  $\liminf_n X_n(\omega) = -(\limsup_n (-X_n))$  on  $\mathcal{F}$ -mitallinen, koska jos  $X(\omega)$  on mitallinen ja  $Y(\omega) = -X(\omega)$ ,

$$\begin{aligned} \{\omega : Y(\omega) \leq t\} &= \{\omega : -X(\omega) \leq t\} = \\ \{\omega : X(\omega) \geq -t\} &= \bigcap_n \{\omega : X(\omega) > -t - 1/n\} \\ &= \bigcap_n \{\omega : X(\omega) \leq -t - 1/n\}^c \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

- (b) Oletamme nyt että  $\mathbb{P}(X_n \geq 0) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ . Todista Fatou lemma: satunnaismuuttujien jonolle jolla  $\mathbb{P}(X_n \geq 0) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$0 \leq E_{\mathbb{P}}(\liminf_n X_n) \leq \liminf_n E_{\mathbb{P}}(X_n)$$

**Vihje** Muista monotonisen konvergenssin lause.

**R** Olkoon  $Y_m(\omega) := \bigvee_{n \geq m} X_n(\omega)$ . Monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa että

$$E(Y_m) = E\left(\bigvee_{n \geq m} X_n\right) = E\left(\bigvee_{n \geq m} X_n\right) =$$

jolla  $0 \leq Y_m(\omega) \downarrow X(\omega) = \limsup_m X_m$ , koska ei-kasvavalle positiiviselle jonolle on olemassa rajarvo. Koska odotusarvo on positiivinen operaattori, odotusarvojen jono on ei-kasvava ja sillä on raja-arvo olemassa

$$0 \leq E_P(Y_m) \downarrow E_P(\limsup_m X_m)$$

2. Olkoon  $X$  satunnaismuuttuja jolla  $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$ .

Osoita:  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}(X^k) &= k \int_0^{\infty} t^{k-1} \mathbb{P}(X > t) dt = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t^{1/k}) dt \\ &= k \int_0^{\infty} t^{k-1} \mathbb{P}(X \geq t) dt = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq t^{1/k}) dt \end{aligned}$$

**Vihje** Käytä Fubini lause.

$$\begin{aligned}
E_P(X^k) &= \int_0^\infty x^k F(dx) = \int_0^\infty \left( \int_0^x ky^{k-1} dy \right) F(dx) = \\
&k \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \mathbf{1}(x > y) y^{k-1} dy \right) F(dx) = \\
&k \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \mathbf{1}(x > y) F(dx) \right) y^{k-1} dy = k \int_0^\infty \left( \int_y^\infty F(dx) \right) y^{k-1} dy = \\
&k \int_0^\infty (1 - F(y)) y^{k-1} dy = \\
&k \int_0^\infty P(X > y) y^{k-1} dy = \\
&k \int_0^\infty P(X \geq y) y^{k-1} dy - k \int_0^\infty P(X = y) y^{k-1} dy = \\
&k \int_0^\infty P(X \geq y) y^{k-1} dy
\end{aligned}$$

koska joukko

$$\{y \in \mathbb{R} : P(X = y) > 0\}$$

on numeroituva ja sen Lebesgue mitta on nolla.

3. Olkoon  $(\Omega, \mathcal{F})$  todennäköisyysavaruus ja  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  äärellisesti additiivinen tapahtumien funktio.

Osoita että seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä:

- (a)  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  on myös  $\sigma$ -additiivinen.
- (b) Jos  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$  on tapahtumien jono jolla  $A_n \supseteq A_{n+1}$  ja  $\bigcap_n A_n = \emptyset$ , siitä seuraa  $\mathbb{P}(A_n) \downarrow 0$ .
- (c) Jos  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$  on tapahtumien jono jolla  $A_n \supseteq A_{n+1}$  ja  $\mathbb{P}(A_n) \geq \varepsilon > 0 \forall n$ , siitä seuraa  $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$ ,
- (d) Ominaisuudet (b) ja (c) eivät päde silloin kun korvataan todennäköisyysmittaa  $\mathbb{P}$  jolla  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,  $\sigma$ -äärellisellä  $\sigma$ -additiivisella mitalla  $\mu$  jolla  $\mu(\Omega) = +\infty$ . Esitä vastaesimerkki.

**R.** (b)  $\implies$  (a) Kun  $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ ,  $A_n \cap A_m = \emptyset$  kun  $n \neq m$ ,  
 $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Olkoon  $B_n = \left( \bigcup_{m \geq n} A_m \right) \in \mathcal{F} \subseteq A$ . Koska  $A_n$  joukot  
ovat erillisiä,  $B_n \downarrow \emptyset$  ja siksi  $P(B_n) \downarrow 0$ , ja

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P(A_i) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\ &= P(A \setminus B_n) = P(A) - P(B_n) \end{aligned}$$

ja kun  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A) \quad \square$$

(a)  $\implies$  (b):

toisaalta  $A_n \downarrow \emptyset \iff A_n^c \uparrow \Omega$ , ja  $B_n = A_n^c \setminus A_{n-1}^c = A_n^c \cap A_{n-1}$  ovat  
erillisiä ja  $\bigcup B_n = \Omega$ .  $\sigma$ -additiivisuudesta seuraa

$$1 = P(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n)$$

(a)  $\iff$  (b): vastaoletuksella.

(d): Todennäköisyysavaruudella  $(\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  varustettu Lebesgue mital-  
la  $\lambda$ , jolla  $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$ ,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty) = \emptyset$$

mutta  $\lambda([n, \infty)) = +\infty \not\rightarrow 0$ .

4. (a) Todista ensimmäinen Borel Cantelli lemma:

kun  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ , siitä seuraa  $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$

**R.** Lue luentomonisteesta.

(b) Olkoon  $(A_n : n \in \mathbb{N})$   $P$ -riippumattomia tapahtumia,  
joilla  $\mathbb{P}(A_n) < 1 \forall n$ .

Osoita että  $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1 \iff \mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = 1$ .

**Vihje** muista toinen Borel Cantelli lemma.

**R** Selvästi  $\limsup_n A_n \subseteq \bigcup_n A_n$  ja  $\implies$  seuraa.

Jos  $\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = 1$ , komplementille pätee

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}\left(\bigcap_n A_n^c\right) = \lim_{N \uparrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \leq N} A_n^c\right) = \lim_{N \uparrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 - P(A_n)) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - P(A_n)) \end{aligned}$$

Koska  $(1 - P(A_n)) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , tästä seuraa  $\forall N \in \mathbb{N}$

$$0 = \prod_{n \geq N}^{\infty} (1 - P(A_n)) = P\left(\bigcap_{n \geq N} A_n^c\right)$$

ja koska  $\bigcap_{n \geq N} A_n^c$  kasvaa kun  $N$  kasvaa

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n \geq N} A_n^c\right) = P\left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} A_n^c\right) = P(\liminf_n A_n^c)$$

siksi komplementille pätee  $P(\limsup_n A_n) = 0$ .

5. Olkoon  $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$  satunnaismuuttujien jono jotka ovat  $\mathbb{P}$ -riippumattomia ja samoin jakautuneita jolla  $E_{\mathbb{P}}(X_n^2) < \infty$ .

(a) Osoita:  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{P}(|X_1| > \varepsilon \sqrt{n}) = 0$$

eli

$$\mathbb{P}(|X_1| > \varepsilon \sqrt{n}) = \frac{a_n}{n} = o(n^{-1})$$

jossa  $a_n \rightarrow 0$  kun  $n \rightarrow \infty$ .

**Vihje** Voit käyttää Tehtävän 2 kaavoja eksponentilla  $k = 2$ . **R.** Seuraa Fubinista että  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} +\infty &> E\left(\frac{X^2}{\varepsilon^2}\right) = \int_0^{\infty} P(X^2 > \varepsilon^2 t) dt = \int_0^{\infty} P(X > \varepsilon \sqrt{t}) dt \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} P(X > \varepsilon \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \end{aligned}$$

jossa

$$a_n = nP(X > \varepsilon\sqrt{n})$$

Seuraa että  $\liminf_n a_n = 0$ , muuten sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  ei suppenesi, koska  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = +\infty$ .

Tämä ei vielä sulje pois sitä että mahdollisesti  $\limsup_n a_n > 0$ .

Kuitenkin, koska

$$0 \leq n\mathbf{1}(X^2(\omega) > n) \leq X^2(\omega) \quad \text{jossa } E(X^2) < \infty$$

ja  $\lim_n \mathbf{1}(X^2(\omega) > n) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega$ , dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa

$$nP(X^2(\omega) > n) \rightarrow 0$$

- (b) Kirjoita stokastisen konvergenssin määritelmä **R** Lue leuntoministeesta.
- (c) Osoita

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max\{|X_k| : 1 \leq k \leq n\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

stokastisen konvergenssin mielessä.

**Vihje** Käytä  $\mathbb{P}$ -riippumattomuutta ja tehtävän osaa (a).

**R**

$$\begin{aligned} P\left(\max\{|X_k| : 1 \leq k \leq n\} \leq \varepsilon\sqrt{n}\right) &= P\left(|X_1| \leq \varepsilon\sqrt{n}\right)^n = \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n \\ &\rightarrow \exp\left(-\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = \exp(0) = 1 \end{aligned}$$

$P$ -riippumattomuuden nojalla, koska

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \exp(-a)$$

Siksi komplementtitapahtumalle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(n^{-1/2} \max\{|X_k| : 1 \leq k \leq n\} > \varepsilon\right) = 0$$

eli

$$n^{-1/2} \max\{|X_k| : 1 \leq k \leq n\} \xrightarrow{P} 0$$

stokastisen konvergenssin mielessä.