HY, Todennäköisyysteoria I yleistentti,Ratkaisut 25 helmikuuta 2015

Valitse 4 tehtävää listasta 1,2,3,4,5, ja vastaa tehtävien kysymyksiin. Toki voit myös ratkaistaa kaikki tehtävät jos sinulle jää siihen tarpeeksi aikaa.

1. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujen jono todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

   (a) Osoita että $X(\omega) := \liminf_n X_n(\omega)$ on olemassa $\forall \omega \in \Omega$ ja se on satunnaismuuttuja (eli $\mathcal{F}$-mitallinen funktio).

   R. Olkoon

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) = \min\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}, \quad \bigvee_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) = \max\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\},$$

   Silloin $\liminf_n X_n(\omega) = \wedge_{m\in\mathbb{N}} \vee_{n\geq m} X_n(\omega)$.

   Kuvaus $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on mitallinen jos ja vain jos $\forall t \in \mathbb{R}$

$$Y^{-1}((-\infty, t]) = \big\{\omega : Y(\omega) \leq t\big\} \in \mathcal{F}$$

   Tämä seuraa koska kokoelma

$$\mathcal{C} = \big\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}\big\}$$

   on sekä π-luokka että Dynkinin luokka, eli se on suljettu leikkauksen, komplementtin ja monotonisen rajan suhteen, koska $\mathcal{F}$ on σ-algebra, eli $\mathcal{C}$ on σ-algebra.

   Jos $(-\infty, t] \in \mathcal{C}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, sitä seuraa

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \mathcal{C} \supseteq \sigma\big((-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\big) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

   ja väite on osoitettu.

   Olkoon nyt $Y_m(\omega) = \bigvee_{n\geq m} X_n(\omega)$. Silloin $\forall t \in \mathbb{R}$

$$Y_m^{-1}((-\infty, t]) = \{\omega : Y_m(\omega) \leq t\} = \bigcap_{n\geq m} \{\omega : X_n(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}$$

   koska X_n ovat $\mathcal{F}$-mitallisia ja $\mathcal{F}$ on σ-algebra.

   Samoin

$$X(\omega) := \limsup_n X_n(\omega) = \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} Y_n(\omega)$$

on $\mathcal{F}$-mitallinen ja

$$\{\omega : \ X(\omega) > t\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{\omega : Y_m(\omega) > t\} \in \mathcal{F}$$

ja $\{\omega : \ X(\omega) \leq t\} = \{\omega : \ X(\omega) > t\}^c \in \mathcal{F}$.
Lopuksi myos $\liminf_n X_n(\omega) = -(\limsup_n(-X_n))$ on $\mathcal{F}$-mitallinen, koska jos $X(\omega)$ on mitallinen ja $Y(\omega) = -X(\omega)$,

$$\begin{aligned}
&\{\omega : Y(\omega) \leq t\} = \{\omega : -X(\omega) \leq t\} = \\
&\{\omega : X(\omega) \geq -t\} = \bigcap_n \{\omega : X(\omega) > -t - 1/n\} \\
&= \bigcap_n \{\omega : X(\omega) \leq -t - 1/n\}^c \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

(b) Oletamme nyt että $\mathbb{P}(X_n \geq 0) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Todista Fatou lemma: satunnaismuuttujen jonolle jolla $\mathbb{P}\big(X_n \geq 0\big) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$0 \leq E_{\mathbb{P}}(\liminf_n X_n) \leq \liminf_n E_{\mathbb{P}}(X_n)$$

Vihje Muista monotonisen konvergenssin lause.
R Olkoon $Y_m(\omega) := \bigvee_{n\geq m} X_n(\omega)$. Monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa että

$$E(Y_m) = E\bigg(\bigvee_{n\geq m} X_n\bigg) = E\bigg(\bigvee_{n\geq m} X_n\bigg) =$$

jolla $0 \leq Y_m(\omega) \downarrow X(\omega) = \limsup_m X_m$, koska ei-kasvavalle positiiviselle jonolle on olemassa rajarvo. Koska odotusarvo on positiivinen operaattori, odotusarvojen jono on ei-kasvava ja sillä on raja-arvo olemassa

$$0 \leq E_P(Y_m) \downarrow E_P(\limsup_m X_m)$$

2. Olkoon X satunnaismuuttuja jolla $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$.

Osoita: $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{P}}(X^k) &= k\int_0^\infty t^{k-1}\mathbb{P}(X > t)dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t^{1/k})dt \\
&= k\int_0^\infty t^{k-1}\mathbb{P}(X \geq t)dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq t^{1/k})dt
\end{aligned}$$

Vihje Käytä Fubini lause.

$$E_P(X^k) = \int_0^\infty x^k F(dx) = \int_0^\infty \left(\int_0^x k y^{k-1} dy \right) F(dx) =$$
$$k \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathbf{1}(x > y) y^{k-1} dy \right) F(dx) =$$
$$k \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathbf{1}(x > y) F(dx) \right) y^{k-1} dy = k \int_0^\infty \left(\int_y^\infty F(dx) \right) y^{k-1} dy =$$
$$k \int_0^\infty (1 - F(y)) y^{k-1} dy =$$
$$k \int_0^\infty P(X > y) y^{k-1} dy =$$
$$k \int_0^\infty P(X \geq y) y^{k-1} dy - k \int_0^\infty P(X = y) y^{k-1} dy =$$
$$k \int_0^\infty P(X \geq y) y^{k-1} dy$$

koska joukko

$$\{y \in \mathbb{R} : P(X = y) > 0\}$$

on numeroituva ja sen Lebesgue mitta on nolla.

3. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysavaruus ja $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ äärellisesti additiivinen tapahtumien funktio.

   Osoita että seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpäteviä:

   (a) $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ on myös σ-additiivinen.

   (b) Jos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ on tapahtumien jono jolla $A_n \supseteq A_{n+1}$ ja $\bigcap_n A_n = \emptyset$, siitä seuraa $\mathbb{P}(A_n) \downarrow 0$.

   (c) Jos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ on tapahtumien jono jolla $A_n \supseteq A_{n+1}$ ja $\mathbb{P}(A_n) \geq \varepsilon > 0\ \forall n$, siitä seuraa $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$,

   (d) Ominaisuudet (b) ja (c) eivät päde silloin kun korvataan todennäköisyysmittaa $\mathbb{P}$ jolla $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, σ-äärellisellä σ-additiivisella mitalla μ jolla $\mu(\Omega) = +\infty$. Esitä vastaesimerkki.

R. $(b) \implies (a)$ Kun $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ kun $n \neq m$, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Olkoon $B_n = \left(\bigcup_{m\geq n} A_n\right) \in \mathcal{F} \subseteq A$. Koska A_n joukot ovat erillisiä, $B_n \downarrow \emptyset$ ja siksi $P(B_n) \downarrow 0$, ja

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$
$$= P(A \setminus B_n) = P(A) - P(B_n)$$

ja kun $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A) \quad \square$$

$(a) \implies (b)$:

toisaalta $A_n \downarrow \emptyset \iff A_n^c \uparrow \Omega$, ja $B_n = A_n^c \setminus A_{n-1}^c = A_n^c \cap A_{n-1}$ ovat erillisiä ja $\bigcup B_n = \Omega$. σ-additiivisuudesta seuraa

$$1 = P(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n)$$

(a) $\iff$ (b): vastaoletuksella.

(d): Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ varustettu Lebesgue mittalla λ, jolla $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, \infty) = \emptyset$$

mutta $\lambda([n, \infty)) = +\infty \not\to 0$.

4. (a) Todista ensimmäinen Borel Cantelli lemma:

   kun $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, siitä seuraa $\mathbb{P}\big(\limsup_n A_n\big) = 0$

   R. Lue luentomonisteesta.

   (b) Olkoon $(A_n : n \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia tapahtumia, joilla $\mathbb{P}(A_n) < 1\ \forall n$.

   Osoita että $\mathbb{P}\big(\limsup_n A_n\big) = 1 \iff \mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = 1$.

   Vihje muista toinen Borel Cantelli lemma.

   R Selvästi $\limsup_n A_n \subseteq \bigcup_n A_n$ ja $\implies$ seuraa.

Jos $\mathbb{P}\Big(\bigcup_n A_n\Big) = 1$, komplementtille

$$0 = \mathbb{P}\Big(\bigcap_n A_n^c\Big) = \lim_{N\uparrow\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\le N} A_n^c\Big) \lim_{N\uparrow\infty} \prod_{n=1}^{N}(1-P(A_n))$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-P(A_n)) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-P(A_n))\Big)$$

jossa käytetiin P-riippumattomuutta, ja koska $\log(1-x) \geq -x$ kun $x > 0$,

$$0 \geq \exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)) \geq 0$$

josta seuraa

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$$

väite seuraa nyt toisesta Borel Cantelli lemmasta riippumattomuuden nojalla.

5. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujien jono jotka ovat $\mathbb{P}$-riippumattomia ja samoin jakautuneita jolla $E_{\mathbb{P}}(X_n^2) < \infty$.

   (a) Osoita: $\forall \varepsilon > 0$,

   $$\lim_{n\to\infty} n\,\mathbb{P}\big(|X_1| > \varepsilon\sqrt{n}\big) = 0$$

   eli

   $$\mathbb{P}\big(|X_1| > \varepsilon\sqrt{n}\big) = \frac{a_n}{n} = o\big(n^{-1}\big)$$

   jossa $a_n \to 0$ kun $n \to \infty$.
   Vihje Voit käyttää Tehtävän 2 kaavoja eksponentilla $k = 2$. **R.** Seuraa Fubinista että $\forall \varepsilon > 0$,

   $$+\infty > E\Big(\frac{X^2}{\varepsilon^2}\Big) = \int_0^{\infty} P(X^2 > \varepsilon^2 t)dt = \int_0^{\infty} P(X > \varepsilon\sqrt{t})dt$$
   $$\geq \sum_{n=1}^{\infty} P(X > \varepsilon\sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

jossa

$$a_n = nP(X > \varepsilon\sqrt{n})$$

Seuraa että $\liminf_n a_n = 0$, muuten sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ ei suppenesi, koska $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = +\infty$.
Tämä ei vielä sulje pois sitä että mahdollisesti $\limsup_n a_n > 0$.
Kuitenkin, koska

$$0 \le n\mathbf{1}(X^2(\omega) > n) \le X^2(\omega) \quad \text{jossa } E(X^2) < \infty$$

ja $\lim_n \mathbf{1}(X^2(\omega) > n) = 0 \ \forall\omega \in \Omega$, dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa

$$nP(X^2(\omega) > n) \to 0$$

(b) Kirjoita stokastisen konvergenssin määritelmä **R** Lue leuntoministeesta.

(c) Osoita

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max\{|X_k| : 1 \le k \le n\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

stokastisen konvergenssin mielessä.
Vihje Käytä $\mathbb{P}$-riippumattomuutta ja tehtävän osaa (a).
R

$$P\Big(\max\{|X_k| : 1 \le k \le n\} \le \varepsilon\sqrt{n}\Big) = P\Big(|X_1| \le \varepsilon\sqrt{n}\Big)^n = \big(1 - \frac{a_n}{n}\big)^n$$

$$\to \exp\Big(- \lim_{n\to\infty} a_n\Big) = \exp(0) = 1$$

P-riippumattomuuden nojalla, koska

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \exp(-a)$$

Siksi komplementtitapahtumalle

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(n^{-1/2} \max\{|X_k| : 1 \le k \le n\} > \varepsilon\Big) = 0$$

eli

$$n^{-1/2} \max\{|X_k| : 1 \le k \le n\} \xrightarrow{P} 0$$

stokastisen konvergenssin mielessä.