

Tilastollisen päättelyn jatkokurssi
1. harjoitus (3. 11. 2014)

1. a) Olkoot X_1, X_2, \dots ja Z satunnaisvektoreita (samaa dimensiota). Näytä, että $X_n \xrightarrow{p} Z$ jos ja vain jos $\|X_n - Z\| \xrightarrow{p} 0$.

[*Muista.* Vektoreiden stokastinen suppeneminen on alun perin määritelty komponenteittain.]

b) Olkoot X_1, X_2, \dots ja Y_1, Y_2, \dots satunnaisvektoreita, joille pätee $\|X_n\| \leq \|Y_n\|$ kaikilla n ja $Y_n \xrightarrow{p} 0$. Näytä, että $X_n \xrightarrow{p} 0$. Tässä 0 on nollavektori, joka on samaa dimensiota kuin X_n ja vastaavasti Y_n .

2. Olkoot X_1, X_2, \dots ja Z reaaliarvoisia satunnaismuuttujia. Osoita (vetoamatta luentojen lauseisiin): Jos $X_n \xrightarrow{p} Z$, niin $X_n \xrightarrow{d} Z$.

Tässä ja seuraavassa tehtävässä käytä tarvittaessa todennäköisyysslaskennan kirjallisuutta apuna.

3. (Jatkoa edelliseen tehtävään.) Olkoon c jokin reaalinen vakio. Osoita (vetoamatta luentojen lauseisiin): Jos $X_n \xrightarrow{d} c$, niin $X_n \xrightarrow{p} c$.

4. Oletetaan, että $\theta_0 \in \mathbb{R}$ on tarkasteltavan tilastollisen mallin parametrin ”todellinen” arvo ja $\hat{\theta}_n$ on sen *asymptoottisesti normaalin* estimaattori, jolle pätee

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta_0)),$$

jossa $\sigma^2(\theta_0)$ on θ_0 :sta riippuva positiivinen luku. Osoita, että $\hat{\theta}_n$ on *tarkentuva* eli $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$.

[*Vihje.* Seuraus 1.1 ja tehtävä 3 edellä.]

5. Oletetaan, että parametriavaruus $\Theta \subset \mathbb{R}$ on avoin väli, $\theta_0 \in \Theta$ ja $\hat{\theta}_n$ on θ_0 :n asymptoottisesti normaalin estimaattori kuten edellisessä tehtävässä. Todista *delta-menetelmän* tulos (monisteen s. 5 ja 6): jos $h: \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $h'(\theta_0) \neq 0$, niin

$$\sqrt{n}(h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0)) \xrightarrow{d} N(0, [h'(\theta_0)]^2 \sigma^2(\theta_0)).$$

[*Ohje.* Väliarvolauseen mukaan $h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0) = h'(\theta_n^*)(\hat{\theta}_n - \theta_0)$, jossa θ_n^* on θ_0 :n ja $\hat{\theta}_n$:n välissä. Käytä tehtävien 1 ja 4 tuloksia, lausetta 1.1 ja seurausta 1.1.]

Huom: Harjoitukset alkavat tasan klo 10.00 salissa C129.

Lisäpisteitä saa tehtävien ratkaisemisesta 1, 2, 3 tai 4, jos ratkaisee vastaavasti 20, 40, 60 tai 80 prosenttia annetuista tehtävistä. Tämä edellyttää läsnäoloa harjoitusryhmässä ja valmiutta esittää ratkaisu taululla. Lisäpisteet ovat voimassa yleistenteissä 19. 12. 2014 ja 22. 1. 2015.