

**Tilastollinen päättely, syksy 2014 – kevät 2015**  
**Harjoitus 8 (20. ja 22. 1. 2015)**

1. (Monisteen teht. 4.1.) Olkoot  $Y_1, \dots, Y_n \sim \text{Exp}(\lambda) \perp\!\!\!\perp$ . Osoita faktorointikriteerin avulla, että otoskeskiarvo  $\bar{Y}$  tai yhtä hyvin summa  $\sum_{i=1}^n Y_i$  on parametrin  $\lambda$  tyhjentävä tunnusluku.
2. (Monisteen teht. 4.3.) Olkoot  $Y_1, \dots, Y_n \sim \text{Tas}(0, \theta) \perp\!\!\!\perp$ . Osoita faktorointikriteerin avulla, että suurin havainto  $Y_{(n)}$  on parametrin  $\theta$  tyhjentävä tunnusluku.
3. (Monisteen teht. 4.5.) Olkoon  $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$  tilastollinen malli, jonka parametrilla on yksikäsitteinen suurimman uskottavuuden estimaatti  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Oletetaan, että  $\mathbf{T} = \mathbf{t}(\mathbf{Y})$  on tyhjentävä tunnusluku. Päätele, että  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  riippuu aineistosta  $\mathbf{y}$  vain tunnusluvun  $\mathbf{t}(\mathbf{y})$  välityksellä.
4. (Monisteen teht. 4.6.) Olkoon  $Y_1, \dots, Y_n$  riippumaton otos jakaumasta, jonka ptf/tf on  $f(y; \theta)$ . Päätele esim. faktorointikriteerin avulla, että järjestystunnusluku  $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$  on aina tyhjentävä.
5. (Monisteen teht. 4.7.) Olkoot  $Y_1, \dots, Y_n \sim \text{Exp}(\lambda) \perp\!\!\!\perp$ . Tehtävän 1 mukaan  $T = \sum_{i=1}^n Y_i$  on mallin parametrin  $\lambda$  tyhjentävä tunnusluku. Ilmoita  $T$ :n tiheysfunktio  $f_T$  ja laske siitä Fisherin informaatio  $i_T(\lambda)$ . Vertaa sitä koko aineistoa vastaavasta mallista  $f_{\mathbf{Y}}$  laskettuun Fisherin informaatioon  $i_{\mathbf{Y}}(\lambda)$ . Mitä huomaat?

*Vihje.* Todennäköisyyslaskennassa opitaan, että  $T \sim G(n, \lambda)$  (gammajakauma).