

## MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

### Topologia I 2015

#### Tehtävät 12.1. alkavalle viikolle

Näitä tehtäviä tehdään yhdessä laskuharjoituksissa 12.2. alkavalla viikolla. Tehtäviä käsitellään uudestaan laskuharjoituksissa 19.2. alkavalla viikolla ja silloin ruksataan ratkaistut tehtävät lisäpisteiden saamista varten.

Näissä harjoituksissa kertaillaan joukko-opin tietoja (ja vähän analyysiä ja lineaarialgebraa). Jotkin merkinnät löytyvät topologian kurssikirjasta.

1. Merkitään  $A = \{1, \{2, \{3\}\}\}$ . Anna esimerkki sellaisesta  $B$ , että

- (i)  $B \in A$ ,
- (ii)  $A \in B$ ,
- (iii)  $B \subset A$  ja  $A \neq B$ ,
- (iv)  $A \subset B$  ja  $A \neq B$ .

2. Oletetaan, että  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ovat joukkoja. Todista de Morganin laki

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Miten tämä laki liittyy lauselogiikan (propositiologiikan) de Morganin lakiin?

3. Ovatko ehdot  $A \cap B = A$  ja  $A \cup B = B$  yhtäpitäviä kaikilla joukoilla  $A$  ja  $B$ ? Liittyvätkö nämä yhtälöt jotenkin osajoukkorelaatioon?

4. (a) Oletetaan, että  $A_1, A_2, \dots$  ovat joukkoja. Selitä sanallisesti, mitkä alkiot kuuluvat leikkausjoukkoon  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ?

(b) Päteekö

$$\frac{\pi}{13} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{k}\right)?$$

(Tässä  $(0, \frac{1}{k})$  on avoin väli  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{k}\}$ .)

(c) Selvitä

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{k}\right).$$

5. Oletetaan, että  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$  on laskeva jono reaalilukujen joukon suljettuja välejä.

(a) Osoita, että kaikilla  $m$  ja  $n$  pätee  $a_m \leq b_n$ .

(b) Osoita, että on olemassa

$$c = \sup\{a_m \mid m = 1, 2, 3, \dots\}$$

(c) Osoita, että leikkaus

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$$

on epätyhjä.

6. Anna kolme esimerkkiä vektoriavaruudesta ja siinä määritellystä normista. Miten asia liittyy analyysin ja lineaarialgebran kursseihin? (Väisälän kirjan selaamisesta on apua ....)