Tilastollinen päättely, syksy 2013 – kevät 2014
Harjoitus 11

1. Luennoilla ja monisteessa on muutamia kertoja käytetty seuraavanlaista päättelyä: Jos $t(\boldsymbol{y})$ on jokin testisuure (jonka suuret arvot ovat H_0:lle kriittisiä) ja ϕ on aidosti kasvava funktio, niin testisuureen $s(\boldsymbol{y}) = \phi(t(\boldsymbol{y}))$ käyttö johtaa $t(\boldsymbol{y})$:n kanssa yhtäpitävään testiin. Perustele tämä tarkasti. Yhtäpitävyydellä tarkoitetaan tässä sitä, että p-arvot ovat samat ja siten myös johtopäätökset H_0:n hyväksymisestä tai hylkäämisestä ovat samat.

2. (Monisteen tehtävän 5.15 osa.) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$, jossa parametri on (μ, σ^2). Testattavana on $H_0\colon \mu = \mu_0$. Johda Waldin testisuure ja päättele, että saatava testi on yhtäpitävä tavallisen kaksisuuntaisen t-testin kanssa.

   Luennolla todettiin sama asia uskottavuusosamäärän testin osalta ja luentomonisteen kohdassa 5.7.8 Raon testin osalta.

3. (Monisteen tehtävä 6.1.) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_{25} \sim N(\mu, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$ ja $S^2 = \sum_{i=1}^{25}(Y_i - \overline{Y})^2/24$. Palauta mieleen, miten muuttuja S^2/σ^2 on jakautunut; erityisesti sen jakauma ei riipu parametreista μ ja σ^2. Etsi tämän avulla keskihajonnalle σ ylempi 95 %:n luottamusraja b eli 95 %:n luottamusväli muotoa $]0, b[$, kun on havaittu $s = 10$.

4. (Monisteen tehtävä 6.2.) Olkoot $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$ ja $Y_1 \sim N(\mu_1, 1)$ sekä $Y_2 \sim N(\mu_2, 1)$. Etsi luvut $a, b > 0$ siten, että

$$P\{|Y_1 - \mu_1| \le a,\ |Y_2 - \mu_2| \le a\} = 0.95,$$
$$P\{(Y_1 - \mu_1)^2 + (Y_2 - \mu_2)^2 \le b^2\} = 0.95.$$

   Aineisto on $(y_1, y_2) = (1, 0.5)$. Mitkä kaksi 95 %:n luottamusjoukkoa saadaan yo. yhtälöiden perusteella parametriparille (μ_1, μ_2)? Piirrä kuva. Kumpi luottamusjoukoista on mielestäsi parempi? [*Ohje.* Tarvitset jakaumien $N(0, 1)$ ja χ^2_2 taulukoita.]

5. (Tämä tehtävä on monisteen esimerkin 6.1.5 diskreetti muunnelma ja havainnollistaa luottamusjoukon käsitteen tulkinnallista vaikeutta.)

   Olkoot Y_1 ja Y_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden kummankin arvojoukko on $\{\theta, \theta+1\}$ ja pistetodennäköisyydet $P(Y_i = \theta) = P(Y_i = \theta+1) = \frac{1}{2}$, jossa $\theta \in \mathbb{R}$ on tuntematon parametri. Kun havainnot ovat y_1 ja y_2, määritellään $A(y_1, y_2) = \{y_{(1)}\}$, jossa $y_{(1)} = \min(y_1, y_2)$. Osoita:

   a) Jos $Y_1 \ne Y_2$, niin $\theta \in A(Y_1, Y_2)$ varmasti:
$$P(Y_{(1)} = \theta \,|\, Y_1 \ne Y_2) = 1.$$

   b) Jos $Y_1 = Y_2$, niin $\theta \in A(Y_1, Y_2)$ todennäköisyydellä 50 %:
$$P(Y_{(1)} = \theta \,|\, Y_1 = Y_2) = \tfrac{1}{2}.$$

   c) $A(y_1, y_2)$ on 75 %:n luottamusjoukko θ:lle:
$$P(\theta \in A(Y_1, Y_2)) = P(Y_{(1)} = \theta) = \tfrac{3}{4}.$$

KÄÄNNÄ!

Pohdi lopuksi luottamusjoukkokäsitteen mielekkyyttä tässä tapauksessa empiirisen tutkijan kannalta, jolla on käsillä yksi ainutkertainen aineisto (y_1, y_2), jolle pätee joko $y_1 \neq y_2$ tai $y_1 = y_2$.

Ajankohtaista:
– Nämä viimeiset harjoitukset käsitellään to 20.2. ja pe 21.2.
– Viimeinen luento on pe 21.2.
– 2. kurssikoe on ma 24.2. klo 14.00–16.00 salissa CK112. Koealueena sivut 40–87.