Tilastollinen päättely, syksy 2013 – kevät 2014
Harjoitus 10

1. Olkoot $Y_1, \dots, Y_n \sim N(0, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$. Osoita, että tällä mallilla on monotoninen uskottavuusosamäärä perustuen tunnuslukuun $\sum_{i=1}^n y_i^2$, ja johda tämän perusteella tasaisesti voimakkain testisuure nollahypoteesille $H_0\colon \sigma^2 = 2$, kun vastahypoteesi on $H_1\colon \sigma^2 > 2$. Esitä se (tarvittaessa aidosti monotonisella muunnoksella muuntamalla) sellaisessa muodossa, jonka H_0-jakauma on tuttu.

2. (Monisteen tehtävä 5.11.) Olkoon $Y_1, \dots, Y_n$ riippumaton otos eksponenttiperheen jakaumasta, jonka ptf/tf on muotoa
$$f(y;\theta) = c(\theta)h(y)e^{\phi(\theta)t(y)},$$
jossa $c(\theta)$ ja $h(y)$ ovat ei-negatiivisia funktioita ja $\phi(\theta)$ on aidosti kasvava funktio reaalisesta parametrista θ (vrt. monisteen kohta 4.2.5 ja teht. 2.20). Näytä, että syntyvällä mallilla $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\theta)$ on monotoninen uskottavuusosamäärä. Mitä muotoa ovat kriittiset alueet tasaisesti voimakkaimmassa yksisuuntaisessa testissä?

3. (Monisteen tehtävä 5.12.)

   a) Olkoot $Y_1, \dots, Y_n \sim P(\mu) \perp\!\!\!\perp$. Johda uskottavuusosamäärän testisuureen lauseke, kun testattavana on $H_0\colon \mu = \mu_0$.

   b) Tienristeyksessä on pitkällä aikavälillä sattunut keskimäärin 7.2 onnettomuutta kuukaudessa. Risteykseen asennetaan liikennevalot. Sitä seuraavan vuoden aikana sattuu yhteensä 60 onnettomuutta. Testaa uskottavuusosamäärän testiä ja p-arvon χ^2-approksimaatiota käyttämällä, voidaanko liikennevalojen katsoa vaikuttaneen onnettomuuksien määrään. Oletetaan, että onnettomuuksien lukumäärä kuukaudessa on Poisson-jakautunut.

4. Johda edellisen tehtävän a-kohdan mallissa Waldin testisuureen ja Raon testisuureen lausekkeet ja sovella niitä b-kohdan aineistoon.

5. Jatkoa edellisen harjoituksen tehtävään 4. Oletetaan, että parametrilla θ on kolmaskin mahdollinen arvo 2. Taulukkoon alla on lisätty tähän liittyvät Y:n pistetodennäköisyydet:

y	1	2	3	4	5	6	7
$f_Y(y;0)$	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.94
$f_Y(y;1)$	.06	.05	.04	.03	.02	.01	.79
$f_Y(y;2)$	.01	.02	.03	.04	.05	.40	.45

   Määritä Neyman–Pearson-apulauseen avulla voimakkain testi (esim. ilmoittamalla kriittinen alue), kun hypoteesit ovat $H_0\colon \theta = 0$ vastaan $H_1\colon \theta = 2$ ja merkitsevyystaso on 0.04. Lausu (ja piirrä) tämän testin ja edellisessä harjoituksessa johdetun testin voimafunktiot. Pohdi, kumpaa testiä käyttäisit, jos vastahypoteesi on yhdistetty $H_1\colon \theta \in \{1, 2\}$. Onko olemassa tasaisesti voimakkainta testiä tälle vastahypoteesille?