Tilastollinen päättely, syksy 2013 – kevät 2014
Harjoitus 7

1. (Monisteen tehtävä 3.13.) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim P(\mu)$ $\perp\!\!\!\perp$. Mitä normaalijakaumaa su-estimaattori $\hat{\mu} = \overline{Y}$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri?

2. Jatkoa harjoituksen 2 tehtävään 2. Oletetaan, että satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat jakaumaa, jonka tiheysfunktio on $f(y;\theta) = \theta/y^{\theta+1}$, kun $y > 0$ ja $\theta > 0$. Laske näin muodostetun mallin Fisherin informaatio ja ilmoita, mitä normaalijakaumaa su-estimaattori $\hat{\theta}$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri.

3. (Monisteen tehtävä 4.1.) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathit{Exp}(\lambda)$ $\perp\!\!\!\perp$. Osoita faktorointikriteerin avulla, että otoskeskiarvo $\overline{Y}$ on parametrin λ tyhjentävä tunnusluku.

4. (Monisteen tehtävä 4.3.) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathit{Tas}(0, \theta)$ $\perp\!\!\!\perp$. Osoita, että suurin havainto $Y_{(n)}$ on parametrin θ tyhjentävä tunnusluku.

5. (Vrt. monisteen tehtävä 2.20.) Parametrilla $\boldsymbol{\theta} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ indeksoitu jakaumaperhe on d-ulotteinen *eksponenttiperhe*, jos sen yptf/ytf voidaan kirjoittaa muotoon

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}) = c(\boldsymbol{\theta})h(\boldsymbol{y}) \exp\left\{\sum_{j=1}^{d} \phi_j(\boldsymbol{\theta}) t_j(\boldsymbol{y})\right\},$$

jossa $c(\boldsymbol{\theta})$ sekä $\phi_j(\boldsymbol{\theta})$:t ovat reaaliarvoisia ja riippuvat vain parametrista $\boldsymbol{\theta}$ ja vastaavasti $h(\boldsymbol{y})$ sekä $t_j(\boldsymbol{y})$:t ovat reaaliarvoisia vain aineistosta $\boldsymbol{y}$ riippuvia tunnuslukuja. Vektoria $\boldsymbol{\phi} = \big(\phi_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, \phi_d(\boldsymbol{\theta})\big)$ kutsutaan perheen *luonnolliseksi parametriksi.*

a) Osoita, että mallia $Y_1, \ldots, Y_n \sim P(\mu)$ $\perp\!\!\!\perp$ vastaava jakaumaperhe $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\mu)$ on yksiulotteinen eksponenttiperhe, luonnollisena parametrina $\log \mu$. [*Apu.* Mallin lauseke on muodostettu esim. harjoituksen 5 tehtävässä 1.]

b) Osoita, että mallia $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$ vastaava jakaumaperhe $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\mu,\sigma^2)$ (ks. esim. monisteen kohta 1.2.3) on kaksiulotteinen eksponenttiperhe, luonnollisena parametrina $(\mu/\sigma^2, 1/\sigma^2)$. [*Ehdotus.* Aloita kirjoittamalla $(y_i - \mu)^2 = y_i^2 - 2\mu y_i + \mu^2$.]

c) Lisätehtävä: Perustele, että määritelmässä yllä vakio $c(\boldsymbol{\theta})$ riippuu $\boldsymbol{\theta}$:sta vain $\boldsymbol{\phi}$:n kautta. Siten perhe voidaan aina parametroida luonnollisen parametrinsa avulla.