Tilastollinen päättely, syksy 2013 - kevät 2014

Harjoitus 6, viikko 3

1. Harjoituksen 5 tehtävässä 2 tarkasteltiin Poisson-regressiomallia $Y_1, \ldots, Y_n \perp\!\!\!\perp$ ja $Y_i \sim P(\lambda x_i)$, jossa $x_1, \ldots, x_n$ ovat tunnettuja positiivisia lukuja, johdettiin sen SU-estimaattorille lauseke

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

   ja todettiin, että $\hat{\lambda}$ on harhaton. Onko $\hat{\lambda}$ tarkentuva, jos $x_i \geq c$ kaikilla i ja c on positiivinen vakio?

2. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n$ riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia jakaumasta, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \frac{1}{2}(1 + \theta y), \quad -1 < y < 1, \quad -1 < \theta < 1.$$

   Laske parametrille θ estimaattori momenttimenetelmän avulla. Onko saatu estimaattori tarkentuva?

3. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n$ riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia jakaumasta, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \exp(-(y - \theta))1_{[\theta, \infty)}(y), \quad y \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

   Johda parametrille θ estimaattori momenttimenetelmän avulla. Onko saatu estimaattori tarkentuva?

   Vihje: Osittaisintegrointikaava

$$\int_a^b f(y)g'(y)dy = \Big|_a^b f(y)g(y) - \int_a^b f'(y)g(y)dy$$

4. Olkoot Y_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, k$ riippumattomia ja $Y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$. Kyseessä on nyt yksisuuntainen tasapainotettu varianssianalyysi, jossa ryhmäkoko k on kiinteä ja ryhmien lukumäärä on n $(> k)$.

   a) Osoita, että mallin parametrien suurimman uskottavuuden estimaattorit ovat

   $$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \ \text{ ja } \ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2.$$

   b) Onko $\hat{\sigma}^2$ parametrin σ^2 tarkentuva estimaattori? Kommentoi tulosta.

   Vihje: Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$. Tällöin $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$, jossa $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$.

5. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim G(\alpha, 1/\beta)$ $\perp\!\!\!\perp$, jossa parametri $\alpha > 0$ on tunnettu.

   a) Osoita, että

   $$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\alpha}$$

   on parametrin β harhaton ja tarkentuva estimaattori.

   b) Osoita, että

   $$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}{n\alpha(\alpha+1)}$$

   on funktion $g(\beta) = \beta^2$ harhaton ja tarkentuva estimaattori.