

Tilastollisen päättelyn jatkokurssi 6. harjoitus (10. 12. 2013)

1. Jatkoa harjoituksen 5 tehtävään 1. Oletetaan aikaisempien oletusten lisäksi, että $\hat{\beta}$ on asympotoottisesti normaalin (ks. muistiinpanojen sivu 31):

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \mathbf{N}_p(0, \sigma^2 Q^{-1}).$$

Asetetaan hypoteesi $H_0: A\beta = c$, jossa $c \in \mathbb{R}^q$ ja A on $q \times p$ -matriisi, jonka aste on q .

a) Perustele, että $\sqrt{n}(A\hat{\beta} - c) \xrightarrow{d} \mathbf{N}_q(0, \sigma^2 A Q^{-1} A')$, kun H_0 pätee.

b) Tarkastellaan lineaarisen mallin kurssilla esitettyä F-testisuuretta

$$F = (A\hat{\beta} - c)' \left[A \left(\sum_{i=1}^n Z_i Z_i' \right)^{-1} A' \right]^{-1} (A\hat{\beta} - c) / q S^2,$$

jossa $S^2 = n\hat{\sigma}^2/(n-p)$. Osoita, että $qF \xrightarrow{d} \chi_q^2$, kun H_0 pätee. (Ks. Saikkonen: *Lineaarinen malli* (kevät 2007), s. 18.)

Apu. Tarvinnat ainakin lausetta 1.3 ja seurausta 1.2 aikaisemman tehtävän lisäksi. Palauta mieleen lineaarisen mallin kurssilta neliömuoto $(Z - \mu)' \Sigma^{-1} (Z - \mu)$, kun $Z \sim \mathbf{N}(\mu, \Sigma)$. Kurssin kotisivulla on linkki lineaarisen mallin luentomuistiinpanoihin.

2. Tarkastellaan harjoituksen 3 tehtävän 4 mallia $Y_1, \dots, Y_n \perp\!\!\!\perp$, jossa $Y_i \sim P(\mu_i(\alpha, \beta))$, $\mu_i(\alpha, \beta) = \exp(\alpha + \beta x_i)$, ja hypoteesia $H_0: \beta = 0$, jonka mukaan selittäjillä x_i ei ole merkitystä.

Muodosta Waldin testisuureen lauseke hypoteesille H_0 ja kerro, mikä on sen asympotoottinen jakauma H_0 :n vallitessa. Oletetaan tässä, että lauseen 3.2 tulos ja kaikki siitä seuraava asympotootikka pätee tarkasteltavalle mallille (käytännössä tämä merkitsee joitakin rajoitteita selittäjien arvoille).

Ohje. Su-estimaattorin $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ lauseketta ei voi ratkaista ”suljetussa muodossa”. Merkitse lyhyesti esim. $\hat{\mu}_i = \mu_i(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Palauta myös mieleen 2×2 -matriisin käänteismatriisin kaava.

3. Sama malli ja hypoteesi kuin edellisessä tehtävässä. Johda rajoitettu (eli H_0 :n vallitessa muodostettu) su-estimaattori $\tilde{\theta}$. Muodosta sitten Raon testisuureen lauseke ja kerro, mikä on sen asympotoottinen jakauma H_0 :n vallitessa.

Ohje. Rajoitettu malli on tuttu aineopintojen päättelyn kurssilta (uudelleenparametroituna). Käytä testisuureen muodostamiseen kaavaa (3.15) ja sievennä; lopputuloksen voi esittää melko siistinä lausekkeena esim. suureista $\bar{y} = \sum_i y_i/n$, $s_x^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2/n$ ja $s_{xy} = \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/n$.

Ajankohtaista:

Kurssia voi suorittaa yleistenttilaisuuksissa. Ilmoittaudu tenttiin WebOodissa normaalin käytännön mukaan. Seuraavat tenttilaisuudet ovat ti 17. 12. (ilm. viim. 9. 12.) ja to 23. 1. (ilm. viim. 15. 1.). Harjoituslisäpisteet otetaan huomioon näiden kahden tentin tuloksissa.

Viimeinen luento on ti 10. 12. Silloin tehdään lyhyt katsaus kurssin keskeisiin kohtiin ja jaetaan muutama ylimääräinen harjoitustehtävä vapaasti ratkaistavaksi (eivät vaikuta lisäpisteisiin).