

VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 8
SYKSY 2013

1. Laske integraali

$$\iint_Q g \, dx dy,$$

kun $Q \subset \mathbb{R}^2$ on suunnikas, jonka kärjet ovat pisteissä $(0, 2)$, $(3, 2)$, $(0, -2)$ ja $(-3, -2)$, sekä g on funktio $g(x, y) = x \sin y$. Käytä koordinaattimuunnosta.

2. Olkoon D tason osajoukko $\bar{B}(\bar{0}, 4) \setminus B(\bar{0}, 2)$. Käyttäen napakoordinaatteja, laske integraali

$$\iint_D \log(x^2 + y^2) dA.$$

3. Onko joukko $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, x \in \mathbb{Q}\}$ Lebesguen 0-joukko?

4. Olkoon $\alpha > 0$. Millä α :n arvoilla epäoleellinen integraali

$$\iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} \, dx dy$$

suppenee, kun joukko A on

a) $\bar{B}(\bar{0}, 1) \setminus \{\bar{0}\}$,

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x^2 + y^2| \leq 1, y \geq |x|\}$?

5. Sama kuin edellinen tehtävä, mutta $A = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}(\bar{0}, 1)$.

6. Suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin x \sin y \, dx dy \quad ?$$

1. Calculate the integral

$$\iint_Q g \, dx dy,$$

when $Q \subset \mathbb{R}^2$ is a parallelogram with vertices at the points $(0, 2)$, $(3, 2)$, $(0, -2)$ and $(-3, -2)$, while g is the function $g(x, y) = x \sin y$. Use a coordinate transform.

2. Let D be the planar set $\bar{B}(\bar{0}, 4) \setminus B(\bar{0}, 2)$. Using polar coordinates, calculate the integral

$$\iint_D \log(x^2 + y^2) dA.$$

3. Is the set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, x \in \mathbb{Q}\}$ of Lebesgue measure 0?

4. For which $\alpha > 0$ does the improper (or generalized) integral

$$\iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dx dy$$

converge, when A is the set

a) $\bar{B}(\bar{0}, 1) \setminus \{\bar{0}\}$,

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x^2 + y^2| \leq 1, y \geq |x|\}$?

5. Same as the previous problem, but $A = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}(\bar{0}, 1)$.

6. Does the following improper integral converge:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin x \sin y dx dy \quad ?$$